Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, О нулях преобразований Лапласа, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 883–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:40:05

УДК 517.5

О НУЛЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

А. М. Седлецкий

Пусть функция f положительна, не убывает и интегрируема в интервале $(0, 1)$. Тогда по теореме Пойа все нули преобразования Лапласа

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt$$

лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. В статье предполагается выполненным дополнительное условие логарифмической выпуклости f в левой окрестности точки 1. Найден вид (левой) криволинейной полуплоскости, а при условии $f(+0) > 0$ – вид криволинейной полосы, содержащей все нули $F(z)$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Рассматриваем преобразования Лапласа интегрируемых функций, сосредоточенных в конечном интервале, в качестве которого без ограничения общности берем интервал $(0, 1)$. Итак, пусть

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt, \quad f \in L^1(0, 1). \quad (1)$$

Такие (очевидно, целые) функции часто встречаются в различных разделах анализа, например, в спектральной теории, в теории дифференциально-разностных уравнений, при исследовании негармонических рядов Фурье и т.д. Большой интерес вызывает вопрос о распределении нулей функций (1); он изучался в работах Харди [1], Пойа [2], Титчмарша [3], Картрайт [4], [5] и др. Для нас отправной точкой послужила следующая

ТЕОРЕМА А [2]. Пусть функция f интегрируема, положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции $F(z)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$; если при этом f не является ступенчатой функцией вида

$$f(t) = c_i, \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n; \quad t_0 = 0, \quad t_{n+1} = 1, \quad 0 < c_i < c_{i+1},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00698, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-680.2003.1.

где числа t_i рациональны, то все нули функции $F(z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

В классе функций f , удовлетворяющих условиям теоремы А, мы выделяем достаточно широкий подкласс и для него доказываем более подробные утверждения о распределении нулей функций (1), а именно, утверждения о принадлежности всех нулей функций (1) вполне определенным собственным подмножествам множества $\operatorname{Re} z < 0$. Дополнительное условие, задающее упомянутый подкласс, состоит в том, что функция f логарифмически выпукла в некоторой левой окрестности точки 1. Для этого подкласса найден вид (левой) криволинейной полуплоскости, а при условии $f(+0) > 0$ – вид криволинейной полосы, содержащей все нули функции (1). В обоих случаях описание множества, содержащего нули, в известном смысле является точным. Кроме того, в статье доказано, что если f логарифмически выпукла на всем интервале $(0, 1)$, то независимо от монотонности f , все нули функции $F(z)$ лежат на объединении горизонтальных полос $(2n - 1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Леммы. Функцию f , положительную в интервале (a, b) , называют *логарифмически выпуклой* в этом интервале, если функция $\log f$ выпукла в (a, b) . Для дважды дифференцируемой положительной функции ее логарифмическая выпуклость в (a, b) равносильна условию $(f')^2 \leq f f''$ всюду в (a, b) [6]. В общем случае критерий логарифмической выпуклости дает

ЛЕММА 1. Пусть функция f положительна в интервале (a, b) . Тогда для ее логарифмической выпуклости в этом интервале необходимо и достаточно, чтобы функция

$$f_x(t) := e^{xt} f(t)$$

была выпуклой в (a, b) при всех $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в необходимой, так и в достаточной частях леммы мы имеем дело с непрерывными функциями f , $\log f$. Будем пользоваться тем, что для функции $\varphi \in C(a, b)$ выпуклость φ в (a, b) равносильна условию

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2)}{2} \quad (2)$$

для всех точек $t_1, t_2 \in (a, b)$ [6]. Тогда логарифмическая выпуклость функции f в (a, b) равносильна условию

$$f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(t_1)f(t_2)} \quad (3)$$

для всех $t_1, t_2 \in (a, b)$.

Пусть функция f логарифмически выпукла в (a, b) . Тогда верно (3). Умножая (3) почленно на $\exp(x(t_1 + t_2)/2)$, получаем

$$f_x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \sqrt{f_x(t_1)f_x(t_2)}.$$

Теперь применение к правой части неравенства Коши дает для $\varphi = f_x$ свойство (2), означающее выпуклость функции f_x .

Пусть функция f_x выпукла в (a, b) . Тогда для $\varphi = f_x$ верно неравенство (2), которое записывается в виде

$$f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(e^{x(t_1 - t_2)/2} f(t_1) + e^{x(t_2 - t_1)/2} f(t_2)). \quad (4)$$

По условию при фиксированных t_1, t_2 это неравенство выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$, а в частности, и для значения x , при котором достигается минимум правой части. Дифференцированием находим, что для этого значения x слагаемые в правой части (4) совпадают. Но тогда их полусумма равна их среднему геометрическому, и мы получаем свойство (3), означающее логарифмическую выпуклость f . Лемма доказана.

ЛЕММА 2 [7]. Если функция φ интегрируема и выпукла в интервале $(0, 2\pi)$ (соответственно в интервале $(\pi/2, 5\pi/2)$), то

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos t \, dt \geq 0 \quad \left(\text{соответственно} \quad \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \varphi(t) \sin t \, dt \geq 0 \right).$$

Всюду в дальнейшем $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$. Обозначим

$$\Phi_u(z) = \int_u^1 e^{-zt} g(t) \, dt. \quad (5)$$

ЛЕММА 3. Пусть функция g имеет ограниченную вариацию на $[a_0, 1]$, $0 \leq a_0 < 1$, причем $g(1 - 0) \neq 0$. Тогда при любом фиксированном $b_0 \in (a_0, 1)$ для $u \in [a_0, b_0]$ верна оценка

$$|\Phi_u(z)| \geq C \frac{e^{-x}}{r} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (6)$$

где $C > 0$ от $u \in [a_0, b_0]$ не зависит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $g(1) = g(1 - 0)$; по условию $g(1) \neq 0$. Пользуясь непрерывностью g в точке 1 слева, фиксируем $\delta \in (0, 1 - b_0)$ столь малым, чтобы

$$\operatorname{var}(g(t); 1 - \delta \leq t \leq 1) \leq \frac{|g(1)|}{2}. \quad (7)$$

Интегрируем по частям

$$\Phi_u(z) = -\frac{1}{z} \left(e^{-z} g(1) - e^{-zu} g(u) - \int_u^1 e^{-zt} dg(t) \right). \quad (8)$$

Последний интеграл разобьем на слагаемые K_1 и K_2 , отвечающие соответственно отрезкам $[u, 1 - \delta]$ и $[1 - \delta, 1]$. При $x \leq 0$ с учетом (7) для них получаем оценки

$$|K_1| \leq V e^{-(1-\delta)x}, \quad |K_2| \leq \frac{|g(1)|}{2} e^{-x},$$

которые вместе с неравенством треугольника, примененным к (8), дают неравенство

$$|\Phi_u(z)| \geq \frac{|g(1)|}{2} \frac{e^{-x}}{r} (1 - M e^{(1-b_0)x} - V e^{\delta x}), \quad x \leq 0,$$

означающее справедливость леммы 3.

3. Правая граница для нулей.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия теоремы А, и пусть, кроме того, функция f логарифмически выпукла на некотором интервале $(1-a, 1)$, $0 < a \leq 1$. Тогда все нули функции (1) с достаточно большим модулем мнимой части лежат на множестве

$$x \leq -\log \left(y^2 \cdot \int_0^{\pi/(2|y|)} t f(1-t) dt \right) + C, \quad |y| > y_0,$$

где C — некоторая постоянная.

Заметим, что содержательность теоремы 1 (в сравнении с теоремой А) проявляется в случае $f(1-0) = +\infty$, когда

$$y^2 \int_0^{\pi/(2y)} t f(1-t) dt > \frac{\pi^2}{8} f\left(1 - \frac{\pi}{2y}\right) \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, то достаточно рассмотреть $y > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} e^{-z} F(z) &= \int_0^1 e^{-zt} f(1-t) dt =: G(z), \\ V(z) &:= -\operatorname{Im} G(z) = \int_0^1 e^{-xt} f(1-t) \sin yt dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Оценим снизу $|V(z)|$ при достаточно больших y и при $x < 0$ (напомним, что по теореме А при $x \geq 0$ нулей у $F(z)$ нет). Обозначим

$$N = N(y) := \max \left(n \in \mathbb{N}: \frac{\pi}{2y} + \frac{2\pi n}{y} \leq a \right), \quad a_N := \frac{\pi}{2y} + \frac{2\pi N}{y}$$

и заметим, что $a_N \leq a$. Кроме того, так как $\pi/(2y) + 2\pi(N+1)/y > a$, то $a_N > a - 2\pi/y$, и потому

$$\frac{a}{2} < a_N \leq a \quad (11)$$

при достаточно больших y . Пусть

$$V(z) = \left(\int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{a_N} + \int_{a_N}^1 \right) e^{-xt} f(1-t) \sin yt dt =: V_1 + V_2 + V_3.$$

Так как $x < 0$, то

$$V_1 > \frac{2}{\pi} y \int_0^{\pi/(2y)} t f(1-t) dt.$$

Далее, по условию функция $f(1-t)$ логарифмически выпукла на $(0, a)$. По лемме 1 функция $e^{-xt} f(1-t)$ выпукла на $(0, a)$, и значит, по лемме 2 $V_2 \geq 0$. А так как

$$\begin{aligned} V_3 &= -\operatorname{Im} \int_{a_N}^1 e^{-zt} f(1-t) dt = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \int_{a_N}^1 f(1-t) de^{-zt} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \left(f(+0) - f(1-a_N) e^{-za_N} - \int_{a_N}^1 e^{-zt} df(1-t) \right) \right), \end{aligned}$$

то с учетом (11) при $x < 0$ имеем

$$|V_3| \leq A \frac{e^{-x}}{r} \leq A \frac{e^{-x}}{y}, \quad A = 3f \left(1 - \frac{a}{2} \right).$$

У функции $G(z)$, а значит, и у функции $F(z)$, нет нулей там, где $V_1 + V_2 > |V_3|$. Поэтому из полученных оценок для V_i , $i = 1, 2, 3$, следует, что у $F(z)$ нет нулей там, где

$$\frac{2}{\pi} y \int_0^{\pi/(2y)} t f(1-t) dt > \frac{A}{y} e^{-x}, \quad y > y_0 > 0.$$

Логарифмируя, получаем утверждение теоремы 1.

Из теоремы 1 и из содержащегося в (9) неравенства с учетом теоремы А вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда все нули функции $F(z)$ лежат на объединении множества

$$x \leq \min \left(0, -\log f \left(1 - \frac{\pi}{2|y|} \right) + C \right), \quad |y| > \frac{\pi}{2},$$

где C – некоторая постоянная, с полуполосой $x < 0$, $|y| \leq \pi/2$.

Обозначим через

$$(z_n)_1^\infty \quad (\text{где } \forall n \quad |z_{n+1}| \geq |z_n|)$$

последовательность всех нулей функции $F(z)$ (хорошо известно, см., например, [8], что функция (1) имеет бесконечное множество нулей). Заинтересуемся условиями на f , при которых

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В статье [9] доказано, что в условиях теоремы А все нули функции $F(z)$ лежат в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq h > -\infty$ (т.е. в вертикальной полосе $h \leq \operatorname{Re} z \leq 0$) тогда и только тогда, когда $0 < f(+0) \leq f(1-0) < +\infty$. Таким образом, для справедливости соотношения (12) необходимо выполнение хотя бы одного из условий $f(+0) = 0$, $f(1-0) = +\infty$. Из следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда если $f(1-0) = +\infty$, то для нулей функции $F(z)$ выполняется соотношение (12).

4. Левая граница для нулей. Она зависит от поведения функции f в окрестности точки 0. Мы примем условие $f(+0) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $f(+0) > 0$. Тогда найдутся постоянные $C \in \mathbb{R}$, $H, y_0 > 0$ такие, что все нули функции $F(z)$ лежат на объединении множества

$$x \geq -\log \left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t) dt \right) + C, \quad |y| > y_0$$

с множеством $x \geq -H$, $|y| \leq y_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(z)$ и a_N – те же, что в доказательстве теоремы 1. Достаточно рассматривать $y \geq 0$. Сначала покажем, что в любом секторе $\cos \theta \leq -\delta < 0$ содержится не более конечного числа нулей функции $G(z)$. Для этого обозначим через J_1, J_2 слагаемые в интеграле (10), отвечающие интервалам $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$ соответственно. Тогда

$$|J_1| \leq e^{-x/2} \|f\|_1, \quad x \leq 0,$$

а так как $J_2 = \Phi_{1/2}$ в обозначении (5), то для J_2 по лемме 3 (с $g(t) = f(1-t)$) верна оценка (6). Значит, если H достаточно велико, то по неравенству треугольника для $x \leq -H < 0$ получаем оценку

$$|G(z)| \geq C_1 \frac{e^{-x}}{r} - C_2 e^{-x/2} \geq \frac{C_1}{r} e^{-x} (1 - C_3 r e^{x/2}).$$

Последняя скобка положительна, если $\cos \theta \leq -\delta < 0$, а r достаточно велико, и промежуточное утверждение, касающееся сектора, доказано.

Таким образом, для отыскания левой границы для нулей можно рассматривать только множество

$$x < -H, \quad y > \frac{r}{2}, \quad (13)$$

где H достаточно велико. Можно считать, что $a < 1$. Положим

$$G(z) = \left(\int_0^{a_N} + \int_{a_N}^1 \right) e^{-zt} f(1-t) dt =: G_1(z) + G_2(z).$$

С учетом (11) по лемме 3 имеем оценку (6) для $\Phi_{a_N}(z) = G_2(z)$. Значит, на множестве (13) при достаточно большом H верна оценка

$$|G_2(z)| \geq B \frac{e^{-x}}{y}, \quad B > 0. \quad (14)$$

Пусть теперь $G_1 = U - iV$, где

$$U = \int_0^{a_N} e^{-xt} f(1-t) \cos yt \, dt, \quad V = \int_0^{a_N} e^{-xt} f(1-t) \sin yt \, dt.$$

Запишем

$$V = \int_0^{\pi/y} + \int_{\pi/y}^{3\pi/(2y)} + \int_{3\pi/(2y)}^{a_N - \pi/y} + \int_{a_N - \pi/y}^{a_N} =: V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

Тогда $V_2 < 0$ в силу отрицательности $\sin yt$, а последовательное применение лемм 1, 2 дает неравенство $V_3 \leq 0$. Благодаря невозрастанию функции $f(1-t)$ и тому, что $-x/y \leq M_1 < +\infty$ на множестве (13), имеем

$$0 < V_1 < 2e^{-\pi x/y} \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) \, dt < C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) \, dt.$$

Далее, учитывая (11) и монотонность f , а также обозначая $I_N = (a_N - \pi/y, a_N)$ и $C_1 = 3f(1 - a/2)$, при $y > y_0$ получаем

$$\begin{aligned} |V_4| &= \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \int_{I_N} f(1-t) de^{-zt} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \left| f(1-a_N)e^{-za_N} - f\left(1-a_N + \frac{\pi}{y}\right)e^{-z(a_N - \pi/y)} - \int_{I_N} e^{-zt} df(1-t) \right| \\ &< C_1 \frac{e^{-ax}}{y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Но

$$V = \int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{a_N} > 0, \quad (16)$$

так как в первом слагаемом подынтегральная функция положительна, а ко второму, благодаря лемме 1, применима лемма 2. И так как $V_2, V_3 \leq 0$, то

$$0 < V = (V_1 + V_4) + (V_2 + V_3) \leq V_1 + V_4 \leq V_1 + |V_4|,$$

т.е.

$$|V| \leq C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt + C_1 \frac{e^{-ax}}{y}. \quad (17)$$

Аналогично поступаем с функцией U . Записываем

$$U = \int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{\pi/y} + \int_{\pi/y}^{a_N - 3\pi/(2y)} + \int_{a_N - 3\pi/(2y)}^{a_N} =: U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

и замечаем, что $U_2 < 0$ в силу отрицательности $\cos yt$, а $U_3 \leq 0$ по леммам 1, 2. Далее, на множестве (13)

$$0 < U_1 < e^{-\pi x/(2y)} \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt < C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt,$$

а для $|U_4|$ верна оценка типа (15), т.е. $|U_4| \leq C_1 e^{-ax}/y$. Подобно (16), верно неравенство

$$U = \int_0^{a_N - \pi/(2y)} + \int_{a_N - \pi/(2y)}^{a_N} > 0,$$

и значит, для $|U|$ мы получаем оценку (17).

Теперь вспоминая, что $G = U - iV + G_2$, с помощью оценок (14) и (17) (последняя верна и для $|U|$), находим

$$|G(z)| \geq B \frac{e^{-x}}{y} - C_2 \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt - C_3 \frac{e^{-ax}}{y}. \quad (18)$$

Если H достаточно велико, то $(B/2)e^{-x} > C_3 e^{-ax}$ при $x < -H$, и из (18) следует, что у $G(z)$, а значит, и у $F(z)$, нет нулей на множестве

$$\frac{B}{2} e^{-x} > C_2 y \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt, \quad y > y_0.$$

Теорема 2 доказана.

С учетом теоремы А теоремы 1, 2 дают

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда найдутся постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $H, y_0 > 0$ такие, что все нули функции $F(z)$ лежат в криволинейной полосе, являющейся объединением множества

$$-\log\left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t) dt\right) + C_1 \leq x \leq -\log\left(y^2 \int_0^{\pi/(2|y|)} t f(1-t) dt\right) + C_2 < 0, \quad (19)$$

где $|y| > y_0$, с множеством $-H \leq x < 0$, $|y| \leq y_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Благодаря следствию 1, множество (19) в следствии 3 может быть заменено множеством

$$-\log\left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t) dt\right) + C_1 \leq x \leq -\log f\left(1 - \frac{\pi}{2|y|}\right) + C_2 < 0.$$

5. Случай правильного изменения функции f . Для функции f , правильно меняющейся в окрестности точки 1, асимптотика входящих в (19) интегралов вычисляется, что дает возможность упростить вид множества (19).

Приводимые ниже определения и факты взяты из [10].

Функция g , положительная и измеримая в правой окрестности точки 0, называется *правильно меняющейся функцией* (п.м.ф.) порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, если для всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(\lambda t)}{g(t)} = \lambda^\alpha. \quad (20)$$

П.м.ф. порядка $\alpha = 0$ называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.). П.м.ф. порядка α имеет вид $g(t) = t^\alpha l(t)$, где $l(t)$ – м.м.ф. Для любой м.м.ф. $l(t)$ найдется эквивалентная ей при $t \rightarrow +0$, непрерывно дифференцируемая функция $l_0(t)$ с условием

$$l'_0(t) = o\left(\frac{l_0(t)}{t}\right), \quad t \rightarrow +0. \quad (21)$$

Обозначим

$$g_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon g(t) dt, \quad g_2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon t g(t) dt.$$

ЛЕММА 4. Пусть функция g интегрируема на $(0, 1)$ и является п.м.ф. порядка $\alpha > -1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$g_1(\varepsilon) \sim \frac{1}{1+\alpha} g(\varepsilon), \quad g_2(\varepsilon) \sim \frac{1}{2+\alpha} g(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $g(t) = t^\alpha l(t)$, где $l(t)$ – м.м.ф. Так как замена функции g на ей эквивалентную при $t \rightarrow +0$ не повлияет на асимптотику функций g_1, g_2 , то мы можем считать, что для $l(t)$ выполнено свойство (21). По правилу Лопиталя

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{g_1(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha} l(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon t^\alpha l(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon^\alpha l(\varepsilon)}{(1+\alpha)\varepsilon^\alpha l(\varepsilon) + \varepsilon^{1+\alpha} l'(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{1+\alpha + (\varepsilon l'(\varepsilon)/l(\varepsilon))}, \end{aligned} \quad (22)$$

откуда с учетом свойства (21) следует требуемая асимптотика для g_1 . При замене g_1 на g_2 в (22) α заменяется на $\alpha + 1$, и все повторяется. Лемма доказана.

Вернемся к следствию 3. Выражения под знаками логарифмов в (19) пропорциональны соответственно $g_1(\varepsilon)$ и $g_2(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \pi/(2|y|)$, а $g(t) = f(1-t)$. Поэтому с помощью леммы 4 и соотношения (20) из следствия 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть, кроме того, функция $f(1-t)$ является правильно меняющейся функцией порядка $\alpha \in (-1, 0)$. Тогда все нули функции $F(z)$ лежат в криволинейной полосе, являющейся объединением множества $-H \leq x < 0$, $|y| \leq y_0$ с множеством

$$\left| x + \log f\left(1 - \frac{1}{|y|}\right) \right| \leq C, \quad |y| > y_0.$$

Пример функции $f(1-t) = 1/(t \log^2 t)$, когда $g_1(\varepsilon) = 1/(\varepsilon |\log \varepsilon|)$, показывает, что при $\alpha = -1$ функции g_1 и g_2 уже не являются асимптотически пропорциональными, и в этом случае мы вынуждены довольствоваться замечанием 1.

6. Распределение нулей в горизонтальных полосах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция f интегрируема и логарифмически выпукла в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции (1) лежат на объединении горизонтальных полос

$$(2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$G(z) = e^{-z} F(z) = \int_0^1 e^{-zt} f(1-t) dt =: U(z) - iV(z).$$

Достаточно показать, что у функции $G(z)$ нет нулей в полосах

$$2\pi n \leq y \leq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть сначала

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \leq y \leq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (23)$$

Если $n = 0$, то $\sin yt > 0$ при $0 < t < 1$, и так как $f > 0$, то $V > 0$. Если $n \geq 1$, то, подразумевая $e^{-xt} f(1-t) \sin yt$ в качестве подынтегральной функции, запишем

$$V(z) = \int_0^{\pi/(2y)} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\pi(1/2+2k)/y}^{\pi(5/2+2k)/y} + \int_1^{\pi(1/2+2n)/y} =: I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} V_k + I_2.$$

Как в I_1 , так и в I_2 , имеем $\sin yt > 0$; для I_1 это очевидно, а если рассматривается I_2 , то $\pi(1/2 + 2n)/y < t < 1$, и значит, $\pi/2 + 2\pi n < yt < y \leq (2n+1)\pi$ (мы учли правое неравенство (23)). Следовательно, $I_1 + I_2 > 0$. А последовательное применение лемм 1 и 2 дает неравенство $V_k \geq 0$. Значит, $V > 0$ на множестве (23), и на этом множестве нет нулей $G(z)$.

Остается рассмотреть полосы

$$2\pi n \leq y < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (24)$$

Здесь аналогичную работу проделываем уже с функцией $U(z)$. Если $n = 0$, то $\cos yt > 0$ для $0 < t < 1$, и поэтому $U > 0$. При $n \geq 1$ запишем

$$U(z) = \sum_{k=1}^n \int_{2\pi(k-1)/y}^{2\pi k/y} + \int_{2\pi n/y}^1 =: \sum_{k=1}^n U_k + J$$

с подынтегральной функцией $e^{-xt} f(1-t) \cos yt$. Снова $U_k \geq 0$ по леммам 1 и 2, а $J > 0$ из-за положительности подынтегральной функции: действительно, если $2\pi n/y < t < 1$, то в силу правого неравенства (24) имеем $2\pi n < yt < y \leq \pi/2 + 2\pi n$. Значит, $U > 0$ на множестве (24), и на этом множестве у $G(z)$ нулей также нет. Теорема 3 доказана.

Из теорем А и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функция f интегрируема, не убывает и логарифмически выпукла в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции (1) лежат на объединении полуплос

$$\operatorname{Re} z < 0, \quad (2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В качестве примера рассмотрим функцию типа Миттаг-Леффлера порядка единица

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{\mu-2} dt, \quad \mu > 1.$$

(см. [11]). При $1 < \mu < 2$ для функции $f(t) = (1-t)^{\mu-2}$ выполняются условия теоремы 3. Известно [12], что при $1 < \mu < 2$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \mu - 2$. Отсюда и из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6. При $1 < \mu < 2$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат на объединении полуплос

$$\operatorname{Re} z < \mu - 2, \quad (2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H. On the zeroes of certain classes of integral Taylor series II // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1905. V. 2. P. 401–431.
- [2] Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Z. 1918. V. 2. P. 352–383.
- [3] Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1926. V. 25. P. 283–302.
- [4] Cartwright M. The zeros of certain integral functions // Quart. J. Math. 1930. V. 1. P. 38–59.
- [5] Cartwright M. The zeros of certain integral functions (II) // Quart. J. Math. 1931. V. 2. P. 113–129.
- [6] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Поля Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [7] Харди Г. Г., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1959.
- [8] Левин Б. Я. Целые функции (курс лекций). М.: МГУ, 1971.
- [9] Sedletsii A. M. On zeros of Laplace transforms of finite measure // Integral Transforms and Special Functions. 1993. V. 1. P. 51–59.
- [10] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [11] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [12] Седлецкий А. М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 710–724.