Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Добровольский, Р. К. Романовский, Метод функций
Ляпунова для почти периодических систем, *Матем. за-
метки*, 1997, том 62, выпуск 1, 151–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:12:23

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. М. Добровольский, Р. К. Романовский

Для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен следующий результат, усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для того чтобы нулевое положение равновесия было асимптотически устойчиво достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция Ляпунова $v(x)$ такая, что $\dot{v} \leq 0$, и при этом поверхности уровня $v = \text{const} > 0$ не содержат целых траекторий (см. [1]). В настоящей работе показано, что этот результат распространяется (с естественным видоизменением в формулировке) на неавтономные системы в предположении, что правая часть системы, функция Ляпунова $v(x, t)$ и ее частные производные первого порядка почти периодичны по t .

Ранее в работе [2] было показано, что в частном случае, когда почти периодическая система линейна и $v = \langle G(t)x, x \rangle$ с почти периодическими $G, \dot{G}$, формулируемое ниже условие достаточно для экспоненциальной устойчивости (здесь и далее $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Будем предполагать

- 1) $f \in C(\mathbb{R}^{N+1})$ и удовлетворяет условию Липшица по x ;
- 2) f почти периодическая по t равномерно по x на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$;
- 3) $f(0, t) = 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть для системы (1) со свойствами 1)–3) существует функция $v(x, t) \in C^1(B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, где $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < r\}$, $0 < r \leq \infty$, такая, что

- 1°) v, v'_x, v'_t почти периодические по t равномерно по x на компактах $K \subset B$;
- 2°) v положительно определена;
- 3°) $\dot{v} \leq 0$;
- 4°) не существует ненулевых траекторий $x(t)$ системы (1), целиком (при $t \in \mathbb{R}$) лежащих в каком-либо шаре $B(\rho) = \{|x| \leq \rho < r\}$ и удовлетворяющих при всех t условию $\dot{v}(x(t), t) = 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Заметим, что в случае $f \in C^1(\mathbb{R}^{N+1})$, $v \in C^2(B \times \mathbb{R})$ для выполнения условия 4°) достаточно, чтобы

$$\dot{v}_t + \langle \dot{v}_x, f \rangle \neq 0, \quad (x, t) \in \Sigma,$$

где Σ – поверхность $\dot{v}(x, t) = 0$ в $B \times \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. i) Рассмотрим H -класс системы (1): множество систем

$$\dot{x} = g(x, t), \quad g \in H(f), \quad (2)$$

где $H(f)$ – замыкание множества сдвигов $f(x, t + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, в равномерной на множествах $K \times \mathbb{R}$ метрике. Нетрудно убедиться, что для функций из $H(f)$ сохраняются

свойства 1)–3) функции f с той же константой Липшица; если $g \in H(f)$, то $f \in H(g)$. Аналогично построим класс $H(v)$. Будем кратко писать $(g, w) \in H(f, v)$, если

$$g(x, t) = \lim f(x, t + \tau_n), \quad w = \lim v(x, t + \tau_n) \quad (3)$$

для одной и той же последовательности $\tau_n \in \mathbb{R}$.

Далее будем пользоваться легко доказываемым с помощью леммы Гронуола утверждением: если $g_n \in H(f)$, $g_n \rightarrow g$ равномерно на множествах $K \times \mathbb{R}$ и $x_n(t)$, $x(t)$ – решения систем $\dot{x} = g_n$, $\dot{x} = g$ такие, что $x_n(t_0) \rightarrow x(t_0)$ при каком-либо t_0 , то $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Покажем, что

- а) для $w \in H(v)$ сохраняются свойства 1°), 2°), при этом функции w “равномерно” положительно определены: $w \geq V$ для некоторой $V(x) > 0$ из $C(B)$;
- б) для функций

$$\dot{w}(g; x, t) = w'_t + \langle w'_x, g \rangle, \quad (g, w) \in H(f, v), \quad (4)$$

сохраняются свойства 3°), 4°), в частности, не существует траекторий $y(t)$ системы (2), лежащих в каком-либо шаре $B(\rho)$ и удовлетворяющих условиям

$$y(t) \neq 0, \quad \dot{w}(g; y(t), t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

В случае, если g, w – сдвиги f, v с одним и тем же τ , утверждения а), б) очевидны. Пусть имеет место случай (3). Из свойства 1°) с учетом замкнутости оператора дифференцирования в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций с равномерной нормой вытекает, что каждая из последовательностей $v'_x(x, t + \tau_n)$, $v'_t(x, t + \tau_n)$ имеет единственную “предельную точку”, равную соответственно w'_x , w'_t . Отсюда следует справедливость утверждения а), где $V(x)$ – миноранта для $v(x, t)$, и неравенство $\dot{w} \leq 0$ для функции (4). Докажем утверждение б). Пусть для некоторой пары $(g, w) \in H(f, g)$ существует траектория системы (2), лежащая целиком в некотором шаре $B(\rho)$ и удовлетворяющая (5). Так как с учетом утверждения а) $(f, v) \in H(g, w)$, то существует последовательность τ_n такая, что

$$f = \lim g(x, t + \tau_n), \quad v = \lim w(x, t + \tau_n), \quad y(\tau_n) \rightarrow y_0 \in B(\rho).$$

Пусть $x(t)$ – решение системы (1), $x(0) = y_0$. Так как функция $x_n(t) = y(t + \tau_n)$ – решение системы $\dot{x} = g(x, t + \tau_n)$ и $x_n(0) \rightarrow y_0$, то $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при всех t , откуда, в частности, следует $x(t) \in B(\rho)$ при всех t . Далее имеем

$$v(x(t), t) = \alpha_n(t) + \beta_n(t) + \gamma_n(t), \quad (6)$$

где

$$\alpha_n = w(x_n(t), t + \tau_n), \quad \beta_n = v(x(t), t) - w(x(t), t + \tau_n), \quad \gamma_n = w(x(t), t + \tau_n) - \alpha_n.$$

В силу предположения (5) $w(y(t), t) = w_0 = \text{const} > 0$, поэтому $\alpha_n = w_0$ при всех n . Так как при $n \rightarrow \infty$ $\beta_n \rightarrow 0$ и с учетом ограниченности w'_x на множестве $B(\rho) \times \mathbb{R}$ $\gamma_n \rightarrow 0$, то из (6) следует $v(x(t), t) = w_0$ при всех t , что противоречит условию 4°).

ii) В силу условий 2°), 3°) решение $x = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0, r)$, число $\Delta \in (0, \rho)$ таково, что траектории $x(t)$ системы (1), начинающиеся при $t = t_0$ в шаре $B(\Delta)$, остаются при $t > t_0$ в шаре $B(\rho)$. Покажем, что для таких траекторий $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. В противном случае для некоторого t_0 существуют решение $x(t)$ системы (1) и последовательность $\tau_n \uparrow +\infty$ такие, что

$$x(t_0) \in B(\Delta), \quad x(t_0 + \tau_n) \rightarrow x_0 \neq 0, \quad x_0 \in B(\rho),$$

и при этом существуют пределы (3). Согласно 2°) и 3°) последовательность $v(x(t_0 + \tau_n), t_0 + \tau_n)$ не возрастает и ограничена снизу числом $V(x_0) > 0$, поэтому имеет предел $v_0 > 0$, откуда ввиду 2°)

$$\lim v(x(t), t) = v_0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Обозначим через $y(t)$ решение системы (2) с правой частью (3), удовлетворяющее условию $y(t_0) = x_0$. Аналогично пункту i) получим

$$y(t) = \lim x(t + \tau_n), \quad \tau_n \uparrow +\infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Так как $x(t + \tau_n) \in B(\rho)$ при $t \geq t_0 - \tau_n$, то траектория $y(t)$ целиком лежит в $B(\rho)$. Далее, переходя в равенстве

$$w(y(t), t) = a_n(t) + b_n(t) + c_n(t),$$

где w – функция Ляпунова (3),

$$a_n = v(x(t + \tau_n), t + \tau_n), \quad b_n = w(y(t), t) - v(y(t), t + \tau_n), \quad c_n = (y(t), t + \tau_n) - a_n,$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом (7), (8) аналогично пункту i) получим $w(y(t), t) = v_0 = \text{const} > 0$, что противоречит утверждению б) пункта i). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 2. Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 6. С. 10–14.

Омский государственный технический университет

Поступило
03.06.95