Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Амосов, О слабой сходимости одного класса быстро-
осциллирующих функций, *Матем. заметки*, 1997, том 62,
выпуск 1, 145–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:47:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Амосов

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), а $Y = [0, 1]^N$. Пусть функция $f(x, y)$ задана на $\Omega \times \mathbb{R}^N$ и удовлетворяет по переменной y условию 1-периодичности: $f(x, y+k) = f(x, y) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^N$. Рассмотрим быстроосциллирующие функции вида $f^\varepsilon(x) \equiv f(x, x/\varepsilon)$ с $\varepsilon \rightarrow 0^+$, которые широко используются в теории усреднения [1]–[5]. Для этой теории особенно в связи с изучаемой в последнее время двухмасштабной сходимостью [6]–[9] весьма важным является выделение классов функций f , для которых соответствующие суперпозиции $f^\varepsilon(x)$ измеримы на Ω при всех $\varepsilon > 0$ и слабо сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ к среднему по переменной y значению $\langle f \rangle(x) \equiv \int_Y f(x, y) dy$.

Опишем некоторые известные в этой области результаты. Обозначим через $L_p^\#(Y)$ банахово пространство заданных на $\mathbb{R}^N$ измеримых 1-периодических функций с нормой

$$\|\cdot\|_{L_p^\#(Y)} = \|\cdot\|_{L_p(Y)}, \quad p \in [1, \infty].$$

Пусть $C^\#(Y)$ – банахово пространство непрерывных на $\mathbb{R}^N$ и 1-периодических функций с нормой $\|\cdot\|_{C^\#(Y)} = \|\cdot\|_{C(Y)}$.

Широко известно (см. [10]–[12], [5]) следующее утверждение, относящееся к случаю, когда

$$f = f(y), \quad f^\varepsilon(x) \equiv f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{и} \quad \langle f \rangle = \int_Y f(y) dy = \text{const.}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Пусть $f \in L_p^\#(Y)$ для некоторого $p \in [1, \infty]$. Тогда $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$ для всех $\varepsilon > 0$. Кроме того, $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ слабо в $L_p(\Omega)$ для $p \in [1, \infty)$ и *-слабо в $L_\infty(\Omega)$ для $p = \infty$.

Следующее утверждение фактически содержится в [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00621 и № 97-01-00214.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f \in L_p(\Omega; C^\#(Y))$ для некоторого $p \in [1, \infty]$. Тогда $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$ для всех $\varepsilon > 0$, причем $\|f^\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega; C^\#(Y))}$. Кроме того, $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ слабо в $L_p(\Omega)$ для $p \in [1, \infty)$ и $*$ -слабо в $L_\infty(\Omega)$ для $p = \infty$. В случае $p \in [1, \infty)$ имеем дополнительно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |f^\varepsilon(x)|^p dx = \int_{\Omega \times Y} |f(x, y)|^p dx dy. \quad (1)$$

Свойство (1) играет важную роль в теории двухмасштабной сходимости [8], [9]. Обладая этим свойством функции f называются *допустимыми*.

Обратим внимание на то, что в предложении 2, как и в других известных утверждениях о слабой сходимости f^ε (см., например, [1], [4], [8]), функция $f(x, y)$ предполагается непрерывной, по крайней мере, по одному из аргументов x или y . Совсем отказаться от каких-либо требований регулярности по одной из переменных нельзя. Известно [8], что уже при $N = 1$ существует функция $f \in C([0, 1]; L_1^\#(Y)) \cap L_\infty((0, 1) \times \mathbb{R})$ такая, что для $\varepsilon = 1/n$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 f^\varepsilon(x) dx \neq \int_0^1 \langle f \rangle(x) dx.$$

Идея построения такой функции принадлежит П. Жерар и Ф. Мюра.

В [13] в случае $N = 1$ были введены новые классы функций $f(x, y)$, которые допускают разрывы как по переменной x , так и по переменной y , и в то же время обеспечивают нужные свойства функций f^ε . Приведем соответствующий результат. Пусть $\Omega = (0, X)$ и $\Xi \subset (0, 1)$, причем $\text{mes}((0, 1) \setminus \Xi) = 0$. Введем в $L_\infty^\#(Y)$ замкнутое подпространство $\mathcal{M}^\#(\Xi)$ функций $\varphi(y)$, которые непрерывны по y вдоль Ξ (т.е. таковы, что из $y_n \rightarrow y_0$ и $y_n, y_0 \in \Xi$ следует, что $\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(y_0)$), с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}^\#(\Xi)} = \sup_{y \in \Xi} |\varphi(y)|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f \in L_p(\Omega; \mathcal{M}^\#(\Xi))$ для некоторого $p \in [1, \infty]$. Тогда $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$ для всех $\varepsilon > 0$, причем $\|f^\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega; \mathcal{M}^\#(\Xi))}$. Кроме того, $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ слабо в $L_p(\Omega)$ в случае $p \in [1, \infty)$ и $*$ -слабо в случае $p = \infty$.

Доказательство предложения 3 дано в [14, предложение 3]. Из [14] следует также, что при $p \in [1, \infty)$ функция $f \in L_p(\Omega; \mathcal{M}^\#(\Xi))$ является допустимой в смысле [8], т.е. для нее выполнено свойство (1).

Другой класс разрывных по x и y функций, причем для $N \geq 1$, предложен в [9]. Сформулируем соответствующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f: \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевская функция. Пусть для всякого $\delta > 0$ существуют замкнутые множества $Q_\delta \subset \Omega$ и $K_\delta \subset Y$ такие, что $\text{mes}(\Omega \setminus Q_\delta) < \delta$, $\text{mes}(Y \setminus K_\delta) < \delta$ и $f \in C(Q_\delta \times K_\delta)$. Предположим, что существует функция $\alpha \in L_2(\Omega)$ такая, что $|f(x, y)| \leq \alpha(x)$ для всех $(x, y) \in \Omega \times Y$, либо существует функция $\beta \in L_2^\#(Y)$ такая, что $|f(x, y)| \leq \beta(y)$ для всех $(x, y) \in \Omega \times Y$.

Тогда $f^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ для всех $\varepsilon > 0$, причем $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ слабо в $L_2(\Omega)$. Свойство (1) выполнено с $p = 1$.

Покажем, что предложения 2 и 3 остаются в силе и при замене в них пространств $L_p(\Omega; C^\#(Y))$ и $L_p(\Omega; \mathcal{M}^\#(\Xi))$ на более широкое пространство $L_p(\Omega; L_\infty^\#(Y))$.

Напомним сначала некоторые определения и свойства [15]. Пусть E – измеримое множество в $\mathbb{R}^N$ и $B_r(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - y_0| < r\}$, $r > 0$. Точка y_0 называется *точкой плотности множества E* , если

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\text{mes}[E \cap B_r(y_0)]}{\text{mes}[B_r(y_0)]} = 1.$$

Известно, что почти все точки множества E являются его точками плотности. Говорят, что измеримая на E функция φ имеет в точке $y_0 \in E$ *аппроксимативный предел*, если существует измеримое множество $E(y_0) \subset E$, для которого y_0 является точкой плотности, и существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \text{ap } \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0, y \in E(y_0)} \varphi(y).$$

Множество всех таких точек обозначим через $A[\varphi]$. Функция φ называется *аппроксимативно непрерывной в точке $y_0 \in A[\varphi]$* , если

$$\varphi(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \text{ap } \varphi(y).$$

Известно, что всякая измеримая на E почти всюду конечная функция аппроксимативно непрерывна почти всюду на E (теорема Данжуа–Степанова).

Ясно, что функцию $\varphi \in L_\infty^\#(Y)$ можно переопределить на множестве нулевой меры значением аппроксимативного предела так, чтобы она стала аппроксимативно непрерывной в каждой точке из $A[\varphi]$. Далее такое переопределение считается выполненным для всякой $\varphi \in L_\infty^\#(Y)$. Заметим, что при этом

$$|\varphi(y_0)| = |\lim_{y \rightarrow y_0} \text{ap } \varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{L_\infty^\#(Y)} \quad \forall y_0 \in A[\varphi]. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть f является сильно измеримой функцией на Ω со значениями в $L_\infty^\#(Y)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существуют множества $\Omega_0 \subset \Omega$, $Y_0 \subset Y$ такие, что $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$, $\text{mes}(Y \setminus Y_0) = 0$, и для всех $(x_0, y_0) \in \Omega_0 \times Y_0$ функция $f(x, y)$ аппроксимативно непрерывна по y в точке y_0 .

2. Для всякого $\varepsilon > 0$ функция

$$f^\varepsilon(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x/\varepsilon} \text{ap } f(x, y)$$

определена почти всюду на Ω , измерима и для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$|f^\varepsilon(x)| \leq \|f(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По определению сильной измеримости [16] существуют множество $\Omega_0 \subset \Omega$ и последовательность $\{f_n(x, y)\}_{n=1}^\infty$ простых по $x \in \Omega$ функций со значениями в $L_\infty^\#(Y)$ такие, что $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ и

$$\|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \forall x \in \Omega_0. \quad (4)$$

Напомним, что простая функция $f_n: \Omega \rightarrow L_\infty^\#(Y)$ имеет вид

$$f_n(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq m_n} \chi_{n,i}(x) \psi_{n,i}(y). \quad (5)$$

Здесь $\psi_{n,i} \in L_\infty^\#(Y)$, а $\chi_{n,i}(x)$ — характеристические функции измеримых множеств $\Omega_{n,i} \subset \Omega$ таких, что $\text{mes} \Omega_{n,i} < \infty$ и $\Omega_{n,i} \cap \Omega_{n,j} = \emptyset$ при $i \neq j$.

В силу теоремы Лузина [15] для каждой функции $\psi_{n,i}$ и всякого $\delta > 0$ существует замкнутое множество $F_{n,i}^\delta \subset Y$ такое, что $\text{mes}(Y \setminus F_{n,i}^\delta) < \delta/2^{n+i}$ и $\psi_{n,i} \in C(F_{n,i}^\delta)$. Введем замкнутое множество $F^\delta = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{i=1}^{m_n} F_{n,i}^\delta$. Пусть A^δ — это множество всех точек плотности множества F^δ , содержащихся в F^δ . Положим

$$Y_0 = \bigcup_{j=1}^\infty A^{1/j}, \quad Q = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} (Y_0 + k).$$

Заметим, что $\text{mes}(Y \setminus F^\delta) < \delta$ и, как следствие, $\text{mes}(Y \setminus Y_0) = 0$, $\text{mes}(\mathbb{R}^N \setminus Q) = 0$.

Пусть $x \in \Omega_0$. Так как $f_n(x, \cdot) \in C(F^{1/j})$, то из свойства (4) следует, что функция $f(x, \cdot)$ эквивалентна на $F^{1/j}$ некоторой функции $\tilde{f}(x, \cdot) \in C(F^{1/j})$. Таким образом, в каждой точке $y_0 \in A^{1/j}$ существует аппроксимативный предел

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \text{ap} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0, y \in F^{1/j}} \tilde{f}(x, y).$$

В силу принятого нами соглашения это означает, что все точки из Q являются точками аппроксимативной непрерывности функции $f(x, \cdot)$.

2. Пусть $\Omega_0^\varepsilon = \{x \in \Omega \mid x/\varepsilon \in Q\}$. Ясно, что множество Ω_0^ε измеримо, причем $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0^\varepsilon) = 0$. Ясно также, что функция

$$f_n^\varepsilon(x) \equiv f_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{1 \leq i \leq m_n} \chi_{n,i}(x) \psi_{n,i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

определена на Ω_0^ε и измерима. Для $x \in \Omega_0^\varepsilon$ справедлива также оценка (ср. с оценкой (2))

$$|f_n^\varepsilon(x) - f^\varepsilon(x)| = \left| \lim_{y \rightarrow x/\varepsilon} \text{ap} (f_n(x, y) - f(x, y)) \right| \leq \|f_n(x, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)}. \quad (6)$$

Из оценки (6) следует, что функция $f^\varepsilon(x)$ является поточечным пределом последовательности измеримых функций $f_n^\varepsilon(x)$; поэтому она измерима. Неравенство (3) верно для $x \in \Omega_0^\varepsilon$ в силу свойства (2) для $\varphi(\cdot) = f(x, \cdot)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_p(\Omega; L_\infty^\#(Y))$ для некоторого $p \in [1, \infty]$. Тогда $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$, причем

$$\|f^\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega; L_\infty^\#(Y))}. \quad (7)$$

Кроме того, $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ слабо в $L_p(\Omega)$ для $p \in [1, \infty)$ и $*$ -слабо в $L_\infty(\Omega)$ для $p = \infty$. В случае $p \in [1, \infty)$ выполнено также свойство (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 функция f^ε измерима. Неравенство (7) очевидным образом следует из оценки (3). Таким образом, $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\Omega f^\varepsilon \varphi \, dx = \int_\Omega \langle f \rangle \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L_{p'}(\Omega), \quad (8)$$

где $p' = p/(p-1)$. Модифицируем известным образом [17] последовательность простых функций (5) так, чтобы по-прежнему выполнялось свойство (4), но в то же время было выполнено неравенство

$$\|f(x, \cdot) - f_n(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)} \leq 3\|f(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)}.$$

При этом, без ограничения общности, множества $\Omega_{n,i}$ можно считать ограниченными. Применяя неравенство (6), приходим к оценке

$$\left| \int_\Omega f^\varepsilon \varphi \, dx - \int_\Omega \langle f \rangle \varphi \, dx \right| \leq \left| \int_\Omega f_n^\varepsilon \varphi \, dx - \int_\Omega \langle f_n \rangle \varphi \, dx \right| + 2\alpha_n, \quad (9)$$

где

$$\alpha_n = \int_\Omega \|f(x, \cdot) - f_n(x, \cdot)\|_{L_\infty^\#(Y)} |\varphi(x)| \, dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. В силу предложения 1 для функции $\psi_{n,i}^\varepsilon(x) \equiv \psi_{n,i}(x/\varepsilon)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_{n,i}} \psi_{n,i}^\varepsilon \varphi \, dx = \int_{\Omega_{n,i}} \langle \psi_{n,i} \rangle \varphi \, dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\Omega f_n^\varepsilon \varphi \, dx = \int_\Omega \langle f_n \rangle \varphi \, dx,$$

и из неравенства (9) вытекает оценка

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_\Omega f^\varepsilon \varphi \, dx - \int_\Omega \langle f \rangle \varphi \, dx \right| \leq 2\alpha_n.$$

Переходя в ней к пределу при $n \rightarrow \infty$, выводим свойство (8).

Покажем, что в случае $p \in [1, \infty)$ выполнено свойство (1). Положим $g = |f|^p$. Ясно, что $g \in L_1(\Omega; L_\infty^\#(Y))$ и

$$g^\varepsilon(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x/\varepsilon} \inf g(x, y) = \left| \lim_{y \rightarrow x/\varepsilon} \inf f(x, y) \right|^p = |f^\varepsilon(x)|^p$$

для $x \in \Omega_0^\varepsilon$.

Осталось заметить, что $g^\varepsilon \rightarrow \langle g \rangle$ слабо в $L_1(\Omega)$ в силу теоремы 2.

Автор выражает признательность профессору Ф. Мюра и профессору Г. Аллеру за стимулирующее обсуждение проблемы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 2. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York: Springer Verlag, 1980. 3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 4. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 5. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993. 6. Nguetseng G. // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623. 7. E W. // Comm. Pure Appl. Math. 1992. V. 45. P. 301–326. 8. Allaire G. // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518. 9. Valadier M. Admissible functions and two-scale convergence. Prépubl. France: Départ. de Math., Université de Montpellier, 1995. 10. Suquet P. Plasticité et homogénéisation. Thèse de Doctorat d'État. Paris: 1982. 11. Dacorogna B. Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals. Lecture Notes in Math. V. 922. New York: Springer Verlag, 1982. 12. Ball J., Murat F. // J. Funct. Anal. 1984. V. 58. P. 225–253. 13. Амосов А. А., Злотник А. А. // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 3. С. 295–299. 14. Амосов А. А., Злотник А. А. // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 2. С. 87–110. 15. Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949. 16. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 17. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Московский энергетический институт
E-mail: amosov@srv-m.mpei.ac.ru

Поступило
05.05.96