Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Адамович, Строение модулей когомологий линейных расслоений на G/B и слабый порядок на группе Вейля, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 163–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 02:34:33

УДК 512.73

СТРОЕНИЕ МОДУЛЕЙ КОГОМОЛОГИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА G/B И СЛАБЫЙ ПОРЯДОК НА ГРУППЕ ВЕЙЛЯ

А. М. Адамович

Рассматриваются G -модули когомологий линейных расслоений на многообразии флагов G/B над алгебраически замкнутым полем простой характеристики. Изучаются строение подмодулей этих модулей и связывающие их гомоморфизмы.

Библиография: 3 названия.

Пусть G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$; T – ее максимальный тор; R – система корней, соответствующая паре (G, T) ; Δ – множество простых корней; R_+ (R_-) – множества положительных (соответственно отрицательных) корней; $B \supset T$ – борелевская подгруппа, соответствующая R_- ; X – группа характеров T ; $X^+ = \{\lambda \in X \mid 0 \leq \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle\}$ для $\alpha \in \Delta$ – множество доминантных весов; $X_n = \{\lambda \in X \mid 0 \leq \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle < p^n\}$ для $\alpha \in \Delta$ – множество p^n -ограниченных весов; $L(\lambda)$ – простой G -модуль со старшим весом $\lambda \in X^+$; W – группа Вейля; $l(w)$ – длина элемента $w \in W$ относительно множества простых отражений $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$; w_0 – максимальный элемент W ; $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где ρ – полусумма положительных корней.

Будем изучать строение G -модулей $H^i(y \cdot \lambda) = H^i(G/B, \mathcal{L}(y \cdot \lambda))$, где $\mathcal{L}(y \cdot \lambda)$ – линейное расслоение на G/B , индуцированное характером $y \cdot \lambda$ группы B , $y \in W$, $\lambda \in X^+$. В общем случае $H^i(y \cdot \lambda) = 0$ при $i \neq l(y)$, а модули $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ неразложимы и характер каждого из них равен характеру Вейля $\chi(\lambda)$. При этом $H^{l(w_0)}(w_0 \cdot \lambda)$ изоморфен модулю Вейля $V(\lambda)$, т.е. универсальному G -модулю, порожденному вектором старшего веса λ . Так как характеры одинаковы, то все $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ имеют одно и то же множество композиционных факторов. Однако, эти модули различаются строением подмодулей.

В [1] Андерсен доказал, что модули $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ имеют однократные “несущие” композиционные факторы $L(\lambda^w)$ (множество несущих факторов параметризуется элементами группы Вейля). Эти факторы интересны тем, что $L(\lambda^{w_0 y})$ является первым, а $L(\lambda^y)$ – последним фактором в любом убывающем композиционном ряду модуля $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ (это означает, что $\text{Soc } H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^y)$, а $H^{l(y)}(y \cdot \lambda) / \text{Rad } H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^{w_0 y})$).

Возникает вопрос о расположении остальных несущих факторов в композиционных рядах $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$. Каждому $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ мы можем поставить в соответствие частичное упорядочение на множестве $\{L(\lambda^w)\}$ несущих факторов, полагая $L(\lambda^{w_2}) >_y L(\lambda^{w_1})$, если в любом убывающем композиционном ряду $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ фактор $L(\lambda^{w_2})$ встречается раньше, чем $L(\lambda^{w_1})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант М7N000.

Основной результат (теорема 3) настоящей работы состоит в том, что в общем случае $L(\lambda^{w_2}) >_y L(\lambda^{w_1})$ эквивалентно $w_2 y^{-1} > w_1 y^{-1}$ (в смысле слабого порядка на группе Вейля). Используемые методы также позволяют в более общей ситуации доказать утверждение Андерсена (см. [1, 2.4]) о гомоморфизмах между $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ для различных $y \in W$.

Напомним как определяется отношение слабого порядка (см., например, [2]) на W : $w \leq \tilde{w}$, если $l(\tilde{w}w^{-1}) = l(\tilde{w}) - l(w)$, т.е. если $\tilde{w}$ можно представить в виде произведения $\tilde{w} = s_1 \cdots s_r w$, где $s_i \in S$, $r = l(\tilde{w}) - l(w)$.

Введем необходимые обозначения.

Пусть $\lambda \in X^+$ и n – такое, что $\lambda \in X_{n+1} \setminus X_n$. Существует единственное разложение $\lambda = \lambda^0 + p^n \lambda^1$, где $\lambda^0 \in X_n$ и $\lambda^1 \in X^+$. Следуя Андерсену [1], будем называть вес $\lambda \in X^+$ *общим*, если

$$6(h-1) \leq \langle \alpha^\vee, \lambda^1 \rangle \leq p - 6(h-1) \quad \text{для всех } \alpha \in R_+$$

(число Кокстера $h = \langle \alpha_0^\vee, \rho \rangle + 1$, если R неразложима, а α_0 – максимальный короткий корень; в общем случае h – максимальное из чисел Кокстера неразложимых компонент R).

Всюду, далее, $\lambda \in X^+$ – общий вес.

Каждый элемент $\mu \in X$ имеет единственное разложение $\mu = \mu^0 + p^n \mu^1$, где $\mu^0 \in X_n$ и $\mu^1 \in X$. Для общего веса $\lambda \in X_{n+1} \setminus X_n$ и $w \in W$ положим

$$\lambda^w = (w \cdot \lambda)^0 + p^n w^{-1} \cdot (w \cdot \lambda)^1.$$

Через $\text{Soc } M$ будем обозначать максимальный полупростой подмодуль модуля M , а через $\text{Rad } M$ – минимальный подмодуль модуля M , фактор по которому полупрост.

Нам понадобятся доказанные в [1] свойства модулей $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ для $y \in W$:

- 1) $[H^{l(y)}(y \cdot \lambda) : L(\lambda^w)] = 1$ для $w \in W$;
- 2) $\text{Soc } H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^y)$;
- 3) $H^{l(y)}(y \cdot \lambda) / \text{Rad } H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^{w_0 y})$.

Так как $[H^{l(y)}(y \cdot \lambda) : L(\lambda^w)] = 1$, существует единственный минимальный подмодуль модуля $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$, имеющий $L(\lambda^w)$ композиционным фактором. Обозначим его через $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w$.

Отметим, что вследствие свойств 2) и 3) модулей когомологий $\text{Soc } H^{l(y)}(y \cdot \lambda) = H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^y$ и $H^{l(y)}(y \cdot \lambda) = H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_0 y}$.

Очевидно, что $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subset H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2}$ тогда и только тогда, когда в любом убывающем композиционном ряду модуля $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ фактор $L(\lambda^{w_2})$ встречается раньше, чем $L(\lambda^{w_1})$.

Основным инструментом изучения строения модулей когомологий $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$ служат морфизмы между ними. Андерсен в работе [3] определил для $y \in W$, $s \in S$ ненулевой морфизм

$$T_s : H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(sy)}(sy \cdot \lambda).$$

Если $l(w) > 1$ и $w = s_1 \cdots s_r$ – приведенное разложение, то морфизм

$$T_w : H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(wy)}(wy \cdot \lambda)$$

определяется как композиция $T_{s_1} \cdots T_{s_r}$ (результат не зависит от выбора приведенного разложения), T_e – тождественный автоморфизм. Заметим, что если $w \leq \tilde{w}$, то $T_{\tilde{w}} = T_{\tilde{w}w^{-1}} T_w$.

Из [3, 4.4] непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (Андерсен). Морфизм $T_{y^{-1}} : H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \rightarrow H^0(\lambda)$ не является нулевым.

Из определения подмодулей вида $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w$ легко следуют два утверждения, которые удобно сформулировать в виде лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi \in \text{Hom}(H^{l(y)}(y \cdot \lambda), H^{l(w)}(w \cdot \lambda))$, $z \in W$. Тогда

$$\text{или } \varphi H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^z = H^{l(w)}(w \cdot \lambda)^z, \quad \text{или } H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^z \subseteq \text{Ker } \varphi.$$

В частности, если $\varphi \neq 0$, то $\varphi H^{l(y)}(y \cdot \lambda) = H^{l(w)}(w \cdot \lambda)^{w_0 y}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi \in \text{Hom}(H^{l(y)}(y \cdot \lambda), H^{l(w)}(w \cdot \lambda))$, $z \in W$. Тогда если

$$H^{l(w)}(w \cdot \lambda)^z \subseteq \text{Im } \varphi,$$

то

$$\varphi H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^z = H^{l(w)}(w \cdot \lambda)^z.$$

В частности, если $\varphi \neq 0$, то $\varphi H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w = \text{Soc } H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо равенство $\text{Hom}(H^{l(y)}(y \cdot \lambda), H^{l(w)}(w \cdot \lambda)) = k$. Морфизм $T_{wy^{-1}} : H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$ является ненулевым.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1] эта теорема доказана для $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$ имеет простой цокль, изоморфный $L(\lambda^w)$, то

$$\dim \text{Hom}(H^{l(y)}(y \cdot \lambda), H^{l(w)}(w \cdot \lambda)) \leq [H^{l(y)}(y \cdot \lambda) : L(\lambda^w)] = 1.$$

Поэтому достаточно проверить, что $T_{wy^{-1}} \neq 0$.

Так как $wy^{-1} \leq w_0$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) & \xrightarrow{T_{wy^{-1}}} & H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \\ & \searrow T_{w_0} & \downarrow T_{w_0 y w^{-1}} \\ & & H^{l(w_0 y)}(w_0 y \cdot \lambda) \end{array}$$

коммутативна. Видно, что если $T_{w_0} \neq 0$, то и $T_{wy^{-1}} \neq 0$. Осталось доказать нетривиальность морфизма

$$T_{w_0} : H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(w_0 y)}(w_0 y \cdot \lambda).$$

Для этого нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 3. Выполнено $w_1 \leq w_2 \implies H^0(\lambda)^{w_1} \subseteq H^0(\lambda)^{w_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_1 \leq w_2$. По определению это означает, что $l(w_2 w_1^{-1}) = l(w_2) - l(w_1)$. Используя равенства $l(w_0 z) = l(z w_0) = l(w_0) - l(z)$ и $l(z) = l(z^{-1})$, нетрудно проверить, что $l(w_2^{-1} w_0) = l(w_1^{-1} w_0) - l(w_0 w_2 w_1^{-1} w_0)$, т.е. $w_0 w_2 w_1^{-1} w_0 \leq w_1^{-1} w_0$. Поэтому мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^{l(w_0 w_1)}(w_0 w_1 \cdot \lambda) & \xrightarrow{T_{w_0 w_2 w_1^{-1} w_0}} & H^{l(w_0 w_2)}(w_0 w_2 \cdot \lambda) \\ & \searrow T_{w_1^{-1} w_0} & \downarrow T_{w_2^{-1} w_0} \\ & & H^0(\lambda) \end{array},$$

причем $T_{w_i^{-1} w_0} \neq 0$ (см. предложение) для $i = 1, 2$. Следовательно, по лемме 1 выполнено $T_{w_i^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_i)}(w_0 w_i \cdot \lambda) = H^0(\lambda)^{w_i}$. Но

$$T_{w_1^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_1)}(w_0 w_1 \cdot \lambda) \subseteq T_{w_2^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_2)}(w_0 w_2 \cdot \lambda)$$

ввиду коммутативности диаграммы.

ЛЕММА 4. Морфизм $T_w : H^0(\lambda) \rightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$ не является нулевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по $l(w)$. Для $l(w) = 1$ утверждение леммы выполнено, так как $T_w = T_s$ — ненулевой. Пусть $w = s w_1$, $l(w) = l(w_1) + 1$, T_{w_1} — ненулевой, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^0(\lambda) & \xrightarrow{T_{w_1}} & H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda) \\ & \searrow T_w & \downarrow T_s \\ & & H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \end{array}$$

коммутативна.

Так как $T_{w_1} \neq 0$, то вследствие леммы 2 $T_{w_1} H^0(\lambda)^{w_1} = \text{Soc } H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda)$. Далее, $\text{Soc } H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^{w_1})$, поэтому $[T_{w_1} H^0(\lambda) : L(\lambda^{w_1})] = 1$. По лемме 3 в любом убывающем композиционном ряду G -модуля $H^0(\lambda)$ фактор $L(\lambda^w)$ предшествует $L(\lambda^{w_1})$ (или они совпадают в случае $\lambda^w = \lambda^{w_1}$). Следовательно, в любом композиционном ряду модуля $T_{w_1} H^0(\lambda)$ фактор $L(\lambda^w)$ также встречается, и $H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda)^w \subseteq T_{w_1} H^0(\lambda)$.

Далее, ввиду леммы 2 $\text{Soc } H^{l(w)}(w \cdot \lambda) = T_s H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda)^w$, поскольку $T_s \neq 0$. Итак, мы получаем $\text{Soc } H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \subseteq T_s T_{w_1} H^0(\lambda)$ и $T_w = T_s T_{w_1} \neq 0$.

Продолжим доказательство теоремы. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) & \xrightarrow{T_{y^{-1}}} & H^0(\lambda) \\ & \searrow T_{w_0} & \downarrow T_{w_0 y} \\ & & H^{l(w_0 y)}(w_0 y \cdot \lambda) \end{array}.$$

Докажем, что $T_{w_0} \neq 0$.

В самом деле, $T_{y^{-1}} \neq 0$ (см. предложение). Значит, $T_{y^{-1}} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) = H^0(\lambda)^{w_0 y}$. С другой стороны, $\text{Soc } H^{l(w_0 y)}(w_0 y \cdot \lambda) = T_{w_0 y} H^0(\lambda)^{w_0 y}$, так как $T_{w_0 y} \neq 0$ по лемме 4. Таким образом, $T_{w_0 y} T_{y^{-1}} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) = \text{Soc } H^{l(w_0 y)}(w_0 y \cdot \lambda)$ и $T_{w_0} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если $w_1 y^{-1} \leq w_2 y^{-1}$, то $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subseteq H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3: морфизмы

$$T_{y w_i^{-1} w_0} : H^{l(w_0 w_i)}(w_0 w_i \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(y)}(y \cdot \lambda), \quad i = 1, 2,$$

ненулевые по теореме 1, поэтому вследствие леммы 1

$$H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_i} = T_{y w_i^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_i)}(w_0 w_i \cdot \lambda),$$

а

$$T_{y w_1^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_1)}(w_0 w_1 \cdot \lambda) = T_{y w_2^{-1} w_0} T_{w_0 w_2 w_1^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_1)}(w_0 w_1 \cdot \lambda),$$

и следовательно,

$$T_{y w_1^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_1)}(w_0 w_1 \cdot \lambda) \subseteq T_{y w_2^{-1} w_0} H^{l(w_0 w_2)}(w_0 w_2 \cdot \lambda).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть все λ^w различны. Тогда

$$w_1 y^{-1} \leq w_2 y^{-1} \iff H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subseteq H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось доказать ‘ $\Leftarrow$ ’. В предположениях теоремы докажем сначала две леммы.

Рассмотрим морфизмы

$$T_s : H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(sw)}(sw \cdot \lambda) \quad \text{и} \quad T_s : H^{l(sw)}(sw \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda).$$

ЛЕММА 5. Композиция $T_s T_s = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 $T_s T_s \in \text{Hom}(H^{l(w)}(w \cdot \lambda), H^{l(w)}(w \cdot \lambda))$ скалярен. Поэтому или $T_s T_s = 0$, или T_s – изоморфизм. Последнее невозможно, так как в этом случае

$$L(\lambda^w) \simeq \text{Soc } H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \simeq \text{Soc } H^{l(sw)}(sw \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^{sw}),$$

т.е. $\lambda^w = \lambda^{sw}$.

ЛЕММА 6. Пусть $s \in S$, $w, y \in W$. Тогда

$$H^{l(sy)}(sy \cdot \lambda)^w = T_s H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w \iff l(wy^{-1}s) = l(wy^{-1}) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны два случая.

1) $l(wy^{-1}s) = l(wy^{-1}) - 1$.

Тогда $T_{wy^{-1}} = T_{wy^{-1}s} T_s$. Вследствие теоремы 1 $T_{wy^{-1}} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) \neq 0$. Поэтому (см. лемму 2)

$$T_{wy^{-1}} H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w = \text{Soc } H^{l(w)}(w \cdot \lambda).$$

Таким образом, $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w \not\subseteq \text{Ker } T_{wy^{-1}} = \text{Ker } T_{wy^{-1}s} T_s$ и $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w \not\subseteq \text{Ker } T_s$. Следовательно, по лемме 1 $T_s H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w = H^{l(sy)}(sy \cdot \lambda)^w$.

2) $l(wy^{-1}s) = l(wy^{-1}) + 1$.

Тогда (так как $y^{-1}s = (sy)^{-1}$) по доказанному выше $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w \subseteq T_s H^{l(sy)}(sy \cdot \lambda)$. В силу леммы 5 $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^w \subseteq \text{Ker } T_s$. Следовательно, $[T_s H^{l(y)}(y \cdot \lambda) : L(\lambda^w)] = 0$ и $H^{l(sy)}(sy \cdot \lambda)^w \not\subseteq T_s H^{l(y)}(y \cdot \lambda)$.

Теперь докажем с помощью индукции по $l = l(w_1 y^{-1})$, что

$$H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subseteq H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2} \implies w_1 y^{-1} \leq w_2 y^{-1},$$

т.е. $l(w_2 w_1^{-1}) = l(w_2 y^{-1}) - l(w_1 y^{-1})$.

Для $l = 0$ это утверждение, очевидно, верно. Предположим, что оно верно для $l = r - 1$.

Пусть $l(w_1 y^{-1}) = r$, $w_1 y^{-1} = s_1 \cdots s_r$ — приведенное разложение. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^{l(y)}(y \cdot \lambda) & \xrightarrow{T_{s_r}} & H^{l(s_r y)}(s_r y \cdot \lambda) \\ & \searrow T_{w_1 y^{-1}} & \downarrow T_{s_1 \cdots s_{r-1}} \\ & & H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda) \end{array}$$

коммутативна, $T_{w_1 y^{-1}}$ — ненулевой. Поэтому $T_{w_1 y^{-1}} H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} = \text{Soc } H^{l(w_1)}(w_1 \cdot \lambda)$. Следовательно, $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \not\subseteq \text{Ker } T_{w_1 y^{-1}}$, а так как $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subseteq H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2}$, то $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2} \not\subseteq \text{Ker } T_{w_1 y^{-1}}$ и $H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2} \not\subseteq \text{Ker } T_{s_r}$. Тогда по лемме 1

$$T_{s_r} H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2} = H^{l(s_r y)}(s_r y \cdot \lambda)^{w_2},$$

а по лемме 6 $l(w_2 y^{-1} s_r) = l(w_2 y^{-1}) - 1$.

Далее, $l(w_1(s_r y)^{-1}) = l(w_1 y^{-1} s_r) = r - 1$, а

$$H^{l(s_r y)}(s_r y \cdot \lambda)^{w_1} = T_{s_r} H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_1} \subseteq T_{s_r} H^{l(y)}(y \cdot \lambda)^{w_2} = H^{l(s_r y)}(s_r y \cdot \lambda)^{w_2}$$

(первое равенство следует из леммы 6).

Отсюда по предположению индукции $l(w_2 w_1^{-1}) = l(w_2 y^{-1} s_r) - l(w_1 y^{-1} s_r)$. Таким образом,

$$l(w_2 w_1^{-1}) = l(w_2 y^{-1}) - 1 - l(s_1 \cdots s_{r-1}) = l(w_2 y^{-1}) - r = l(w_2 y^{-1}) - l(w_1 y^{-1}),$$

т.е. $w_1 y^{-1} \leq w_2 y^{-1}$ и при $l = r$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andersen H. H. On the generic structure of cohomology modules for semi-simple algebraic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 295. P. 397–415.
- [2] Björner A. Orderings of Coxeter groups // Contemp. Math. 1984. V. 34. P. 175–195.
- [3] Andersen H. H. Filtrations of cohomology modules for Chevalley groups // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1983. V. 16. №4. P. 495–528.