Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Власов, Чебышевские подпространства конечной размерности в комплексном $C(Q)$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 178–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:39:44

УДК 517.518

ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ В КОМПЛЕКСНОМ $C(Q)$

Л. П. Власов

Рассматриваются чебышевские подпространства конечной коразмерности в комплексном $C(Q)$, где Q – бикомпакт. Доказываются аналоги теорем, установленных ранее для вещественного случая А. Л. Гаркави и А. Брауном, например, дается характеристизация таких подпространств. Показано, что если в вещественном $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства конечной коразмерности, то они существуют и в комплексном $C(Q)$ (для того же Q).

Библиография: 8 названий.

Статья примыкает к исследованиям [1]–[4] и непосредственно продолжает работу автора [5].

Множество M в нормированном пространстве X называется *проксиминальным*, или *множеством существования*, если для любого $x \in X$ множество элементов наилучшего приближения $P_M x = \{y \in M : \|x - y\| = d(x, M)\}$ непусто. Если $P_M x$ единоточечно, то M называется *чебышевским*. В дальнейшем $C(Q)$ – комплексное (вещественное) пространство непрерывных на бикомпакте Q комплексных (вещественных) функций с обычной нормой; $C(Q)^*$ – пространство мер Радона на Q , $\|\mu\| = |\mu|Q = \text{var}(\mu, Q)$; $S_\mu = \{t \in Q : |\mu|G > 0 \text{ для любого открытого } G \ni t\}$; $Q'(I)$ – множество предельных (изолированных) точек бикомпакта Q (предполагается, что Q бесконечно); Σ – σ -алгебра борелевских подмножеств Q ; e, E (также с индексами) обозначают всегда множества из Σ ; ∂A – граница, $\overset{\circ}{A}$ – внутренность, $|A|$ – мощность множества A ; $\nu \ll \mu$ на A означает, что мера ν абсолютно непрерывна относительно μ на множестве A (если $A = Q$, пишется просто $\nu \ll \mu$). Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы подпространство L конечной коразмерности в комплексном или вещественном $C(Q)$ было множеством существования необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

- (1а) *для любой меры $\mu \in L^\perp$ существует непрерывная производная Радона–Никодима $d\mu/d|\mu|$;*
- (1б) *для любых $\mu, \nu \in L^\perp$ множество $S_\nu \setminus S_\mu$ замкнуто;*
- (1в) *для любых $\mu, \nu \in L^\perp$ мера ν абсолютно непрерывна относительно μ на множестве S_μ .*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-196.

В вещественном случае теорема установлена Гаркави [2], в комплексном – автором [5]. Свойства производной Радона–Никодима оформим в виде леммы (см. [6, гл. III, п. 10]).

ЛЕММА 1. 1) Если $d\mu/d\nu = f$, т.е. $\mu e = \int_e f(t) d\nu \quad \forall e \in \Sigma$, то $|\mu|e = \int_e |f(t)| d|\nu|$ и $dv/d\mu = 1/f$ на $\{t \in S_\nu : f(t) \neq 0\}$. Если, кроме того, $dv/d\lambda = \varphi$, то $d\mu/d\lambda = d\mu/d\nu \cdot dv/d\lambda = f\varphi$, т.е. $\mu e = \int_e f d\nu = \int_e f\varphi d\lambda$.

2) Если $f = d\mu/d|\mu|$, то $|f(t)| = 1$ μ -почти всюду.

3) Если $g \in C(Q)$, $\|g\| \leq 1$, то $|\mu|Q = \int_Q g(t) d\mu$ тогда и только тогда, когда $g = d|\mu|/d\mu$.

Утверждение 3) леммы см. в [5], [7].

ЛЕММА 2. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$. Тогда существует такое счетное $R_{\mu\nu} \subset \mathbb{C}$, что для всех $z \in \mathbb{C} \setminus R_{\mu\nu}$ меры μ и ν абсолютно непрерывны относительно меры $\mu + z\nu$ и $S_{\mu+z\nu} = S_\mu \cup S_\nu$. Следовательно, для $L \subset C(Q)$, $\text{codim } L < \infty$, существует $\nu \in L^\perp$ с $\lambda \ll \nu \quad \forall \lambda \in L^\perp$,

$$S_\nu = \bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda.$$

Аналогичное утверждение для вещественного случая доказано в [8, лемма 10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$R_{\mu\nu} = \{z \in \mathbb{C} : \exists e_z \in \Sigma \text{ с } |\mu|e_z + |\nu|e_z > 0, |\mu + z\nu|e_z = 0\}.$$

Для $z, z' \in R_{\mu\nu}$, $z \neq z'$, $e \subset e_z \cap e_{z'}$ имеем

$$|\mu + z\nu|e = |\mu + z'\nu|e = 0, \quad \mu e + z\nu e = \mu e + z'\nu e = 0, \quad \nu e = 0, \quad \mu e = 0.$$

Так как $e \subset e_z \cap e_{z'}$ произвольно, то $|\mu|(e_z \cap e_{z'}) = |\nu|(e_z \cap e_{z'}) = 0$. Отсюда $\{z \in R_{\mu\nu} : |\mu|e_z + |\nu|e_z > 1/n\}$ конечно, а $R_{\mu\nu}$ не более чем счетно. Если $\mu_1, \dots, \mu_n$ – базис в $L^\perp$, то, последовательно применяя доказанное утверждение к мерам $\sum_{i=1}^k z_i \mu_i$ и μ_{k+1} , получим

$$Q = \bigcup_1^n S_{\mu_i} = S_\nu,$$

где $z_1 = 1$, $k = 1, \dots, n-1$, $\nu = \sum_1^n z_i \mu_i \in L^\perp$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы подпространство L коразмерности n в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- (2а) для любой меры $\mu \in L^\perp$ существует непрерывная производная Радона–Никодима $d\mu/d|\mu|$;
- (2б) $|Q \setminus S_\mu| < n \quad \forall \mu \in L^\perp \setminus \{0\}$;
- (2в) любые меры $\mu, \nu \in L^\perp \setminus \{0\}$ взаимно абсолютно непрерывны на Q' ;
- (2г) если $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ – базис в $L^\perp$, $I = Q \setminus Q' = \{t_1, t_2, \dots, t_q\}$ и $q < n$, то $\text{rank } \|\mu_i \{t_k\}\|_{k \leq q}^{i \leq n} = q$.

В вещественном случае аналогичная теорема установлена Гаркави [2] (другие варианты см. также в [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Условие (2а) выполняется в силу теоремы 1. Докажем (2б) и (2г). Предположим противное. Тогда или

(А) $|Q \setminus S_\mu| \geq n$ для некоторой $\mu \in L^\perp \setminus \{0\}$, или

(Б) $|I| < n$, но $\text{rank } \|\lambda_i\{t_k\}\| < |I|$.

Найдем r различных точек $t_1, t_2, \dots, t_r$ из $Q \setminus S_\mu$ в (А) или из I в (Б), при этом $r = n$ в (А) и $r = q$ в (Б). В случае (Б) ввиду $r < n$ тоже имеется мера из $L^\perp \setminus \{0\}$ (обозначим ее, как и в (А), через μ) с $t_k \in Q \setminus S_\mu \ \forall k \leq r$. Пусть G_k – открытые множества такие, что $\overline{G_k} \subset Q \setminus S_\mu$, $t_k \in G_k$, $\overline{G_k} \cap \overline{G_j} = \emptyset \ (k \neq j)$; вещественные функции $g_k \in C(Q)$ такие, что $g_k(t_k) = 1$, $g_k(t) = 0 \ \forall t \notin G_k$, $\|g_k\| = 1$ (в случае (Б) $G_k = \{t_k\}$, $g_k = \chi_{\{t_k\}}$). Рассмотрим базис $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ в $L^\perp$, где $\mu_1 = \mu$. Система $n - 1$ уравнений с r неизвестными

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k a_{ik} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

где $a_{ik} = \int_{G_k} g_k d\mu_i$ ($a_{ik} = \mu_i\{t_k\}$ в случае (Б)), имеет ненулевое решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, ибо $r = n$ в (А), $\text{rank } \|a_{ik}\| < r = q$ в (Б). Возьмем

$$g = \sum_{k=1}^r \alpha_k g_k,$$

тогда $g \in L \setminus \{0\}$. Можно считать $\|\mu\| = 1$. Положим $x = d|\mu|/d\mu$ на S_μ , $x = 0$ на $F = \bigcup_1^r \overline{G_k}$ и продолжим до $x \in C(Q)$ с $\|x\| = 1$ ($d|\mu|/d\mu$ непрерывна на S_μ по теореме 1 и лемме 1). Покажем, что $\varepsilon g \in P_L x$ для всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|x - \varepsilon g\| &= \max \left\{ \max_{t \in Q \setminus F} |x(t) - \varepsilon g(t)|, \max_k \max_{t \in G_k} |x(t) - \varepsilon \alpha_k g_k(t)| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|x\|, \max_k |\varepsilon \alpha_k| \right\} = \|x\|, \end{aligned}$$

если $\varepsilon |\alpha_k| < \|x\|$. Итак, $\varepsilon g \in P_L x$, что противоречит единственности.

(2в) выполняется по теореме 1 на множестве $S_\mu \cap S_\nu = Q \setminus [(Q \setminus S_\mu) \cup (Q \setminus S_\nu)]$, которое содержит множество Q' в силу (2б).

Достаточность. L проксимально по теореме 1: (1а) совпадает с (2а); (1б) следует из (2б) ввиду $S_\nu \setminus S_\mu = S_\nu \cap (Q \setminus S_\mu)$; (1в) – из (2в), так как из $e \in S_\mu$, $|\mu|e = 0$ следует, что $e \in Q'$.

Допустим, что L не чебышевское, тогда найдутся $x \notin L$, $\mu \in L^\perp \setminus \{0\}$ и $g \in L \setminus \{0\}$ такие, что

$$\|x\| = \|x - g\| = d(x, L) = \int_Q x d\mu = \int_Q (x - g) d\mu = \|\mu\| = 1$$

(см., например, [7]). Из этих равенств следует (см. лемму 1), что $x|_{S_\mu} = (x - g)|_{S_\mu} = d|\mu|/d\mu$, поэтому $g = 0$ на S_μ . Далее, если $Q \setminus S_\mu = \{t_1, \dots, t_r\}$, то

$$g = \sum_1^r \alpha_k \chi_{\{t_k\}}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Заметим теперь (см. [2]), что

(В) если $|I| \geq n$, то для различных $t_1, \dots, t_n \in I$ $\det \|\mu_i\{t_k\}\| \neq 0$

(иначе некоторая мера из $L^\perp$ обратилась бы в 0 на всех t_k вопреки (2б)). Если же $|I| < n$, то в силу (2г)

$$\text{rank } \|\mu_i\{t_k\}\|_{k=1, \dots, q}^{i=1, \dots, n} = q.$$

Но ввиду $g \in L \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k \mu_i\{t_k\} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. столбцы матрицы $\|\mu_i\{t_k\}\|$ линейно зависимы, что противоречит сказанному ранее, ибо $r \leq \min\{q, n-1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если L чебышевское, то

$$Q = \bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda$$

и существует $\nu \in L^\perp$ с $S_\nu = Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2б) следует, что $Q \setminus S_\lambda \subset I \ \forall \lambda \in L^\perp \setminus \{0\}$, а из (В) и (2г) вытекает, что случай $\lambda\{t\} = 0 \ \forall \lambda \in L^\perp$ невозможен для $t \in I$. Остается сослаться на лемму 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы подпространство

$$L = \{\nu\}_\perp = \left\{ x \in C(Q) : \int_Q x \, d\nu = 0 \right\}$$

коразмерности 1 в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (2а) и равенство $S_\nu = Q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следствие 2 нельзя считать новым даже в комплексном случае (см., например, [7]).

Далее мы будем обозначать через $\tilde{\mathbb{C}}$ комплексную плоскость, дополненную “бесконечно удаленными точками” вида $\infty \cdot w$, где $w \in \partial D$, т.е. $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ ($D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$). Предполагается, что $z_n \rightarrow \infty \cdot w$, если $|z_n| \rightarrow \infty$, $z_n/|z_n| \rightarrow w$; $\infty \cdot w_n \rightarrow \infty \cdot w$ при $w_n \rightarrow w$, $(\infty \cdot w) \cdot (\infty \cdot w') = \infty \cdot ww'$, $(\infty \cdot w) \cdot 0 = 0$, $\infty \cdot 0 = 0$. Топологически $\tilde{\mathbb{C}}$ эквивалентна “диску” D .

В последующем мы пишем (ср. [4]) $\mu e/\nu e \rightarrow z \in \mathbb{C}$ при $e \rightarrow t \in Q$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность G точки t такая, что $|\mu e/\nu e - z| < \varepsilon$, как только e – борелевское подмножество G , $\nu e \neq 0$ (предполагается, что $t \in S_\nu$). Для “бесконечно удаленной точки” $\mu e/\nu e \rightarrow \infty \cdot w$, если

$$\left| \frac{\mu e}{\nu e} \right| \rightarrow \infty, \quad \frac{\mu e/\nu e}{|\mu e/\nu e|} \rightarrow w.$$

ЛЕММА 3. Если $d\mu/d|\mu| = h$ непрерывна в точке $t_0 \in S_\mu$, то $\mu e/|\mu|e \rightarrow h(t_0)$, $\mu e/|\mu e| \rightarrow h(t_0)$, $|\mu e|/|\mu|e \rightarrow 1$ при $e \rightarrow t_0$. Если $d\mu/d\nu = f$ и $d\nu/d|\nu| = g$ непрерывны в точке $t_0 \in S_\nu$, то $\mu e/\nu e \rightarrow f(t_0)$ при $e \rightarrow t_0$. (Предполагается, что $f(t_0) \notin \tilde{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение производной Радона–Никодима, имеем

$$\left| h(t_0) - \frac{\mu e}{|\mu|e} \right| = \left| \int_e [h(t_0) - h(t)] d|\mu| \right| / |\mu|e < \varepsilon \quad \forall e \subset G,$$

если $G \ni t_0$ выбрано из условия $|h(t_0) - h(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in G$. Далее,

$$\frac{|\mu e|}{|\mu|e} \rightarrow 1, \quad \frac{\mu e}{|\mu e|} = \frac{\mu e / |\mu|e}{|\mu e| / |\mu|e} \rightarrow \frac{h(t_0)}{|h(t_0)|} = h(t_0),$$

так как по лемме 1 $|h(t)| = 1$ μ -почти всюду, следовательно, во всех точках непрерывности. Наконец, если $d\nu/d|\nu| = g$ непрерывна в точке t_0 , то $|\nu e|/|\nu|e \rightarrow 1$ по доказанному, и

$$\left| f(t_0) - \frac{\mu e}{\nu e} \right| = \left| \int_e [f(t_0) - f(t)] d\nu \right| / |\nu e| \leq \varepsilon \frac{|\nu|e}{|\nu e|} \leq 2\varepsilon,$$

если $G \ni t_0$ выбрано из условий $|f(t_0) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in G$ и $|\nu|e \leq 2|\nu e| \quad \forall e \subset G$.

ЛЕММА 4. Пусть подпространство L удовлетворяет условию (1а), $\mu, \nu \in L^\perp$, $t_0 \in S_\mu \cap S_\nu$. Тогда существуют $\theta \in [0, \infty]$ и $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, такие, что при $e \rightarrow t_0$ ($\mu e \neq 0$, $\nu e \neq 0$)

$$\frac{\mu e}{\nu e} \rightarrow \theta \cdot w, \quad \left| \frac{\mu e}{\nu e} \right| \rightarrow \theta, \quad \frac{\mu e / \nu e}{|\mu e / \nu e|} \rightarrow w.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$w_e = \frac{\mu e / \nu e}{|\mu e / \nu e|},$$

тогда

$$w_e = \frac{\mu e / |\mu e|}{\nu e / |\nu e|},$$

и по (1а) и лемме 3 найдутся $w, w_0 \in \partial D$, $w_e \rightarrow w$, $\nu e / |\nu e| \rightarrow w_0$. Покажем, что $|\mu e / \nu e|$ сходится (возможно, к ∞). В противном случае существуют направленности $e_\alpha, e'_\beta \rightarrow t_0$, $|\mu e_\alpha / \nu e_\alpha| \rightarrow \theta$, $|\mu e'_\beta / \nu e'_\beta| \rightarrow \theta'$, $0 \leq \theta < \theta' \leq \infty$. Для $z = \theta_1 w$, где $\theta < \theta_1 < \theta'$, и $\lambda = \mu - z\nu \in L^\perp$ имеем $\lambda e = \nu e (w_e |\mu e / \nu e| - z)$ и

$$\frac{\lambda e_\alpha}{|\lambda e_\alpha|} = \frac{\nu e_\alpha}{|\nu e_\alpha|} \cdot \frac{w_{e_\alpha} |\mu e_\alpha / \nu e_\alpha| - z}{|w_{e_\alpha} |\mu e_\alpha / \nu e_\alpha| - z|} \rightarrow w_0 \frac{w\theta - z}{|w\theta - z|}, \quad \frac{\lambda e'_\beta}{|\lambda e'_\beta|} \rightarrow w_0 \frac{w\theta' - z}{|w\theta' - z|}.$$

Эти пределы различны при $z = \theta_1 w$. При этом по лемме 2 можно считать $z \notin R_{\mu\nu}$, тогда $t_0 \in S_\mu \cup S_\nu = S_\lambda$ вопреки (1а) и лемме 3.

Используя лемму 4, определим три функции

$$\theta: S_\nu \rightarrow [0, \infty], \quad w: S_\nu \cap S_\mu \rightarrow \partial D, \quad f: S_\nu \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

такие, что при $e \rightarrow t \in S_\nu \cap S_\mu$

$$\left| \frac{\mu e}{\nu e} \right| \rightarrow \theta(t), \quad \frac{\mu e / \nu e}{|\mu e / \nu e|} \rightarrow w(t), \quad \frac{\mu e}{\nu e} \rightarrow f(t) = \theta(t) \cdot w(t),$$

а если $t \in S_\nu \setminus S_\mu$, то полагаем $f(t) = \theta(t) = 0$.

ЛЕММА 5. При условиях леммы 4 функции θ, w, f непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\theta(t_0) < \infty$, $t_0 \in S_\nu$. Будем считать $t_0 \in S_\mu$, так как случай $t_0 \in S_\nu \setminus S_\mu$ ясен из определения θ . Для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдем по лемме 4 открытое $G \ni t_0$ с $|\mu e / \nu e| \in (\theta(t_0) - \varepsilon, \theta(t_0) + \varepsilon) \quad \forall e \subset G$. Возьмем $t \in G$ и найдем открытое $G_1 \ni t$, $G_1 \subset G$ с $|\mu e / \nu e| \in (\theta(t) - \varepsilon, \theta(t) + \varepsilon) \quad \forall e \subset G_1$ (в случае $t \in S_\mu$ по лемме 4, а случай $t \in S_\nu \setminus S_\mu$ очевиден). Так как при этом $e \subset G$, то ясно, что $|\theta(t) - \theta(t_0)| < 2\varepsilon$ в случае $\mu e \neq 0$. Если же $\mu e = 0$, то возьмем $e' \in G$ такое, что $0 < |\mu e'| < \varepsilon |\nu e|$, $|\nu e'| < \varepsilon |\nu e|$, и положим $E = e \cup e'$. Имеем

$$E \subset G, \quad \mu E \neq 0, \quad \left| \frac{\mu E}{\nu E} \right| = \frac{|\mu e'|}{|\nu e + \nu e'|} \leq \frac{\varepsilon |\nu e|}{|\nu e| - |\nu e'|} < 2\varepsilon.$$

Тогда $|\theta(t) - \theta(t_0)| < 3\varepsilon$. Аналогично доказываются случаи $\theta(t_0) = \infty$ и непрерывность $w(t), f(t)$ с использованием соглашений относительно ∞ и $\tilde{\mathbb{C}}$.

В дальнейшем будем считать w продолженной на S_ν до непрерывной функции со значениями в D . (Как известно, при таком продолжении не всегда можно сохранить равенство $w(t) = 1$.) Обозначим

$$S'_\nu = \{t \in S_\nu : \theta(t) < \infty\} = \{t \in S_\nu : f(t) \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}\}.$$

ЛЕММА 6. Пусть подпространство L удовлетворяет условию (1а), для мер $\mu, \nu \in L^\perp$ определены, как в лемме 4, функции θ, w, f . Тогда $|\nu|(S_\nu \setminus S'_\nu) = 0$, а

$$\theta = \frac{d|\mu|}{d|\nu|}, \quad f = \frac{d\mu}{d\nu} \quad \text{на множестве } S'_\nu. \quad (1)$$

Если дополнительно L удовлетворяет условию (1в), то (1) выполняется на S_ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $e = S_\nu \setminus S'_\nu$. Тогда $e \subset S_\mu$ и замкнуто по непрерывности θ (S'_ν открыто в S_ν). Для произвольного $\varepsilon > 0$ и каждого $t \in e$ найдется открытое $G_t \ni t$ с $|\nu|e' \leq \varepsilon |\mu|e' \quad \forall e' \subset G_t$ по определению $\theta(t)$. Пусть $\{G_{t_i}\}$ – конечное покрытие e . Существуют $e_i \subset G_{t_i}$ с $e_i \cap e_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, $e = \bigcup_i e_i$. Тогда $|\nu|e = \sum |\nu|e_i \leq \varepsilon \sum |\mu|e_i = \varepsilon |\mu|e \leq \varepsilon \|\mu\|$, следовательно, $|\nu|(S_\nu \setminus S'_\nu) = 0$.

Покажем теперь, что для $e \subset S'_\nu$

$$|\mu|e = \int_e \theta(t) d|\nu|.$$

Пусть вначале $e \subset S_\nu^n = \{t \in S_\nu : \theta(t) \leq n\}$. Для каждого $t \in S_\nu^n$ по леммам 4, 5 найдется открытое $G_t \ni t$ такое, что

$$\left| \theta(t) - \frac{|\mu|E}{|\nu|E} \right| < \varepsilon \quad \forall E \subset G_t$$

с $|\nu|E \neq 0$, $|\theta(t) - \theta(t')| < \varepsilon \quad \forall t' \in G_t$. Пусть $\{G_{t_i}\}$ – конечное покрытие S_ν^n . Тогда

$$e = \bigcup_i e_i, \quad e_i \subset G_{t_i}, \quad e_i \cap e_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad \left| |\mu|e_i - \theta(t_i)|\nu|e_i \right| \leq \varepsilon |\nu|e_i$$

(легко видеть, что $\mu \ll \nu$ на множестве G_t). Имеем

$$\begin{aligned} \left| |\mu|e - \int_e \theta(t) d\nu \right| &= \left| \sum \left\{ |\mu|e_i - \int_{e_i} \theta(t) |\nu| (dt) \right\} \right| \\ &= \left| \sum \left\{ [|\mu|e_i - \theta(t_i) |\nu|e_i] + \int_{e_i} [\theta(t_i) - \theta(t)] |\nu| (dt) \right\} \right| \\ &\leq 2\varepsilon \sum |\nu|e_i = 2\varepsilon |\nu|e. \end{aligned}$$

Это и означает, что

$$|\mu|e = \int_e \theta(t) d|\nu|,$$

т.е. $\theta = d|\mu|/d|\nu|$ на S'_ν . Положим теперь $\theta_n(t) = \theta(t)$, если $\theta(t) \leq n$, и $\theta_n(t) = 0$, если $\theta(t) > n$ ($t \in S_\nu$). Пусть θ_n ν -измерима на S_ν , $0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1}$, $\theta_n \rightarrow \theta$ на S'_ν . Тогда, как известно [5, III.6.17],

$$\int_{S'_\nu} \theta(t) d|\nu| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \theta_n(t) d|\nu| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S'_\nu} \theta(t) d|\nu| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|S'_\nu^n \leq \|\mu\|,$$

т.е. θ ν -интегрируема на S'_ν . Если теперь $e \subset S'_\nu$, то

$$e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n,$$

где

$$e_n \subset S'_\nu, \quad e_m \cap e_n = \emptyset, \quad |\mu|e = \sum |\mu|e_n = \sum \int_{e_n} \theta(t) d|\nu| = \int_e \theta(t) d|\nu|.$$

Таким образом, $\theta = d|\mu|/d|\nu|$ на S'_ν , а ввиду $|\nu|(S_\nu \setminus S'_\nu) = 0$ и на S_ν по соглашению $\infty \cdot 0 = 0$ и при условии (1в), ибо тогда и $|\mu|(S_\nu \setminus S'_\nu) = 0$.

Осталось показать, что $\theta \cdot w = d\mu/d\nu$ на S'_ν . Поскольку

$$w(t) = \lim_{e \rightarrow t} \frac{\mu e / \nu e}{|\mu e / \nu e|} = \lim_{e \rightarrow t} \frac{\mu e / |\mu e|}{\nu e / |\nu e|} = \frac{h(t)}{g(t)},$$

то по лемме 1

$$\int_e \theta \cdot w d\nu = \int_e \theta \cdot w \cdot g d|\nu| = \int_e w g d|\mu| = \int_e \frac{wg}{h} d\mu = \mu e,$$

где $e \subset S'_\nu$, $h = d\mu/d|\mu|$, $g = d\nu/d|\nu|$. При условии (1в) равенство $\mu e = \int_e \theta(t) w(t) d\nu$ распространяется на $e \subset S_\nu$ так же, как равенство $|\mu|e = \int_e \theta(t) d|\nu|$ выше.

Обозначим

$$N_z = N_{z,f} = \{t \in S_\nu : f(t) = z\}, \quad \text{где } z \in \mathbb{C}, \quad f \in C(S_\nu, \tilde{\mathbb{C}}).$$

ЛЕММА 7. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda = \mu - z\nu$ и $L = \{\mu, \nu\}_\perp$ удовлетворяет условию (1а). Тогда

$$S_\lambda = (S_\mu \setminus S_\nu) \cup \overline{S_\nu \setminus N_{z,f}}, \quad (2)$$

где $f = d\mu/d\nu \in C(S_\nu, \tilde{\mathbb{C}})$, а если выполняется (1в), то

$$S_\lambda = (S_\mu \setminus S_\nu) \cup \overline{S'_\nu \setminus N_{z,f}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\lambda e = \mu e \ \forall e \subset S_\mu \setminus S_\nu$, так что $S_\lambda \setminus S_\nu = S_\mu \setminus S_\nu$. Пусть $t' \in S_\nu \setminus N_z$, $G \ni t'$ открыто и $G \cap N_z = \emptyset$. Тогда, используя лемму 1, из $\lambda e = \int_e (f(t) - z) d\nu \ \forall e \in \Sigma$ получим, что

$$|\lambda|G = \int_G |f(t) - z| d|\nu| > 0, \quad t' \in S_\lambda, \quad S_\nu \setminus N_z \subset S_\lambda, \quad (S_\mu \setminus S_\nu) \cup \overline{S_\nu \setminus N_z} \subset S_\lambda.$$

Пусть, далее, $t' \in S_\lambda \setminus (S_\mu \setminus S_\nu)$, но $t' \notin \overline{S'_\nu \setminus N_z}$. Тогда найдется открытое $G \ni t'$, $G \cap (S'_\nu \setminus N_z) = \emptyset$, т.е. $G \cap S'_\nu \subset N_z$, и по лемме 6

$$|\lambda|G = \int_{G \cap S'_\nu} |f(t) - z| d|\nu| + \int_{G \cap (S_\nu \setminus S'_\nu)} |f(t) - z| d|\nu| = 0,$$

что невозможно из-за $t' \in S_\lambda$. Если вместо S'_ν в этих рассуждениях подставить S_ν , то получим (2), при этом не используется (1в). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda = \mu - z\nu$, $f = d\mu/d\nu$, $g = d\nu/d|\nu|$. Тогда

$$\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t) = \frac{f(t) - z}{|f(t) - z|} g(t) \quad \lambda\text{-почти всюду на } S_\nu \setminus N_{z,f}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание лемму 1, имеем

$$\lambda e = \int_e (f(t) - z) d\nu = \int_e (f(t) - z) g(t) d|\nu| = \int_e \frac{f(t) - z}{|f(t) - z|} g(t) d|\lambda|,$$

где $e \subset S_\nu \setminus N_z$, что и означает (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $f(t) = \infty \cdot w$ естественно считать, что

$$\psi_z(t) = \frac{f(t) - z}{|f(t) - z|} = w,$$

причем ψ_z непрерывна на $S_\nu \setminus N_z$, если $f \in C(S_\nu, \tilde{\mathbb{C}})$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$, S_ν открыто-замкнуто в Q . Для того чтобы подпространство

$$L = \{\mu, \nu\}_\perp = \left\{ x \in C(Q) : \int_Q x d\mu = \int_Q x d\nu = 0 \right\}$$

было множеством существования достаточно, а если μ, ν линейно независимы, то и необходимо, чтобы выполнялись условия:

- (3а) существует $g = d\nu/d|\nu| \in C(Q)$;
- (3б) существует $f = d\mu/d\nu \in C(S_\nu, \mathbb{C})$;
- (3в) $\overline{Q \setminus N_{z,f}}$ открыто (или, равносильно, $\overset{\circ}{N}_{z,f}$ замкнуто) $\forall z \in \mathbb{C}$;
- (3г) $|\nu|(\partial N_{z,f}) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- (3д) $\forall z \in \mathbb{C}$ в каждой точке $t_0 \in \partial N_{z,f}$ существует предел

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in Q \setminus N_{z,f}}} \frac{f(t) - z}{|f(t) - z|}$$

(т.е. существует продолжение $\psi_z \in C(Q)$ функции $(f(t) - z)/|f(t) - z|$ на Q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. (3а) следует из (1а), (3б) – из лемм 5 и 6.

(3в) Возьмем $\lambda = \mu - z\nu$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда по лемме 7 $S_\lambda = (S_\mu \setminus S_\nu) \cup \overline{S_\nu \setminus N_z}$, $\overline{S_\nu \setminus N_z} = S_\nu \cap S_\lambda = S_\nu \setminus (S_\nu \setminus S_\lambda)$ открыто в силу (1б). Так как $Q \setminus S_\nu$ открыто-замкнуто по условию, то $Q \setminus \overset{\circ}{N}_z = \overline{Q \setminus N_z} = \overline{Q \setminus S_\nu} \cup \overline{S_\nu \setminus N_z}$ открыто.

(3г) Ясно, что $|\lambda|N_z = 0$ для $z \in \mathbb{C}$, а так как согласно (1в) $\nu \ll \lambda$ на $S_\lambda \supset \partial N_z$, то $|\nu|(\partial N_z) = 0$.

(3д) Для $\lambda = \mu - z\nu$ выполняется (3). В силу (1а) можно положить

$$\psi_z = \frac{1}{g} \frac{d\lambda}{d|\lambda|},$$

ибо $1/g \in C(Q)$ по доказанному (3а) и лемме 1.

Достаточность. Проверим условия теоремы 1. Возьмем произвольное $\lambda \in L^\perp \setminus \{0\}$. Имеем $\lambda = \alpha\mu + \beta\nu$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(1а) Если $\alpha = 0$, то $d\lambda/d|\lambda| = d\nu/d|\nu|$ непрерывна по условию (3а). При $\alpha \neq 0$ можно считать, что $\alpha = 1$, $\lambda = \mu - z\nu$, где $z = -\beta \in \mathbb{C}$. Очевидно, ввиду (3) и (3д) можно положить $d\lambda/d|\lambda| = \psi_z g \in C(Q)$.

(1б) Так как (1а) доказано, по лемме 7 имеем (2), тогда $S_\lambda = (S_\mu \cup S_\nu) \setminus \overset{\circ}{N}_z$ открыто относительно $S_\mu \cup S_\nu$ согласно (3в) (случай $\alpha = 0$ очевиден), а это и означает (1б).

(1в) Ввиду (3б) $\mu \ll \nu$ на S_ν , и значит, $\lambda \ll \nu$ на $S_\nu \quad \forall \lambda \in L^\perp$. Докажем, что $\nu \ll \lambda$ на S_λ (случай $\alpha = 0$ опять очевиден). Пусть $\lambda = \mu - z\nu$. По лемме 1 $d\nu/d\lambda = 1/(f(t) - z)$, $\nu \ll \lambda$ на $S_\nu \setminus N_z$. Так как $S_\lambda = (S_\mu \setminus S_\nu) \cup (S_\nu \setminus N_z) \cup \partial N_z$ по лемме 7 и доказанному (1а), то в силу (3г) $\nu \ll \lambda$ на $S_\lambda \quad \forall \lambda \in L^\perp$. Отсюда следует (1в).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отказ от условия “ S_ν открыто-замкнуто в Q ” возможен, но приводит к излишней сложности формулировок: топологические понятия – открытость, внутренность, граница – придется снабдить указанием “относительно S_ν ”. Действительно, лемма 2 показывает, что можно найти $\nu \in L^\perp$ с

$$S_\nu = \bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda,$$

а по теореме 1 проксиминальность L равносильна проксиминальности подпространства

$$L' = \left\{ x \in C(Q'') : \int_{Q''} x d\mu = \int_{Q''} x d\nu = 0 \right\},$$

где бикомпакт Q'' равен S_ν . То же самое можно сказать относительно следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – подпространство конечной коразмерности в комплексном или вещественном $C(Q)$,

$$\bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda = Q.$$

Для того чтобы L было множеством существования необходимо и достаточно, чтобы для некоторой (любой) меры $\nu \in L^\perp$ такой, что $\lambda \ll \nu$ для всех $\lambda \in L^\perp$ (см. лемму 2), и любой меры $\mu \in L^\perp$, линейно независимой с ν , выполнялись условия (3а)–(3д).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Подпространство $\{\mu, \nu\}_\perp$ – множество существования (по теореме 1) – имеет коразмерность 2 и $S_\nu = Q$. По теореме 3 выполняются условия (3а)–(3д).

Достаточность. Пусть для некоторой ν и любой μ , указанных в теореме, выполняются условия (3а)–(3д). Проверим условия теоремы 1.

(1а) Если μ линейно зависит от ν , то (1а) выполняется ввиду (3а). В силу (3а), (3б), (3д) при $z = 0$ и леммы 1 $d\mu/d|\mu| = fg/|f| \in C(Q)$.

(1б) Ввиду (2) и (3в) $S_\mu = Q \setminus N_0$ открыто, а $S_\lambda \setminus S_\mu$ замкнуто $\forall \mu, \lambda \in L^\perp$.

(1в) Пусть $\lambda, \mu \in L^\perp$ произвольны и $\nu \in L^\perp$ удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда $\lambda \ll \nu$, а так как $L' = \{\mu, \nu\}_\perp$ – множество существования по теореме 3, то $\nu \ll \mu$ на S_μ по теореме 1, примененной к L' . Поэтому и $\lambda \ll \mu$ на S_μ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$ линейно независимы. Для того чтобы подпространство $L = \{\mu, \nu\}_\perp$ в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

(5а) существуют производные Радона–Никодима

$$g = \frac{d\nu}{d|\nu|} \in C(Q), \quad f = \frac{d\mu}{d\nu} \in C(S_\nu, \tilde{C});$$

(5б) $S_\mu \cup S_\nu = Q$ и $|S_\mu \setminus S_\nu| \leq 1$;

(5в) $|N_{z,f}| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;

(5г) $|\nu|(\partial N_{z,f}) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;

(5д) для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $(f(t) - z)/|f(t) - z|$, определенная в точках $t \in S_\nu \setminus N_{z,f}$, продолжается до функции $\psi_z \in C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Используем теорему 2 при $n = 2$. (5б) выполняется ввиду следствия 1 и (2б). Так как $\overset{\circ}{N}_z \subset Q \setminus S_\lambda$, то (5в) вытекает из (2б). Поскольку S_ν открыто-замкнуто (его дополнение конечно), то по теореме 3 выполняются условия (5а), (5г), (5д).

Достаточность. Проверим условия теоремы 2 при $n = 2$.

(2в) Заметим, что условия (5а)–(5д) дают условия (3а)–(3д). Поэтому L проксимально по теореме 3. По теореме 1 для L выполняются условия (1а) и (1в), следовательно, (2а) и (2в), а также (2). Так как $Q \setminus S_\lambda \subset \overset{\circ}{N}_z$ согласно (2) и (5б), то (2б) следует из (5в).

(2г) Если $I = \{t_1\}$, но $\lambda\{t_1\} = 0 \quad \forall \lambda \in L^\perp$, то это противоречит (5б).

ТЕОРЕМА 6. Пусть бикомпакт Q , мера $\nu \in C(Q)^*$ и функция $f \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}})$ таковы, что

$$(6а) \quad S_\nu = Q;$$

$$(6б) \quad d\nu/d|\nu| \in C(Q);$$

$$(6в) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad N_{z,f} = I_z \cup B_z, \text{ где } I_z = I \cap N_{z,f} \text{ пусто или состоит из одной точки, а } |\nu|_{B_z} = 0 \text{ (это эквивалентно условиям (5в) и (5г));}$$

$$(6г) \quad \text{для любого } z \in \mathbb{C} \text{ функция } (f(t) - z)/|f(t) - z|, \text{ определенная в точках } t \in Q \setminus N_{z,f}, \text{ продолжается до функции } \psi_z \in C(Q);$$

$$(6д) \quad \int_Q |f(t)|^{n-1} d|\nu| < \infty.$$

Тогда если

$$\mu_i e = \int_e f(t)^{i-1} d\nu \quad \forall e \in \Sigma, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

то подпространство

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}^\perp = \left\{ x \in C(Q) : \int_Q x d\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

является чебышевским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что из

$$\int_Q |f(t)|^{n-1} d|\nu| < \infty$$

следует

$$\int_Q |f(t)|^{i-1} d|\nu| < \infty \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, n-1,$$

так что $\mu_i \in C(Q)^*$. Проверим условия теоремы 2.

(2а) Пусть $\lambda = \sum_1^{r+1} \alpha_i \mu_i$, т.е.

$$\lambda e = \int_e \sum_1^{r+1} \alpha_i f(t)^{i-1} d\nu = \int_e p[f(t)] d\nu,$$

где p — алгебраический полином степени $r < n$. Как и в лемме 8, получим

$$g(t) \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t) = g(t) \frac{p[f(t)]}{|p[f(t)]|} = g(t) \prod_1^r \frac{f(t) - z_i}{|f(t) - z_i|} \quad \lambda\text{-почти всюду на } \bigcap_1^r (Q \setminus N_{z_i}),$$

где z_i – корни полинома p в $\mathbb{C}$; можно считать, что $\alpha_{r+1} = 1$. В силу (6б) и (6г)

$$\frac{d\lambda}{d|\lambda|} = g \prod_1^r \psi_{z_i} \in C(Q).$$

(2б) Поскольку $Q \setminus S_\lambda = G$ открыто в Q и

$$\int_G |p[f(t)]| d|\nu| = |\lambda|G = 0,$$

то $p[f(t)] = 0$ ν -почти всюду на G , а по непрерывности $\forall t \in G$. Но $p(z) = 0$ в $r \leq n-1$ точках $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$, а $N_{z_i} = I_{z_i} \cup B_{z_i}$. Тогда $G \subset \bigcup_1^r N_{z_i} = I' \cup B$, где $I' = \bigcup_1^r I_{z_i}$, $B = \bigcup_1^r B_{z_i}$. Поскольку открытое $G \setminus I' \subset B$, то $B = \emptyset$ в силу (6а) и (6в), а $G \subset I'$, значит, $|Q \setminus S_\lambda| \leq n-1$.

(2в) Так как

$$|\lambda|e = \int_e |p[f(t)]| d|\nu|,$$

то для $E = Q \setminus \bigcup_1^r I_{z_i}$ имеем

$$\int_e \frac{d|\lambda|}{|p[f(t)]|} = \int_e \frac{|p[f(t)]| d|\nu|}{|p[f(t)]|} = |\nu|e \quad \forall e \subset E, \quad e \in \Sigma.$$

Тогда из $e \subset Q'$, $|\lambda|e = 0$, $e \subset E$ следует $|\nu|e = 0$. Если же $e \subset \bigcup N_{z_i}$, то $e \subset \bigcup B_{z_i}$, и $|\nu|e = 0$ согласно (6в). Таким образом, $\nu \ll \lambda$ на Q' . Если $\lambda' = \sum \alpha'_i \mu_i$, то

$$|\lambda'|e = \int_e \left| \sum \alpha'_i f(t)^{i-1} \right| d|\nu| = 0.$$

Поэтому и $\lambda' \ll \lambda$ на Q' .

(2г) Если $I = \{t_1, \dots, t_q\}$ и $q < n$, то определитель Вандермонда

$$\det \|\mu_i \{t_k\}\|_{k \leq q}^{i \leq q} = \det \|f(t_k)^{i-1} \nu \{t_k\}\| = \prod_{l=1}^q \nu \{t_l\} \prod_{j < i \leq q} [f(t_i) - f(t_j)] \neq 0$$

в силу (6а) и (6в). Поэтому (2г) выполняется.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n \geq 2$ и Q таковы, что в вещественном $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства коразмерности n . Тогда в комплексном $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства любой конечной коразмерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Брауна [4, теорема 2] существуют мера $\nu \in C(Q, \mathbb{R})^*$ и функция $f \in C(Q, \mathbb{R})$ такие, что $S_\nu = Q$, $\nu \geq 0$, условие (6в) выполняется $\forall z \in \mathbb{R}$ и каждая точка $t \in Q$ – локальный экстремум функции f (это эквивалентно условию (6г) в вещественном случае). Рассмотрим меры μ_i из теоремы 6. Это вещественные меры, но подпространство L комплексное. Легко видеть, что выполняются условия теоремы 6.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $n \geq 2$, Q – бикомпакт. Для того чтобы в комплексном $C(Q)$ существовало чебышевское подпространство коразмерности n достаточно, а если Q метризуемо, то и необходимо, чтобы $Q = \bar{I}$, $|I| \leq \aleph_0$.

В вещественном случае теорема установлена Гаркави [2]. Мы используем некоторые идеи его доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Можно применить теорему 7 и результат Гаркави или положить

$$\nu\{t_i\} = 2^{-i}, \quad |\nu|Q' = 0, \quad f(t_i) = i, \quad f(t) = \infty \quad \forall t \in Q',$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\} = I$, и применить теорему 6.

Необходимость. Пусть d – метрика в Q , L – чебышевское подпространство в $C(Q)$, $\text{codim } L = n \geq 2$. Тогда L проксимально, а по следствию 1

$$\bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda = Q.$$

Отсюда и из леммы 2 или из сепарабельности Q следует, что $|I| \leq \aleph_0$. По теореме 4 для некоторых мер $\mu, \nu \in L^\perp \setminus \{0\}$ выполняются условия (3а)–(3д), $S_\nu = Q$ и $f = d\mu/d\nu \in C(Q, \mathbb{C})$ отлична от константы. Положим

$$v_t(u) = \psi_z(u), \quad \text{где } t, u \in Q', \quad z = f(t) \quad (\text{см. (3д)}); \quad c_j = \exp\left(i \frac{2\pi j}{3}\right);$$

$$V_n t = \left\{ u \in Q' : d(t, u) < \frac{1}{n} \right\}, \quad V'_n t = \{ u \in V_n t : f(u) \neq f(t) \};$$

$$A_j^n = \{ t \in Q' : |v_t(u) - c_j| < \sqrt{2} \quad \forall u \in V'_n t \}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $t \in Q'$, тогда $v_t(u) \rightarrow v_t(t)$ при $u \rightarrow t$. Поскольку $|v_t(t)| = 1$, существует $j \in \{1, 2, 3\}$ с $|v_t(t) - c_j| < \sqrt{2}$. Существует, далее, $n \in \mathbb{N}$ с $|v_t(u) - c_j| < \sqrt{2} \quad \forall u \in V'_n t$. Это означает, что

$$t \in A_j^n, \quad Q' = \bigcup_{j,n} A_j^n.$$

Допустим, что найдутся $u, t \in A_j^n$ с $d(u, t) < 1/n$, $f(u) \neq f(t)$. Тогда $|v_t(u) - c_j| < \sqrt{2}$ и $|v_u(t) - c_j| < \sqrt{2}$ по определению A_j^n . Но это невозможно, так как $v_t(u) = -v_u(t)$ (при $f(u) \neq f(t)$ $|v_t(u)| = |v_u(t)| = 1$). Значит, если $t \in A_j^n$, то $A_j^n \cap V'_n t = \emptyset$, тогда $f(u) = f(t) \quad \forall u \in V_n t$. A_j^n имеет конечную ε -сеть при $\varepsilon = 1/n$, следовательно, $f(A_j^n)$ конечно, $f(Q) = f(Q') \cup f(I)$ счетно, $f(Q) = \{z_1, z_2, \dots\}$. Тогда $Q = \bigcup N_{z_i}$. По лемме 7 $\overset{\circ}{N}_{z_i} = Q \setminus S_\lambda$ ($\lambda = \mu - z_i \nu$). По теореме 2 $|\overset{\circ}{N}_{z_i}| < n$. Далее, $Q = (\bigcup \overset{\circ}{N}_{z_i}) \cup (\bigcup \partial N_{z_i}) = I' \cup B$. $B = Q \setminus I'$ замкнуто и $|\nu|B = 0$, следовательно, B нигде не плотно, а тогда $Q = \bar{I}'$, что ввиду $I' \subset I$ заканчивает доказательство теоремы 8.

ТЕОРЕМА 9. Пусть бикомпакт Q имеет следующие свойства:

(9а) замыкания непересекающихся открытых F_σ -множеств в Q не пересекаются;

(9б) существует мера $\nu \in C(Q)^*$ с $S_\nu = Q$;

(9в) существует функция $f \in C(Q)$ такая, что $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\overset{\circ}{N}_{z,f}| \leq 1$, а $|\nu|(\partial N_{z,f}) = 0$.

Тогда в $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства любой конечной коразмерности.

В вещественном случае аналогичное утверждение для экстремально несвязных бикомпактов, которые удовлетворяют условию (9а), имеется у Гаркави [3, теорема 5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Проверим условия (6б) и (6г) (остальные очевидны).

(6б) Если указанная в (9б) мера не удовлетворяет условию (6б), то можно взять $\nu' = |\nu|$, тогда $d\nu'/d|\nu'| \equiv 1$.

(6г) Допустим, что (6г) не выполняется, тогда существуют $z \in \mathbb{C}$ и направленности $t_\alpha, t_\beta \rightarrow t_0$ такие, что для $\varphi(t) = f(t) - z$ имеем

$$\frac{\varphi(t_\alpha)}{|\varphi(t_\alpha)|} \rightarrow w_1, \quad \frac{\varphi(t_\beta)}{|\varphi(t_\beta)|} \rightarrow w_2 \neq w_1.$$

Рассмотрим в $\mathbb{C}$ открытые множества

$$G_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z}{|z|} - w_j \right| < \left| \frac{w_1 - w_2}{2} \right| \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда $\varphi^{-1}(G_1), \varphi^{-1}(G_2)$ – открытые в Q непересекающиеся F_σ -множества. Их замыкания, очевидно, содержат точку t_0 , что противоречит (9б).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Phelps R. R. Chebyshev subspaces of finite codimension in $C(X)$ // Pacific J. Math. 1963. V. 13. № 2. P. 647–655.
- [2] Гаркави А. Л. Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 3. С. 641–656.
- [3] Гаркави А. Л. О компактах, допускающих чебышевские системы мер // Матем. сб. 1967. Т. 74(116). № 2. С. 209–217.
- [4] Brown A. L. Chebyshev subspaces of finite codimension in spaces of continuous functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1978. V. 26. № 1. P. 99–109.
- [5] Власов Л. П. Существование элементов наилучшего приближения в комплексном $C(Q)$ // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 627–634.
- [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [7] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin: Springer Verlag, 1970.
- [8] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства подпространств конечной коразмерности в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 2. С. 205–222.