Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Некоторые свойства субэкспоненциальных распределений, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 138–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:57:51

УДК 519.2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. Л. Якимив

Неотрицательная случайная величина X имеет субэкспоненциальное распределение, если $(1 - G(t))/(1 - F(t)) \rightarrow 2$ при $t \rightarrow \infty$, где $F(t) = P\{X \leq t\}$, а $G(t)$ – свертка $F(t)$ с собой. Даны условия на распределения независимых неотрицательных случайных величин X и Y , при выполнении которых $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$ имеют субэкспоненциальное распределение.

Библиография: 10 названий.

Мы будем говорить, что распределение неотрицательной случайной величины X *субэкспоненциально*, и писать $X \in S$, если существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(t)}{1 - F(t)} = 2,$$

где $F(t)$ – функция распределения, X , $F^{2*}(t)$ – свертка $F(t)$ с собой: $F(t) = P\{X \leq t\}$,

$$F^{2*}(t) = \int_0^t F(t-u) dF(u), \quad t \geq 0.$$

Субэкспоненциальные распределения были введены в 1964 году В. П. Чистяковым [1] и в дальнейшем получили приложения в теории ветвящихся процессов, теории массового обслуживания, теории восстановления, теории безгранично делимых распределений (см. [2]–[9]).

В настоящей заметке изучаются вопросы, которые еще не были предметом рассмотрения ранее. А именно, пусть случайные величины X и Y независимы, $X, Y \in S$. В каком случае $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y) \in S$? В теореме 1 вопрос о принадлежности $\max(X, Y)$ множеству S сводится к уже изучавшейся ранее проблеме принадлежности суммы $X + Y$ множеству субэкспоненциальных распределений (см. статьи [5]–[7], [9], [10]). А именно, показано, что $\max(X, Y) \in S$ тогда и только тогда, когда $X + Y \in S$. Более сложным для изучения оказался вопрос о принадлежности $\min(X, Y)$ множеству S . Здесь даны только достаточные условия (теорема 2). В заключение в теореме 3 даны достаточные условия принадлежности $\max(X, Y)$ множеству S . Перейдем к формулировке полученных результатов.

Положим $G(t) = P\{Y \leq t\}$, $T(t) = 1 - F(t)$, $H(t) = 1 - G(t)$, $t \geq 0$. Мы будем писать, что $X \in D$, если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{T(2t)} < \infty. \quad (1)$$

Если выполнено (1), то функция $T(t)$ называется *мажорируемо меняющейся на бесконечности*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y независимы, $X, Y \in S$. $\max(X, Y) \in S$ тогда и только тогда, когда $X + Y \in S$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X и Y независимы, $X, Y \in S$. Если $X \in D$ и $Y \in D$, то $\min(X, Y) \in S$.

Пусть $G(t) = a_1 G_1(t) + a_2 G_2(t) + a_3 G_3(t)$, $t \geq 0$, где $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$ – соответственно дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная функции распределения, $H_i(t) = 1 - G_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Предположим, что все точки роста $G_1(t)$ расположены в последовательности $x_1 < x_2 < \dots$ и

$$G_1(x_n) - G_1(x_{n-}) = p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть X и Y независимы, $X, Y \in S$, $MX < \infty$, $X \in D$ и выполнены следующие предположения:

1) для некоторого $\mu > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} - x_n \leq \mu$ и при $n \rightarrow \infty$

$$p_n = o(T(x_n)); \quad (2)$$

2) плотность $g(t)$ функции распределения $G_2(t)$ удовлетворяет соотношению

$$g(t) = o(T(t)) \quad (t \rightarrow \infty);$$

3) при $t \rightarrow \infty$

$$H_3(t) = o(T(t)). \quad (3)$$

Тогда $\max(X, Y) \in S$.

Для доказательства теорем 1–3 нам понадобятся следующие три леммы.

ЛЕММА 1 (см. [10]). Пусть $X \in S$. Тогда существует функция $\varphi(t) \in [0, t]$ при $t \geq 0$ такая, что при $t \rightarrow \infty$

$$\varphi(t) \rightarrow +\infty, \quad \varphi(t) = o(t), \quad \frac{T(t - \varphi(t))}{T(t)} \rightarrow 1. \quad (4)$$

ЛЕММА 2. Пусть $X \in S$. Тогда для произвольной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей (4), выполнено следующее соотношение:

$$\int_{\varphi(t)}^t T(t - u) dF(u) = o(T(t)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

ЛЕММА 3. Пусть X и Y независимы, $X, Y \in S$. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую (4). Тогда $X + Y \in S$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\varphi(t)}^t T(t - u) dG(u) = o(T(t) + H(t)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Доказательство леммы 2 несложно и здесь не приводится. Лемма 3 следует из леммы 1 работы [10] и соотношений (4) и (5) той же работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим при $t \geq 0$ $U(t) = F(t)G(t)$, $V(t) = 1 - U(t)$. Пусть $X, Y \in S$ и Z_1 и Z_2 — независимые случайные величины с функцией распределения $U(t)$. Заметим, что

$$P\{Z_1 + Z_2 > t\} = 1 - \int_0^t U(t-u) dU(u) = V(t) + \int_0^t V(t-u) dU(u).$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $X + Y \in S$ тогда и только тогда, когда при $t \rightarrow \infty$

$$I = \int_0^t V(t-u) dU(u) \sim V(t). \quad (5)$$

Подставляя в (5) $V(t) = T(t) + H(t) - T(t)H(t)$, разобьем интеграл I на три части: $I = I_1 + I_2 - I_3$. Для I_1 имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t T(t-u) d(F(u)G(u)) \\ &= \int_0^t T(t-u)F(u) dG(u) + \int_0^t T(t-u)G(u) dF(u) = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим сначала J_2 . Для функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям (4), имеем

$$J_2 = \int_0^{\varphi(t)} T(t-u)G(u) dF(u) + \int_{\varphi(t)}^t T(t-u)G(u) dF(u).$$

В силу леммы 1 при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\varphi(t)} T(t-u)G(u) dF(u) \sim T(t) \int_0^\infty G(u) dF(u).$$

Согласно лемме 2

$$\int_{\varphi(t)}^t T(t-u)G(u) dF(u) \leq \int_{\varphi(t)}^t T(t-u) dF(u) = o(T(t))$$

при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$J_2 = (1 + o(1))T(t) \int_0^\infty G(u) dF(u) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Далее,

$$J_1 = \int_0^{\varphi(t)} T(t-u)F(u) dG(u) + \int_{\varphi(t)}^t T(t-u)F(u) dG(u).$$

Точно так же, как и ранее, устанавливаем, что

$$\int_0^{\varphi(t)} T(t-u)F(u) dG(u) = (1 + o(1))T(t) \int_0^\infty F(u) dG(u)$$

при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$J_1 = (1 + o(1))T(t) \int_0^\infty F(u) dG(u) + (1 + o(1)) \int_{\varphi(t)}^t T(t-u) dG(u) \quad (8)$$

при $t \rightarrow \infty$. Из (6)–(8) следует, что

$$I_1 = (1 + o(1))T(t) + (1 + o(1)) \int_{\varphi(t)}^t T(t-u) dG(u). \quad (9)$$

Пусть $\psi(t)$ – функция, обладающая всеми свойствами функции $\varphi(t)$, только относительно $H(t)$. Повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве (9), имеем

$$I_2 = (1 + o(1))H(t) + (1 + o(1)) \int_{\psi(t)}^t H(t-u) dF(u). \quad (10)$$

Положим $\mu(t) = \min(\varphi(t), \psi(t))$. В силу леммы 1

$$\int_0^{\mu(t)} T(t-u)H(t-u) dU(u) \sim T(t)H(t) = o(T(t) + H(t)) \quad (11)$$

при $t \rightarrow \infty$. Далее, согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \int_{\mu(t)}^t T(t-u)H(t-u) dU(u) &= \int_{\mu(t)}^t T(t-u)H(t-u)F(u) dG(u) \\ &\quad + \int_{\mu(t)}^t T(t-u)H(t-u)G(u) dF(u) \\ &\leq \int_{\mu(t)}^t H(t-u) dG(u) + \int_{\mu(t)}^t T(t-u) dF(u) \\ &= o(H(t)) + o(T(t)) = o(H(t) + T(t)) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$, так как функция $\mu(t)$ обладает всеми свойствами функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ относительно $T(t)$ и $H(t)$. Поэтому

$$I_3 = \int_0^t T(t-u)H(t-u) dU(u) = o(H(t) + T(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Из (10)–(12) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$I = (1 + o(1))V(t) + (1 + o(1)) \left(\int_{\varphi(t)}^t T(t-u) dG(u) + \int_{\psi(t)}^t H(t-u) dF(u) \right). \quad (13)$$

Пусть $X + Y \in S$. Тогда соотношение (13) и лемма 3 влекут (5). Если $\max(X, Y) \in S$, то из (5) и (13) выводим, что

$$\int_{\varphi(t)}^t T(t-u) dG(u) = o(T(t) + H(t)) \quad (t \rightarrow \infty),$$

откуда при помощи леммы 3 следует, что $X + Y \in S$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим

$$V(t) = P\{\min(X, Y) > t\} = T(t)H(t), \quad U(t) = 1 - V(t), \quad t \geq 0.$$

Как и в теореме 1, докажем, что

$$\int_0^t V(t-u) dU(u) \sim V(t) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (14)$$

Согласно лемме 1 мы можем выбрать функцию $\varphi(t) \in [0, t]$ такую, что $\varphi(t) = o(t)$ и $T(t - \varphi(t)) \sim T(t)$, $H(t - \varphi(t)) \sim H(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Прежде всего заметим, что в силу выписанных свойств функции $\varphi(t)$

$$\int_0^{\varphi(t)} V(t-u) dU(u) \sim V(t) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (15)$$

Поскольку $H(t)$ и $T(t)$ мажорируемо меняются на бесконечности, то

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(t)}^{t/2} V(t-u)T(u) dG(u) &\leq V\left(\frac{t}{2}\right) \int_{\varphi(t)}^t T(u) dG(u) \\ &\leq V\left(\frac{t}{2}\right)T(\varphi(t))H(\varphi(t)) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, по той же причине

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^{t-\varphi(t)} V(t-u)T(u) dG(u) &\leq V(\varphi(t)) \int_{t/2}^t T(u) dG(u) \\ &\leq V(\varphi(t))T\left(\frac{t}{2}\right)H\left(\frac{t}{2}\right) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \int_{t-\varphi(t)}^t V(t-u)T(u) dG(u) &\leq T(t - \varphi(t)) (H(t - \varphi(t)) - H(t)) \\ &= O(T(t))o(H(t)) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношений (16)–(18) следует, что

$$\int_{\varphi(t)}^t V(t-u)T(u) dG(u) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Точно так же устанавливается, что

$$\int_{\varphi(t)}^t V(t-u)H(u) dF(u) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (20)$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$\int_{\varphi(t)}^t V(t-u) dU(u) = o(V(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (21)$$

Из (15) и (21) следует (14). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (4). Из соотношения (6) работы [10] следует, что для любого фиксированного $\lambda \in (0, 1)$ при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\varphi(t)}^{\lambda t} T(t-y) dG(y) = o(T(t)).$$

Поскольку $T(t)$ мажорируемо меняется на бесконечности, то в силу (3) при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG_3(y) \leq H_3(\lambda t) = o(T(\lambda t)) = o(T(t)). \quad (22)$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 1 из [10], устанавливаем, что

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG_2(y) = o(T(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (23)$$

Далее,

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG_1(y) = \sum T(t-x_n) p_n \leq \sup p_n \sum T(t-x_n), \quad (24)$$

где сумма и супремум берутся по всем тем натуральным n , для которых $x_n \in [\lambda t, t]$. Заметим, что

$$\sum T(t-x_n) \leq \sum_{m=0}^{[t\nu]} T(\mu m) \leq 1 + \frac{1}{\mu} \int_0^{t(1-\lambda)} T(y) dy \leq 1 + \frac{MX}{\mu}, \quad (25)$$

где условия суммирования в первой сумме те же, что и ранее, $\nu = (1-\lambda)/\mu$ (мы воспользовались неравенством

$$T(\mu m) \leq \frac{1}{\mu} \int_{\mu(m-1)}^{\mu m} T(y) dy,$$

справедливым при $m \geq 1$). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно (2) для него найдется такое $b > 0$, что при $x_n \geq b$

$$p_n \leq \varepsilon T(x_n). \quad (26)$$

Из неравенств (24)–(26) следует, что при $t \geq b/\lambda$

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG_1(y) \leq \varepsilon T(\lambda t) \left(1 + \frac{MX}{\mu}\right). \quad (27)$$

Из (27) получаем, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\lambda t}^t T(t-y) \frac{dG_1(y)}{T(t)} \leq C\varepsilon, \quad (28)$$

где

$$C = \left(1 + \frac{MX}{\mu}\right) \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{T(\lambda t)}{T(t)} < \infty,$$

так как $T(t)$ мажорируемо меняется на бесконечности. В силу произвольности ε из (28) следует, что

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG_1(y) = o(T(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (29)$$

В итоге из (22), (23) и (29) получаем, что

$$\int_{\lambda t}^t T(t-y) dG(y) = o(T(t)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\varphi(t)}^t T(t-y) dG(y) = o(T(t)).$$

Из последнего соотношения, теоремы 1 и леммы 3 получаем требуемое. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теор. вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.
- [2] Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbb{R}$ // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 1. С. 135–140.
- [3] Chover J., Ney P., Wainger S. Degeneracy properties of subcritical branching processes // Ann. Probab. 1973. V. 1. P. 663–673.
- [4] Teugels J. L. The class of subexponential distributions // Ann. Probab. 1975. V. 3. P. 1000–1011.
- [5] Goldie C. M. Subexponential distributions and dominated-variation tails // J. Appl. Probab. 1978. V. 15. P. 440–442.
- [6] Embrechts P., Goldie C. M. On closure and factorisation properties of subexponential and related distributions // J. Austral. Math. Soc. 1980. V. 29. P. 243–256.
- [7] Cline D. B. H. Convolution of distributions with exponential and subexponential tails // J. Austral. Math. Soc. 1987. V. 93. P. 347–365.
- [8] Kluppelberg C. Subexponential distributions and integrated tails // J. Appl. Probab. 1988. V. 25. P. 132–141.
- [9] Leslie J. R. On the non-closure under convolution of the subexponential family // J. Appl. Probab. 1989. V. 26. P. 58–66.
- [10] Якимив А. Л. Достаточные условия субэкспоненциальности свертки двух распределений // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 778–781.