Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Клячин, Новые примеры трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:54:31

НОВЫЕ ПРИМЕРЫ ТРУБЧАТЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

В. А. Клячин

1. Пусть M – p -мерное связное некомпактное C^2 -гладкое многообразие. Рассмотрим поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$, заданную C^2 -погружением $u: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $2 \leq p \leq n$.

Поверхность $\mathcal{M}$ называется *минимальной*, если ее вектор средней кривизны H тождественно равен нулю.

Пусть M – многообразие без края. Поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ будем называть *трубчатой с проекцией* (α, β) на направление, задаваемое вектором $e \in \mathbb{R}^{n+1}$, если множества

$$\Sigma(t) = \{m \in M : \langle u(m), e \rangle = t\}, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

непусты, а всякая порция $u(M)$, заключенная между $\Sigma(t_1)$ и $\Sigma(t_2)$, предкомпактна.

Для произвольного $p \geq 2$ полагаем

$$\Phi_p(t) = \int_1^t (y^{2(p-1)} - 1)^{-1/2} dy, \quad t \geq 1.$$

Заметим, что $\varphi_p = \Phi_p(+\infty) < +\infty$ при всех $p \geq 3$.

Простейшими примерами трубчатых минимальных поверхностей служат гиперповерхности вращения в $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемые уравнением

$$\lambda |\langle x, e \rangle| = \Phi_p(\lambda \sqrt{|x|^2 - \langle x, e \rangle^2}), \quad (1)$$

где $\lambda > 0$ – постоянная.

В работе [1] изучались свойства трубчатых минимальных гиперповерхностей. В частности, было доказано, что такие поверхности в случае $\dim \mathcal{M} > 2$ расположены в слое между двумя параллельными гиперплоскостями, и дана точная оценка расстояния между ними. Поясним последнее. Компактность сечений $\Sigma(t)$ позволяет ввести на (α, β) функцию

$$\rho(t) = \max_{m \in \Sigma(t)} (|u(m)|^2 - t^2)^{1/2}.$$

Обозначим через ρ_0 величину $\inf_{(\alpha, \beta)} \rho(t)$. В [1] доказана оценка

$$\beta - \alpha \leq 2\rho_0 \varphi_n \quad (2)$$

для трубчатых минимальных гиперповерхностей $\dim \mathcal{M} \geq 3$. Там же доказано, что если в (2) имеет место равенство, то $\mathcal{M}$ есть поверхность вращения вида (1) с $\lambda = 1/\rho_0$.

Случай поверхностей $\text{codim } \mathcal{M} > 1$ рассматривался в [2], [3]. В [2] было доказано, что минимальные трубчатые поверхности размерности $p \geq 3$ также расположены в слое между двумя параллельными гиперплоскостями, а в [3] дана точная оценка расстояния

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-176.

между ними. Другими словами, в [3] получено неравенство, аналогичное неравенству в [1]:

$$\beta - \alpha \leq 2\rho_0\varphi_p. \quad (3)$$

Однако, остался открытым вопрос: существуют ли трубчатые минимальные поверхности $\text{codim } \mathcal{M} > 1$, отличные от поверхностей вида (1), для которых в (3) имеет место равенство? Целью настоящей работы и является построение таких примеров.

Следует отметить также, что трубчатые минимальные поверхности с нетривиальными группами симметрий изучались в [4].

2. Пусть $\{e_i\}_{i=0}^n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $x_0, x_1, \dots, x_n$ – соответствующие координаты. Через S^{n-1} мы обозначим сферу радиуса 1

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Рассмотрим $(p-1)$ -мерную поверхность, лежащую на S^{n-1} и заданную C^2 -погружением $R: F \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактного многообразия F .

Зафиксируем произвольный интервал (α, β) и C^2 -функцию $r(t)$, определенную на (α, β) . Тогда можно построить p -мерную поверхность $\mathcal{M}$, заданную C^2 -погружением $u: F \times (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ таким образом, что если $y \in F, t \in (\alpha, \beta)$, то

$$u(y, t) = r(t)R(y) + te_0. \quad (4)$$

Основной результат заметки составляет

ТЕОРЕМА. *Поверхность $\mathcal{M}$ вида (4) является минимальной трубкой с проекцией (α, β) в том и только том случае, когда $R: F \rightarrow S^{n-1}$ – минимальное погружение в сферу, а функция $r(t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$r''(t)r(t) = (p-1)(1+r'^2(t)). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего ясно, что для поверхностей вида (4) сечения $\Sigma(t)$ лежат на $(n-1)$ -мерных сферах $S(t)$ радиуса $r(t)$. Пусть $\nabla, D, \bar{\nabla}$ – связности на $\mathcal{M}$, сфере $S(t)$ и $\mathbb{R}^{n+1}$ соответственно, а B, B' и b – вторые фундаментальные формы $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, сечения $\Sigma(t)$ в $S(t)$ и гиперповерхности W вращения графика функции $r(t)$ вокруг оси Ox_0 . Выберем в нормальном пространстве к $\mathcal{M}$ базис $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-p}$ таким образом, что $\xi_1, \dots, \xi_{n-p}$ – ортонормированный базис в нормальном пространстве к сечению $\Sigma(t)$ в сфере $S(t)$, а ξ_0 – вектор внешней единичной нормали к W . В касательном пространстве к $\mathcal{M}$ базис выберем так, что $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}$ – касательные к $\Sigma(t)$, а X_0 направлен по меридиану гиперповерхности вращения W .

Тогда, используя определения вторых фундаментальных форм [5], получим для всех $k = 1, 2, \dots, p-1$ и $i = 1, 2, \dots, n-p$

$$\begin{aligned} \langle B(X_k, X_k), \xi_i \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_k, \xi_i \rangle = \langle D_{X_k} X_k, \xi_i \rangle = \langle B'(X_k, X_k), \xi_i \rangle, \\ \langle B(X_0, X_0), \xi_i \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{X_0} X_0, \xi_i \rangle = 0, \end{aligned}$$

а для всех $k = 0, 1, \dots, p-1$

$$\langle B(X_k, X_k), \xi_0 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{X_k} X_k, \xi_0 \rangle = \langle b(X_k, X_k), \xi_0 \rangle.$$

Заметим, что $\{X_k\}$ – главные направления поверхности W , и если $\{\lambda_k\}$ – соответствующие главные кривизны, то

$$\langle b(X_0, X_0), \xi_0 \rangle = \lambda_0 = \frac{r''(t)}{(1 + r'^2(t))^{3/2}},$$

$$\langle b(X_k, X_k), \xi_0 \rangle = \lambda_k = -\frac{1}{r(t)(1 + r'^2(t))^{1/2}}, \quad k = 1, 2, \dots, p-1.$$

Теперь если обозначить через $\mathcal{H}(t)$ вектор средней кривизны сечения $\Sigma(t)$ в сфере $S(t)$, то

$$\langle H, \xi_i \rangle = \langle \mathcal{H}(t), \xi_i \rangle, \quad \langle H, \xi_0 \rangle = \frac{r''(t)}{(1 + r'^2(t))^{3/2}} - \frac{p-1}{r(t)(1 + r'^2(t))^{1/2}}.$$

Откуда следует, что (5) и минимальность погружения $R: F \rightarrow S^{n-1}$ эквивалентна минимальности поверхности $\mathcal{M}$.

Определим на интервале $(-\varphi_p, \varphi_p)$ функцию $\Psi_p(t)$ следующим образом. На $[0, \varphi_p)$ рассмотрим функцию, обратную к $\Phi_p(t)$, а $\Psi_p(t)$ построим как четное продолжение последней на интервал $(-\varphi_p, \varphi_p)$. Прямые вычисления проверяется, что $\Psi_p(t)$ удовлетворяет уравнению (5). Поскольку $\inf_{(-\varphi_p, \varphi_p)} \Psi_p(t) = \Psi_p(0) = 1$, то нетрудно видеть, что поверхности вида (4) с $r(t) = \Psi_p(t)$ и произвольным компактным подмногообразием $R: F \rightarrow S^{n-1}$ дают необходимые примеры.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примеры нетривиальных замкнутых минимальных подмногообразий сферы S^{n-1} можно найти в работах [6]–[8]. Один из таких примеров получается в пересечении сферы S^{n-1} и конуса Саймона, задаваемого уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденяпин А. Д., Миклюков В. М. // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 2. С. 240–250.
2. Миклюков В. М., Ткачёв В. Г. // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 9. С. 1278–1295.
3. Клячин В. А. // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 4. С. 201–205.
4. Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
6. Simons J. // Ann. of Math. 1968. V. 88. № 2. P. 62–105.
7. Gauchman H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 298. № 2. P. 779–791.
8. Chern S.-S., do Carmo M., Kobayashi S. // Functional Analysis and Related Fields. Berlin–New York: Springer Verlag, 1970. P. 59–75.

Волгоградский государственный университет

Поступило

27.07.94

Исправленный вариант

04.01.96