Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Об одной экстремальной задаче на классе дифференцируемых функций многих переменных, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 192–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:13:46

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НА КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. В. Горбачёв

На многомерном классе $W_0^r H_\omega^{(n)}$ непрерывных периодических функций F с r -й производной $D^r F$ из

$$H_\omega^{(n)} = \left\{ f \in C \mid |f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i - y_i|) \forall x, y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

($\omega_i(x_i)$ – выпуклые модули непрерывности) и нулевым средним значением по каждой переменной получено точное значение величины

$$M_r(\omega) = \sup_{F \in W_0^r H_\omega^{(n)}} \|F\|_C.$$

Библиография: 6 названий.

Введение. Пусть $T^n = [0, 2\pi)^n$ – n -мерный тор, $C = C(T^n)$ – пространство непрерывных 2π -периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_C = \sup_{x \in T^n} |f(x)|$;

$$H_\omega^{(n)} = \left\{ f \in C \mid |f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i - y_i|) \forall x, y \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где $\omega_i(x_i)$ – одномерные модули непрерывности, $\omega_i(x_i) = \omega_i(\pi)$ ($x_i \geq \pi$, $i = 1, \dots, n$); для произвольного мультииндекса $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n$

$$W_0^r H_\omega^{(n)} = \left\{ f \in C \mid D^r f = \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} f \in H_\omega^{(n)}, \int_0^{2\pi} f(x) dx_i = 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

– класс функций с r -й производной из $H_\omega^{(n)}$ и нулевым средним значением по каждой переменной. Если для произвольного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$B_r(x) = \prod_{i=1}^n B_{r_i}(x_i),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, № 95-01-00657.

где

$$B_{r_i}(x_i) = \frac{1}{\pi} \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i^{-r_i} \cos\left(k_i x_i - \frac{r_i \pi}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

– одномерные ядра Бернулли, то известно, что

$$W_0^r H_{\omega}^{(n)} = B_r * H_{\omega}^{(n)} = \left\{ F(x) = (B_r * f)(x) = \int_{T^n} B_r(x-t) f(t) dt \mid f \in H_{\omega}^{(n)} \right\}. \quad (2)$$

На классе $W_0^r H_{\omega}^{(n)}$ рассмотрим экстремальную задачу нахождения величины

$$M_r(\omega) = \sup_{F \in W_0^r H_{\omega}^{(n)}} \|F\|_C. \quad (3)$$

В одномерном случае задача (3) изучалась Н.П. Корнейчуком [1]. Им было вычислено точное значение $M_r(\omega)$ в случае выпуклого модуля непрерывности. Решение основывалось на так называемой лемме Корнейчука–Стечкина [2, § 7.4]. Используя многомерный аналог этой леммы (см., далее, теорему 1), полученный в [3], [4] (оценка сверху для $n \geq 2$, оценка снизу для $n = 2$ в общем случае и для $n \geq 3$ в случае симметричного ядра) и [5] (оценка снизу для $n \geq 3$), мы находим точное значение (3) и при $n \geq 2$. Точную формулировку основной теоремы мы приведем в п. 3, фактически после ее доказательства.

В дальнейшем, S_n – множество всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{P}(A)$ – множество всех подмножеств, включая пустое, произвольного множества $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ (элементы подмножеств считаем упорядоченными по возрастанию), $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$; для произвольной перестановки $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in S_n$ положим $\sigma^m = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ($1 \leq m \leq n$), для произвольного $J \in \mathcal{P}(A)$ обозначим через $\bar{J} = A \setminus J$ дополнение множества J ; $[M]$ означает замыкание произвольного множества M , ∂M – границу M , наконец, $|A|$ – мощность конечного множества A .

1. Простейшая экстремальная задача. Пусть

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \quad (a_i < b_i),$$

$P_{ab} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ – n -мерный прямоугольник; $H_{\omega}^{(n)}(P_{ab})$ – множество непрерывных на P_{ab} функций $f(x)$, для которых

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i - y_i|) \quad \forall x, y \in P_{ab}.$$

Если точка $c = (c_1, \dots, c_n) \in P_{ab}$ ($a_i < c_i < b_i$), то

$$\begin{aligned} V_c(P_{ab}) = \left\{ \psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i) \mid \psi_i(x_i) \in L[a_i, b_i], \right. \\ \left. \psi_i(x_i) > 0 \text{ почти всюду на } (a_i, c_i), \psi_i(x_i) < 0 \text{ почти всюду на } (c_i, b_i), \right. \\ \left. \int_{a_i}^{b_i} \psi_i(x_i) dx_i = 0, i = 1, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

есть класс простейших ядер. Если для произвольного множества $J = \{j_1, \dots, j_s\} \in \mathcal{P}_n$ координаты c_i точки c равны $(a_i + b_i)/2$, $i \in J$, то

$$V_c^J(P_{ab}) = \left\{ \psi \in V_c(P_{ab}) \mid \psi_i(x_i) = -\psi_i(a_i + b_i - x_i), x_i \in \left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2} \right], i \in J \right\} \quad (5)$$

есть подкласс простейших ядер, нечетных по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$ относительно середин отрезков $[a_{j_1}, b_{j_1}], \dots, [a_{j_s}, b_{j_s}]$.

Для произвольного ядра

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i) \in V_c(P_{ab})$$

определим функции

$$\rho_i(x_i) = \rho_i(x_i; \psi_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

формулами

$$\int_{a_i}^{x_i} \psi_i(t_i) dt_i = \int_{a_i}^{\rho_i(x_i)} \psi_i(t_i) dt_i, \quad x_i \in [a_i, c_i].$$

Построенные таким образом функции $\rho_i(x_i)$ являются строго убывающими и абсолютно непрерывными на $[a_i, c_i]$, причем

$$\rho_i(a_i) = b_i, \quad \rho_i(c_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

В частности, если $\psi \in V_c^J(P_{ab})$, $J \in \mathcal{P}_n$, то

$$\rho_i(x_i; \psi_i) = \rho_i(x_i; [a_i, b_i]) = a_i + b_i - x_i, \quad x_i \in \left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2} \right], \quad i \in J. \quad (8)$$

Множество всех функций (6) будем обозначать

$$\rho(\psi) = \{\rho_i(x_i; \psi_i), i = 1, \dots, n\}.$$

ЛЕММА 1. Если $J \in \mathcal{P}_n$,

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \in V_c^J(P_{ab}), \quad \psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i) \in V_c^J(P_{ab})$$

и $\varphi_i(x_i) = \psi_i(x_i)$ для $i \in \bar{J}$, то $\rho(\varphi) = \rho(\psi)$.

Доказательство непосредственно следует из (5), (8).

Для ядра $\psi \in V_c(P_{ab})$ (4) рассмотрим экстремальную задачу нахождения величины

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) = \sup_{f \in H_{\omega}^{(n)}(P_{ab})} \left| \int_{P_{ab}} \psi(x) f(x) dx \right|,$$

которую также назовем *простейшей*.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Если $\omega_i(x_i)$ – выпуклые (вверх) модули непрерывности,

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i) \in V_c(P_{ab}), \quad \rho_i(x_i) = \rho_i(x_i; \psi_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\psi, \omega) &= 2^{n-1} \int_{P_{ac}} \psi(x) \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx = \int_{P_{ab}} \psi(x) f^*(x) dx, \\ f^*(x) &= f^*(x; \rho(\psi), \omega) \in H_{\omega}^{(n)}(P_{ab}), \end{aligned} \quad (9)$$

где экстремальная функция $f^*(x)$ строится.

Приведем, следуя [5], конструкцию функции $f^*(x)$. Далее модули непрерывности $\omega_i(x_i)$ предполагаются выпуклыми. Пусть

$$\begin{aligned} \omega_{i_0}(b_{i_0} - a_{i_0}) &= \min_i \omega_i(b_i - a_i), \\ t_i^0 &= t_i^0(\omega_i) = \inf \{t_i \in (0, b_i - a_i] \mid \omega_i(t_i) = \omega_{i_0}(b_{i_0} - a_{i_0})\}, \\ \omega_i(\rho_i(x_i^0) - x_i^0) &= \omega_i(t_i^0), \quad x_i^0 = x_i^0(\omega_i) \in [a_i, c_i], \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\widehat{\omega}_i(t_i) = \begin{cases} \omega_i(t_i), & t_i \in [0, t_i^0], \\ \omega_i(t_i^0), & t_i \in [t_i^0, b_i - a_i], \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

– выпуклые модули непрерывности, для которых

$$\begin{aligned} H_{\omega}^{(n)}(P_{ab}) &\subseteq H_{\omega}^{(n)}(P_{ab}), \\ \min_i \widehat{\omega}_i(\rho_i(x_i) - x_i) &= \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i), \quad x \in P_{ac}, \\ \mathcal{E}(\psi, \widehat{\omega}) &= \mathcal{E}(\psi, \omega). \end{aligned} \quad (12)$$

Из выпуклости и определений (10), (11) следует, что $\widehat{\omega}_i(x_i)$ – строго возрастающие на $[0, t_i^0]$, $i = 1, \dots, n$, функции. Тогда для $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \{(x_i, x_j) \in [x_i^0, c_i] \times [x_j^0, c_j] \mid \widehat{\omega}_i(\rho_i(x_i) - x_i) &= \widehat{\omega}_j(\rho_j(x_j) - x_j)\} \\ &= \{x_i^0 \leq x_i \leq c_i, x_j = l_{ji}(x_i)\}, \end{aligned}$$

где $l_{ji}(x_i)$ – строго возрастающие и абсолютно непрерывные на $[x_i^0, c_i]$ функции, для которых

$$\begin{aligned} l_{ji}(x_i^0) &= x_j^0, \quad l_{ji}(c_i) = c_j, \quad l_{ij}(l_{ji}(x_i)) = x_i, \quad l_{jk}(l_{ki}(x_i)) = l_{ji}(x_i), \\ \widehat{\omega}_i(\rho_i(x_i) - x_i) &= \widehat{\omega}_j(\rho_j(l_{ji}(x_i)) - l_{ji}(x_i)), \\ x_i &\in [x_i^0, c_i], \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \quad i \neq j \neq k. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть для $1 \leq i < j \leq n$

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \{x \in P_{ac} \mid \widehat{\omega}_i(\rho_i(x_i) - x_i) \leq \widehat{\omega}_j(\rho_j(x_j) - x_j)\} \\ &= \{x \in P_{ac} \mid x_i^0 \leq x_i \leq c_i, a_j \leq x_j \leq l_{ji}(x_i)\} \\ &\quad \cup \{x \in P_{ac} \mid a_i \leq x_i < x_i^0, a_j \leq x_j \leq x_j^0\}, \\ E_{ji} &= \{x \in P_{ac} \mid \widehat{\omega}_i(\rho_i(x_i) - x_i) \geq \widehat{\omega}_j(\rho_j(x_j) - x_j), x_j^0 \leq x_j \leq c_j\} \\ &= \{x \in P_{ac} \mid x_j^0 \leq x_j \leq c_j, a_i \leq x_i \leq l_{ij}(x_j)\} = [P_{ac} \setminus E_{ij}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для произвольной перестановки $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in S_n$ и произвольного множества $J = \{j_1, \dots, j_s\} \in \mathcal{P}_n$ определим множества

$$E(\sigma) = \bigcap_{k=1}^{n-1} E_{\sigma_k \sigma_{k+1}}$$

так, что для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in E(\sigma)$

$$\widehat{\omega}_{\sigma_1}(\rho_{\sigma_1}(x_{\sigma_1}) - x_{\sigma_1}) \leq \dots \leq \widehat{\omega}_{\sigma_n}(\rho_{\sigma_n}(x_{\sigma_n}) - x_{\sigma_n}),$$

и

$$E(\sigma, J) = \{x^J = (x_1, \dots, \rho_{j_1}(x_{j_1}), \dots, \rho_{j_s}(x_{j_s}), \dots, x_n) \mid x = (x_1, \dots, x_n) \in E(\sigma)\}.$$

Множества $E(\sigma, J)$ осуществляют разбиение P_{ac} и P_{ab} в том смысле, что

$$P_{ac} = \bigcup_{\sigma \in S_n} E(\sigma), \quad P_{ab} = \bigcup_{\substack{\sigma \in S_n \\ J \in \mathcal{P}_n}} E(\sigma, J),$$

$$E(\sigma, I) \cap E(\tau, J) = \partial E(\sigma, I) \cap \partial E(\tau, J), \quad \sigma \neq \tau \text{ или } I \neq J.$$

Определим функции

$$R_{ji}(x_i) = \begin{cases} \frac{\rho'_j(l_{ji}(x_i)) + 1}{\rho'_j(l_{ji}(x_i)) - 1}, & x_i \in [x_i^0, c_i], \\ 0, & x_i \in [a_i, x_i^0], \end{cases}$$

$$\widehat{f}_m(x_{\sigma_m}; \sigma^m) = \widehat{\omega}'_{\sigma_m}(\rho_{\sigma_m}(x_{\sigma_m}) - x_{\sigma_m}) \cdot \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \prod_{i=1}^{m-1} R_{\sigma_i \sigma_m}(x_{\sigma_m}), & m = 2, \dots, n, \end{cases}$$

$$f_m(x_{\sigma_m}; \sigma^m) = \begin{cases} \int_{x_{\sigma_m}}^{c_{\sigma_m}} \widehat{f}_m(t_{\sigma_m}; \sigma^m) dt_{\sigma_m}, & x_{\sigma_m} \in [a_{\sigma_m}, c_{\sigma_m}], \\ - \int_{c_{\sigma_m}}^{x_{\sigma_m}} \widehat{f}_m(\rho_{\sigma_m}^{-1}(t_{\sigma_m}); \sigma^m) dt_{\sigma_m}, & x_{\sigma_m} \in [c_{\sigma_m}, b_{\sigma_m}], \end{cases}$$

и для произвольного $x = (x_1, \dots, x_n) \in E(\sigma, J)$

$$f^*(x) = f(x; \sigma, J) = (-1)^{|J|} \sum_{m=1}^n (-1)^{|\sigma^m \cap J|} f_m(x_{\sigma_m}; \sigma^m),$$

где

$$f^*(x) = f^*(x; \rho(\psi), \widehat{\omega}) = f^*(x; \rho(\psi), \omega) \quad (15)$$

– искомая экстремальная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть ядра φ и ψ те же, что и в лемме 1. Тогда согласно этой лемме $\rho(\varphi) = \rho(\psi)$, и значит, согласно (15) $f^*(x; \rho(\varphi), \omega) = f^*(x; \rho(\psi), \omega)$.

2. Представление величины (9) в перестановках. Будем пользоваться обозначениями п. 1. Величина (9) допускает представление, свободное от функций $\rho_i(x_i)$ (при $n = 2$ см. [6]). Пусть

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i) \in V_c(P_{ab}),$$

$$\Psi_i(x_i) = \int_{a_i}^{x_i} \psi_i(t_i) dt_i, \quad x_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

и $\overline{\Psi}_i(x_i)$, $x_i \in [0, b_i - a_i]$, — убывающая перестановка функции $|\Psi_i(x_i)| = \Psi_i(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Справедливы равенства [4, с. 22]

$$\Psi_i(x_i) = \overline{\Psi}_i(\rho_i(x_i) - x_i), \quad x_i \in [a_i, c_i], \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

В частности, если $\psi \in V_c^J(P_{ab})$, $J \in \mathcal{P}_n$, то по формуле (8)

$$\Psi_i(x_i) = \overline{\Psi}_i(a_i + b_i - 2x_i), \quad i \in J,$$

и

$$\overline{\Psi}_i(x_i) = \Psi_i\left(\frac{a_i + b_i - x_i}{2}\right), \quad x_i \in [0, b_i - a_i], \quad i \in J. \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) = 2^{n-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i=1}^n \overline{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k, \quad (19)$$

где t_k^0 определяется в (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (10)–(12) равенство (19) достаточно доказать с модулями непрерывности $\widehat{\omega}_i(x_i)$ или, что тоже самое, с модулями непрерывности $\omega_i(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$), для которых $\omega_1(b_1 - a_1) = \dots = \omega_n(b_n - a_n)$. Будем предполагать также, что $\omega_i(x_i)$ — строго возрастающие на $[0, b_i - a_i]$ функции. Если для каких-то $i \in \{1, \dots, n\}$ это не выполнено, то функции

$$\omega_i(t_i; \varepsilon) = \begin{cases} \omega_i(t_i), & t_i \in [0, t_i^\varepsilon], \\ \omega_i(t_i^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{b_i - a_i - t_i^\varepsilon}(t_i - t_i^\varepsilon), & t_i \in [t_i^\varepsilon, b_i - a_i], \end{cases}$$

для этих i , где

$$\omega_i(t_i^\varepsilon) = \omega_i(b_i - a_i) - \varepsilon, \quad t_i^\varepsilon = t_i^\varepsilon(\omega_i) \in (0, b_i - a_i), \quad 0 < \varepsilon < \omega_i(b_i - a_i),$$

и $\omega_i(t_i; \varepsilon) = \omega_i(t_i)$ для оставшихся $i \in \{1, \dots, n\}$ являются выпуклыми модулями непрерывности, для которых условие строгой монотонности выполнено. Кроме того, при

$\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\omega_i(t_i^\varepsilon) \rightrightarrows \omega_i(t_i)$, $t_i^\varepsilon \rightarrow t_i^0$, и значит, $\mathcal{E}(\psi, \omega(\varepsilon)) \rightarrow \mathcal{E}(\psi, \omega)$ для произвольного $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} & 2^{n-1} \int_0^{b_k - a_k} \prod_{i=1}^n \bar{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k; \varepsilon); \varepsilon)) \cdot \omega'_k(t_k; \varepsilon) dt_k \\ & \rightarrow 2^{n-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i=1}^n \bar{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k. \end{aligned}$$

Условие строгой монотонности модулей непрерывности $\omega_i(x_i)$ по сути означает (см. п. 1), что для них

$$t_i^0 = t_i^0(\omega_i) = b_i - a_i, \quad x_i^0 = x_i^0(\omega_i) = a_i.$$

В этом случае функция $l_{ji}(x_i)$ ($1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) определена на всем $[a_i, c_i]$, поэтому для множества

$$E_k = \{x \in P_{ac} \mid \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) = \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k)\}$$

справедливы представления (см. также (14))

$$E_k = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n E_{ki} = \{x \in P_{ac} \mid a_k \leq x_k \leq c_k, a_i \leq x_i \leq l_{ik}(x_k), i = 1, \dots, n, i \neq k\}. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что

$$P_{ac} = \bigcup_{k=1}^n E_k, \quad E_k \cap E_l = \partial E_k \cap \partial E_l, \quad k \neq l,$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\psi, \omega) &= 2^{n-1} \int_{P_{ac}} \psi(x) \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx \\ &= 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \psi(x) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) dx = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n I_k, \end{aligned} \quad (21)$$

где в силу (16), (20)

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{E_k} \psi(x) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) dx \\ &= \int_{a_k}^{c_k} \psi_k(x_k) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) dx_k \int_{a_k}^{l_{1k}(x_k)} \psi_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{a_n}^{l_{nk}(x_k)} \psi_n(x_n) dx_n \\ &= \int_{a_k}^{c_k} \psi_k(x_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi_i(l_{ik}(x_k)) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) dx_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрируя по частям последнее равенство в (22), получим

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_{a_k}^{c_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi_i(l_{ik}(x_k)) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) d\Psi_k(x_k) \\
 &= \Psi_k(x_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi_i(l_{ik}(x_k)) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) \Big|_{a_k}^{c_k} \\
 &\quad - \int_{a_k}^{c_k} \Psi_k(x_k) d \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi_i(l_{ik}(x_k)) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (23) в силу (7) и (16) принимает на концах нулевые значения, поэтому

$$\begin{aligned}
 I_k &= - \left(\int_{a_k}^{c_k} \Psi_k(x_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi_i(l_{ik}(x_k)) \omega'_k(\rho_k(x_k) - x_k) (\rho'_k(x_k) - 1) dx_k \right. \\
 &\quad \left. + \int_{a_k}^{c_k} \Psi_k(x_k) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \Psi'_i(l_{ik}(x_k)) l'_{ik}(x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k}} \Psi_j(l_{jk}(x_k)) dx_k \right) \\
 &= -(i_1 + i_2), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где i_1 и i_2 – соответственно первый и второй интегралы. Вычислим вначале i_2 . Согласно (16) $\Psi'_i(x_i) = \psi_i(x_i)$, и, вынося знак суммы за знак интеграла, получим

$$i_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \int_{a_k}^{c_k} \Psi_k(x_k) \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) \psi_i(l_{ik}(x_k)) l'_{ik}(x_k) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k}} \Psi_j(l_{jk}(x_k)) dx_k.$$

Проводя в каждом из интегралов замену переменной $x_k = l_{ki}(x_i)$ и учитывая, что согласно (13) и (20) $l_{ik}(l_{ki}(x_i)) = x_i$, $l_{jk}(l_{ki}(x_i)) = l_{ji}(x_i)$, $l_{ki}(a_i) = a_k$, $l_{ki}(c_i) = c_k$, $\omega_k(\rho_k(l_{ki}(x_i)) - l_{ki}(x_i)) = \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i)$, получим

$$\begin{aligned}
 i_2 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \int_{a_k}^{c_k} \Psi_k(l_{ki}(x_i)) \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) \psi_i(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k}} \Psi_j(l_{ji}(x_i)) dx_i \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \int_{a_i}^{c_i} \psi_i(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \Psi_j(l_{ji}(x_i)) \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n I_i. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Вычислим i_1 . Согласно (17)

$$\Psi_k(x_k) = \overline{\Psi}_k(\rho_k(x_k) - x_k), \quad \Psi_i(l_{ik}(x_k)) = \overline{\Psi}_i(\rho_i(l_{ik}(x_k)) - l_{ik}(x_k))$$

($i = 1, \dots, n, i \neq k$). Из (13) следует, что $\rho_i(l_{ik}(x_k)) - l_{ik}(x_k) = \omega_i^{-1}(\omega_k(x_k))$ (напомним, что $\omega_i(x_i)$ — строго монотонные на отрезках $[0, b_i - a_i]$ функции, а значит, обратимые на этих отрезках). Подставим эти равенства в интеграл i_1 и сделаем замену переменной $\rho_k(x_k) - x_k = t_k$. Так как в силу (7) $\rho_k(a_k) - a_k = b_k - a_k$, $\rho_k(c_k) - c_k = 0$, то

$$i_1 = - \int_0^{b_k - a_k} \bar{\Psi}_k(t_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \bar{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k. \quad (26)$$

Подставляя выражения (26) для i_1 и (25) для i_2 в (24), придем к равенству

$$\begin{aligned} I_k &= -(i_1 + i_2) \\ &= \int_0^{b_k - a_k} \bar{\Psi}_k(t_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \bar{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n I_i, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

или, что то же самое (см. (21)),

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) = 2^{n-1} \sum_{i=1}^n I_i = 2^{n-1} \int_0^{b_k - a_k} \prod_{i=1}^n \bar{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k,$$

что и требовалось доказать.

3. Сведение экстремальной задачи к простейшей и основная теорема. Задача (3) легко может быть сведена к простейшей, если учесть свойства ядер (1). Эти свойства хорошо известны. Выпишем их, следуя [4, п. 4.2.2]. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ и

$$B_m(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - m\pi/2)}{k^m}$$

— функция Бернулли. Тогда

$$1) \ B_m(t) - 2\pi\text{-периодическая функция, } B'_m(t) = B_{m-1}(t) \text{ и}$$

$$\int_0^{2\pi} B_m(t) dt = 0;$$

$$2) \ (-1)^\mu B_{2\mu}(t) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^n k^{-2\mu} \cos kt - \text{четная строго убывающая на интервале } (0, \pi) \text{ и имеющая на нем единственный простой нуль } \nu_0 = \nu_0(2\mu) \text{ функция;}$$

$$3) \ (-1)^\mu B_{2\mu+1}(t) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^n k^{-(2\mu+1)} \sin kt - \text{нечетная функция, при этом } \text{sign}(-1)^\mu B_{2\mu+1}(t) = \text{sign} \sin t \ (t \in \mathbb{R}).$$

Свойства 1)–3) по сути означают, что

$$\begin{aligned} (-1)^\mu B_{2\mu}(t) &\in V_{\nu_0}([0, \pi]), \quad (-1)^\mu B_{2\mu+1}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \in V_{\pi/2}^{\{1\}}([0, \pi]), \\ (-1)^\mu B_{2\mu+1}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &\in V_{\pi/2}^{\{1\}}([0, \pi]) \end{aligned} \quad (27)$$

(см. определения (4), (5) в одномерном случае).

Вернемся к (3). В силу инвариантности класса $W_0^r H_\omega^{(n)}$ относительно сдвига

$$M_r(\omega) = \sup_{F \in W_0^r H_\omega^{(n)}} |F(x^*)|, \quad (28)$$

где x^* – произвольная фиксированная точка из T^n (подробнее в [4, п. 4.1.1]). Далее, из (2) следует, что

$$M_r(\omega) = \sup_{f \in H_\omega^{(n)}} \left| \int_{T^n} B_r(x^* - t) f(t) dt \right|. \quad (29)$$

Пусть

$$D = \{d_1, \dots, d_p\} = \{i \mid r_i \equiv 1 \pmod{2}\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \quad (30)$$

точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ выбрана таким образом, что

$$x_i^* = \begin{cases} 0, & i \in \overline{D}, \\ \frac{\pi}{2}, & i \in D, \end{cases} \quad (31)$$

и для произвольного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$b(x) = \prod_{i=1}^n b_i(x_i), \quad (32)$$

где

$$b_i(x_i) = (-1)^{[r_i/2]} B_{r_i}(x_i^* - x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (33)$$

В силу свойств 1)–3), (27), (30), (31)

$$\begin{aligned} b_i(x_i) &= b_i(2\pi - x_i) = (-1)^{r_i/2} B_{r_i}(x_i) \in V_{\nu_0}([0, \pi]), & i \in \overline{D}, \\ b_i(x_i) &= (-1)^{(r_i-1)/2} B_{r_i}\left(\frac{\pi}{2} - x_i\right) \in V_{\pi/2}^{\{1\}}([0, \pi]), & i \in D, \\ b_i(2\pi - x_i) &= (-1)^{(r_i-1)/2} B_{r_i}\left(\frac{\pi}{2} + x_i\right) \in V_{\pi/2}^{\{1\}}([0, \pi]), & i \in D. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $J = \{j_1, \dots, j_s\} \in \mathcal{P}_n$, для произвольной точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$

$$x^J = (x_1^J, \dots, x_n^J), \quad x_i^J = \begin{cases} x_i, & i \in \overline{J}, \\ 2\pi - x_i, & i \in J, \end{cases} \quad (35)$$

и

$$T_\pi = [0, \pi]^n, \quad T_\pi^J = \{x^J \mid x \in T_\pi\}. \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что

$$T^n = \bigcup_{J \in \mathcal{P}_n} T_\pi^J, \quad T_\pi^I \cap T_\pi^J = \partial T_\pi^I \cap \partial T_\pi^J, \quad I \neq J. \quad (37)$$

С учетом (32), (33), (37) для (29) получим оценку сверху

$$M_r(\omega) = \sup_{f \in H_\omega^{(n)}} \left| \int_{T^n} b(x) f(x) dx \right| = \sup_{f \in H_\omega^{(n)}} \left| \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \int_{T_\pi^J} b(x) f(x) dx \right| \leq \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \mathcal{E}_J, \quad (38)$$

где

$$\mathcal{E}_J = \sup_{f \in H_{\omega}^{(n)}} \left| \int_{T_\pi^J} b(x) f(x) dx \right| = \sup_{f \in H_{\omega}^{(n)}} |I_J|, \quad J \in \mathcal{P}_n. \quad (39)$$

Сделаем в интеграле I_J замену переменной $x = t^J$, $t \in T_\pi$. Воспользовавшись (35), (36), получим

$$I_J = \int_{T_\pi} b(t^J) f(t^J) dt.$$

Если

$$b^J(t) = b(t^J), \quad b_i^J(t_i) = b_i(t_i^J), \quad J \in \mathcal{P}_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (40)$$

то формулы (34), (35) по сути означают, что

$$b_i^J(t_i) = b_i^{J \cap D}(t_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad b^J(t) = b^{J \cap D}(t) = \prod_{i=1}^n b_i^J(t_i) \in V_c^D(T_\pi), \quad (41)$$

где $c = (c_1, \dots, c_n) \in T_\pi$ и

$$c_i = \begin{cases} \nu_0(r_i), & i \in \overline{D}, \\ \frac{\pi}{2}, & i \in D, \end{cases}$$

т.е. функция $b^J(t)$ является простейшим ядром, нечетным по переменным $x_{d_1}, \dots, x_{d_p}$. Далее, из (35) следует, что для любых $x, y \in T_\pi$ и всех $J \in \mathcal{P}_n$

$$|x_i^J - y_i^J| = |x_i - y_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

и значит, для всех $f \in H_{\omega}^{(n)}$

$$|f(x^J) - f(y^J)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i^J - y_i^J|) = \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i - y_i|),$$

т.е.

$$f(t^J) \in H_{\omega}^{(n)}(T_\pi) \quad \forall J \in \mathcal{P}_n. \quad (42)$$

Таким образом, из (40)–(42) следует, что задача нахождения величины (39)

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}(b^J, \omega) = \sup_{f \in H_{\omega}^{(n)}(T_\pi)} \left| \int_{T_\pi} b^J(t) f(t) dt \right|, \quad J \in \mathcal{P}_n, \quad (43)$$

является простейшей. По теореме 1

$$\mathcal{E}_J = \int_{T_\pi} b^J(t) f_J^*(t) dt,$$

где $f_J^*(t) = f^*(t; \rho(b^J), \omega) \in H_{\omega}^{(n)}(T_\pi)$. Для произвольных множеств $I, J \in \mathcal{P}_n$ ядра $b^I(t)$ и $b^J(t)$ (40) в силу (41) являются функциями из леммы 1. Отсюда согласно замечанию 1

$$f_I^*(t) = f_J^*(t) = f_{\emptyset}^*(t) = f^*(t) = f^*(t; \rho(b), \omega).$$

Таким образом, возвращаясь к (38), мы можем записать

$$M_r(\omega) \leq \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \int_{T_\pi} b^J(t) f^*(t) dt.$$

Функция $f^*(t)$ определена на T_π . Продолжим ее на весь тор T^n по формуле

$$f^*(x) = f^*(t^J), \quad x = t^J \in T_\pi^J, \quad t \in T_\pi, \quad J \in \mathcal{P}_n. \quad (44)$$

Тогда, делая замену переменной $x = t^J$, $t \in T_\pi$, и учитывая (40), получим

$$\sum_{J \in \mathcal{P}_n} \int_{T_\pi} b^J(t) f^*(t) dt = \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \int_{T_\pi^J} b(x) f^*(x) dx = \int_{T^n} b(x) f^*(x) dx.$$

Формула (44), если учесть (35), означает, что

$$f^*(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, 2\pi - x_k, \dots, x_n), \quad x_k \in [0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, n,$$

т.е. $f^*(x)$ можно считать четной по каждой переменной функцией из C . Легко видеть, что из четности и принадлежности классу $H_\omega^{(n)}(T_\pi)$ функция $f^*(x)$ принадлежит и классу $H_\omega^{(n)}$ (подробнее в [4, п. 3.1.7]). Таким образом, окончательно имеем

$$M_r(\omega) \leq \int_{T^n} b(x) f^*(x) dx$$

и $f^*(x) \in H_\omega^{(n)}$. Но это означает, что согласно (29) и (38) в точности

$$M_r(\omega) = \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \mathcal{E}_J = \int_{T^n} b(x) f^*(x) dx, \quad (45)$$

т.е. $f^*(x)$ есть экстремальная функция в задаче (38), а значит, и в (29). Очевидно, что в задаче (28), а значит, и в (3), экстремальной будет функция

$$F^*(x) = F_r^*(x; \omega) = (B_r * f^*)(x), \quad F^*(x) \in W_0^r H_\omega^{(n)}, \quad (46)$$

и $M_r(\omega) = |F(x^*)|$, где x^* — точка (31).

Воспользовавшись теоремой 2, представим величину $M_r(\omega)$ в перестановках функций (1). Пусть

$$\Psi_i(x_i) = \left| \int_0^{x_i} b_i(t_i) dt_i \right|, \quad x_i \in [0, 2\pi], \quad i = 1, \dots, n.$$

По свойству 1), используя (30)–(34), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_i(x_i) &= \left| \int_0^{x_i} B_{r_i}(x_i^* - t_i) dt_i \right| = |B_{r_i+1}(x_i^*) - B_{r_i+1}(x_i^* - x_i)| \\ &= \begin{cases} |B_{r_i+1}(x_i)|, & i \in \overline{D}, \\ \left| B_{r_i+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - B_{r_i+1}\left(\frac{\pi}{2} - x_i\right) \right|, & i \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

Если теперь

$$\Psi_i^J(x_i) = \left| \int_0^{x_i} b_i^J(t_i) dt_i \right|, \quad x_i \in [0, \pi], \quad J \in \mathcal{P}_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (48)$$

то по формулам (35), (40), (41)

$$\Psi_i^J(x_i) = \Psi_i^{J \cap D}(x_i) = \begin{cases} \Psi_i(x_i), & i \in \overline{J \cap D}, \\ \left| \int_0^{x_i} b_i(2\pi - t_i) dt_i \right|, & i \in J \cap D. \end{cases} \quad (49)$$

Последний интеграл в (49) согласно свойству 1), формулам (34) и (47) равен

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x_i} b_i(2\pi - t_i) dt_i \right| &= \left| B_{r_i+1}\left(\frac{\pi}{2} + x_i\right) - B_{r_i+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &= \Psi_i(2\pi - x_i), \quad x_i \in [0, \pi], \quad i \in J \cap D. \end{aligned} \quad (50)$$

Так как ядро (40) $b^J(t) = b^{J \cap D}(t) \in V_c^D(T_\pi)$, $\{1, \dots, n\} = \overline{D} \cup (\overline{J} \cap D) \cup (J \cap D)$, то из (18), (49), (50) следует, что

$$\overline{\Psi}_i^J(x_i) = \overline{\Psi}_i^{J \cap D}(x_i) = \begin{cases} \overline{\Psi}_i(x_i), & i \in \overline{D}, \\ \Psi_i\left(\frac{\pi - x_i}{2}\right), & i \in \overline{J} \cap D, \\ \Psi_i\left(\frac{3\pi + x_i}{2}\right), & i \in J \cap D, \end{cases} \quad x_i \in [0, \pi], \quad i = 1, \dots, n. \quad (51)$$

По теореме 2 и согласно (48) можем записать для (43) с произвольным $k \in \{1, \dots, n\}$ и $J \in \mathcal{P}_n$

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}(b^J, \omega) = 2^{n-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i=1}^n \overline{\Psi}_i^J(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k.$$

Тогда величина $M_r(\omega)$ по формуле (45) равна

$$M_r(\omega) = \sum_{J \in \mathcal{P}_n} \mathcal{E}_J = \sum_{J \in \mathcal{P}_n} 2^{n-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i=1}^n \overline{\Psi}_i^J(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \omega'_k(t_k) dt_k. \quad (52)$$

Формулу (52) можно несколько упростить, если учесть, что согласно (41) и (43)

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{J \cap D}, \quad J \in \mathcal{P}_n.$$

Тогда нетрудно получить

$$\sum_{J \in \mathcal{P}_n} \mathcal{E}_J = 2^{|\overline{D}|} \sum_{J \in \mathcal{P}(D)} \mathcal{E}_J, \quad |\overline{D}| = n - p. \quad (53)$$

Учитывая (51)–(53), окончательно получим

$$\begin{aligned} M_r(\omega) &= 2^{n+|\overline{D}|-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i \in \overline{D}} \overline{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \sum_{J \in \mathcal{P}(D)} \prod_{i \in \overline{J}} \Psi_i\left(\frac{\pi - \omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))}{2}\right) \\ &\quad \times \prod_{i \in J} \Psi_i\left(\frac{3\pi + \omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))}{2}\right) \omega'_k(t_k) dt_k. \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, под пустым произведением понимается 1.

Сформулируем полученный результат.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Если $\omega_i(x_i)$ – выпуклые модули непрерывности, D есть множество (30), $\Psi_i(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) есть функции (47), то величина $M_r(\omega)$, определяемая (3) для произвольного $k \in \{1, \dots, n\}$, равна

$$M_r(\omega) = 2^{n+|\overline{D}|-1} \int_0^{t_k^0} \prod_{i \in \overline{D}} \overline{\Psi}_i(\omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))) \cdot \sum_{J \in \mathcal{P}(D)} \prod_{i \in \overline{J}} \Psi_i\left(\frac{\pi - \omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))}{2}\right) \times \prod_{i \in J} \Psi_i\left(\frac{3\pi + \omega_i^{-1}(\omega_k(t_k))}{2}\right) \omega'_k(t_k) dt_k = \|F^*\|_C, \quad (54)$$

где точка t_k^0 взята из теоремы 2. Равенство в (54) достигается на экстремальной функции $F^*(x)$ (46).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П. Об экстремальных свойствах периодических функций // Докл. АН УССР. 1962. № 8. С. 993–998.
- [2] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.
- [3] Степанец А. И. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных функций двух переменных // Вопросы теории приближения функций и ее приложений. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1976. С. 160–178.
- [4] Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наукова думка, 1981.
- [5] Горбачёв Д. В. Экстремальная функция для одного функционала на классе $H_\omega^{(n)}(P_{ab})$ // Изв. ТулГУ. Сер. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 51–66.
- [6] Степанец А. И. Решение одной экстремальной задачи для классов непрерывных функций двух переменных в перестановках // Укр. матем. ж. 1979. Т. 31. № 1. С. 95–101.

Тульский государственный университет

Поступило
11.12.96