Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гусейнов, Об одном операторе преобразования, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 206–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:22:46

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

И. М. Гусейнов

Доказывается существование оператора преобразования с условием на бесконечности, который переводит решение уравнения $y'' = \lambda^{2n}y$ в решение уравнения

$$y'' - (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))y = \lambda^{2n}y.$$

Изучаются некоторые свойства ядра оператора преобразования.

Библиография: 10 названий.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(x)y = \lambda^{2n}y \quad (1)$$

на полуоси $0 \leq x < \infty$, где λ – комплексный параметр; $y = y(x, \lambda)$ – неизвестная функция. Предположим, что выполняются следующие условия:

- а) функции $q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$ дифференцируемы на полуоси $(0, \infty)$;
- б) интегралы

$$\int_0^\infty (1+u)^{1-1/n} |q'_k(u)| du, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

сходятся, и $\sigma(0) < +\infty$, где

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^\infty (1+u)^{1-k/n} |q_k(u)| du,$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

В данной работе доказывается, что при условиях а), б) существует оператор преобразования (общее определение таких операторов имеется в [1], [2]), который переводит решение $\exp\{-\lambda^n x\}$ простого уравнения $y'' = \lambda^{2n}y$ в решение уравнения (1) с условием на бесконечности. Заметим, что при $n = 1$ оператор преобразования полностью изучен в работах [3], [4]. Поэтому в дальнейшем будем считать $n > 1$. Оказывается, в этом случае для исследования свойств ядра оператора преобразования естественно использовать интегралы и производные Римана–Лиувилля дробного порядка.

Для формулировки основного результата работы введем следующие обозначения:

$$\sigma_1(x) = \int_x^\infty |q_0(u)| du + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^\infty (1+u)^{1-k/n} |q'_k(u)| du,$$

$$\|\varphi\|(x) = \int_0^\infty |\varphi(x,t)| dt, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Через I_t^α и D_t^α ($0 < \alpha < 1$) обозначим соответственно операторы интегрирования и дифференцирования дробного порядка по t (см. [5], [6]):

$$I_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(x, s) ds, \quad D_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} \varphi(x, t).$$

ТЕОРЕМА. При условиях а) и б) уравнение (1) для всех λ из замкнутого множества $\Delta_0 = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \pi/(2n)\}$ имеет решение $f(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \lambda) \exp\{\lambda^n x\} = 1, \quad (2)$$

и существует ядро $A(x, t)$ оператора преобразования такое, что

$$f(x, \lambda) = \exp\{-\lambda^n x\} + \int_x^\infty A(x, t-x) \exp\{-\lambda^n t\} dt. \quad (3)$$

Ядро $A(x, t)$ обладает следующими свойствами:

1) выполнено

$$\|A\|(x) \leq \exp\{\sigma(x)\} - 1; \quad (4)$$

2) на полуоси $(0, \infty)$ существуют суммируемые по t производные $D_x A(x, t)$, $D_t^{1/n} A(x, t), \dots, (D_t^{1/n})^n A(x, t)$, причем

$$\|D_x A\|(x) \leq \sigma_1(x) (1 + \sigma(x)) \exp\{\sigma(x)\}; \quad (5)$$

3) выполнено

$$I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^m A(x, t) \big|_{t=0} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k+1)!} \left(\frac{1}{2} \int_x^\infty q_{n-k-1}(u) du \right)^{m-k+1}, \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^m A(x, t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1; \quad (7)$$

4) если функции $q_0(x), q'_1(x), \dots, q'_{n-1}(x)$ имеют непрерывные производные и интегралы

$$\int_0^\infty (1+u) |q'_0(u)| du, \quad \int_0^\infty (1+u)^{1-1/n} |q''_k(u)| du, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

сходятся, то функция $A(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$D_x^2 A(x, t) - 2D_x (D_t^{1/n})^n A(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) (D_t^{1/n})^k A(x, t) = 0. \quad (8)$$

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение, представляющее также самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Если функция $q(t)$ дифференцируема на $(0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty (1+t)^{1-\alpha} |q'(t)| dt < +\infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то производные $(D_t^\alpha)^m q(t)$, $m = 1, 2, \dots, [1/\alpha]$, суммируемы и имеет место неравенство

$$\int_0^\infty |(D_t^\alpha)^m q(t)| dt \leq \frac{2}{\Gamma(2-m\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha m} |q'(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что существует производная $D_t^\alpha q(t)$, причем

$$D_t^\alpha q(t) = \frac{q(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} q'(s) ds$$

(см. [5], [6]). Представляя это соотношение в виде

$$D_t^\alpha q(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \int_t^\infty q'(s) ds + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ((t-s)^{-\alpha} - t^{-\alpha}) q'(s) ds,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |D_t^\alpha q(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} dt \int_t^\infty |q'(s)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty dt \int_0^t ((t-s)^{-\alpha} - t^{-\alpha}) |q'(s)| ds \\ &= \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{1-\alpha} |q'(s)| ds, \end{aligned}$$

т.е. для $m = 1$ лемма доказана. Для остальных значений m она доказывается аналогично, исходя из равенства

$$(D_t^\alpha)^m q(t) = \frac{q(0)}{\Gamma(1-\alpha m)} t^{-\alpha m} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha m)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha m} q'(s) ds.$$

СЛЕДСТВИЕ. При условиях леммы имеет место оценка

$$\int_0^\infty \left| (D_t^\alpha)^m q\left(x + \frac{t}{2}\right) \right| dt \leq \frac{2^{2-m\alpha}}{\Gamma(2-m\alpha)} \int_x^\infty t^{1-\alpha m} |q'(t)| dt, \quad x \geq 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ проведем в несколько этапов.

1. Сначала докажем существование решения уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) со свойствами (3) и (4).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x, \lambda) = \exp\{-\lambda^n x\} + \int_x^\infty \frac{\operatorname{sh}\{\lambda^n(t-x)\}}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) f(t, \lambda) dt, \quad \lambda \in \Delta_0, \quad (10)$$

эквивалентное задаче (1), (2), и будем искать решение этого уравнения в виде (3). Для того чтобы функция такого вида удовлетворяла уравнению (10), должно выполняться равенство

$$\int_0^\infty A(x, t) \exp\{-\lambda^n t\} dt = \int_x^\infty \frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) dt + \int_x^\infty \frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \int_0^\infty A(t, s) \exp\{-\lambda^n s\} ds dt, \quad (11)$$

и наоборот, если функция $A(x, t)$ удовлетворяет равенству (11), то функция (3) является решением уравнения (10), т.е. и решением задачи (1), (2).

Используя формулу (см., например, [7, с. 408])

$$\frac{\exp\{-\lambda^n t\}}{\lambda^{n-k}} = \frac{1}{\Gamma(1-k/n)} \int_t^\infty (u-t)^{-k/n} \exp\{-\lambda^n u\} du, \quad \lambda \in \Delta_0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12)$$

преобразуем правую часть равенства (11) так, чтобы она имела вид, аналогичный левой части. Так как

$$\frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^{n-k}} = \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \left(\int_0^\infty u^{-k/n} \exp\{-\lambda^n u\} du - \int_{2(t-x)}^\infty (u-2t+2x)^{-k/n} \exp\{-\lambda^n u\} du \right),$$

для первого слагаемого в правой части (11) получаем

$$\int_x^\infty \frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \int_0^\infty \left(t^{-k/n} \int_x^\infty q_k(u) du - \int_x^{x+t/2} (t+2x-2u)^{-k/n} q_k(u) du \right) \exp\{-\lambda^n t\} dt. \quad (13)$$

Аналогично можно показать, что второе слагаемое в правой части равенства (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty \frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \int_0^\infty A(t, s) \exp\{-\lambda^n s\} ds dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \int_0^\infty \left(\int_0^t (t-s)^{-k/n} \int_x^\infty q_k(u) A(u, s) du ds - \int_0^t ds \int_x^{x+(t-s)/2} (t+2x-2u-s)^{-k/n} q_k(u) A(u, s) du \right) \exp\{-\lambda^n t\} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (13) следует, что равенство (11) выполняется при всех значениях $\lambda \in \Delta_0$, если функция $A(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} A(x, t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \left(t^{-k/n} \int_x^\infty q_k(u) du - \int_x^{x+t/2} (t+2x-2u)^{-k/n} q_k(u) du \right) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \int_0^t \left((t-s)^{-k/n} \int_x^\infty q_k(u) A(u, s) du \right. \\ & \left. - \int_x^{x+(t-s)/2} (t+2x-2u-s)^{-k/n} q_k(u) A(u, s) du \right) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, для того чтобы закончить доказательство первой части теоремы, достаточно показать, что уравнение (14) имеет решение, удовлетворяющее неравенству (4).

К уравнению (14) применяем метод последовательных приближений, положив

$$\begin{aligned} A_0(x, t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \left(t^{-k/n} \int_{x+t/2}^\infty q_k(u) du \right. \\ & \left. - \int_x^{x+t/2} ((t+2x-2u)^{-k/n} - t^{-k/n}) q_k(u) du \right), \\ A_l(x, t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \int_0^t \left((t-s)^{-k/n} \int_{x+(t-s)/2}^\infty q_k(u) A_{l-1}(u, s) du \right. \\ & \left. - \int_x^{x+(t-s)/2} ((t+2x-2u-s)^{-k/n} - (t-s)^{-k/n}) q_k(u) A_{l-1}(u, s) du \right) ds, \\ & l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

После несложных преобразований (15) имеем

$$\|A_l\|(x) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^\infty u^{1-k/n} |q_k(u)| \cdot \|A_{l-1}\|(u) du,$$

и так как

$$\|A_0\|(x) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^\infty u^{1-k/n} |q_k(u)| du \leq \sigma(x),$$

методом математической индукции легко доказывается, что

$$\|A_l\|(x) \leq \frac{(\sigma(x))^{l+1}}{(l+1)!}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что ряд

$$A(x, \cdot) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(x, \cdot) \quad (17)$$

сходится равномерно по $x \in [0, \infty)$ в пространстве $L_1(0, \infty)$, а его сумма удовлетворяет неравенству (4), являясь одновременно решением уравнения (14).

2. Теперь докажем свойство 2) функции $A(x, t)$. Из формулы (15) следует, что функции $A_l(x, t)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, имеют производные по x , причем

$$\begin{aligned} D_x A_0(x, t) &= \frac{1}{2} q_0\left(x + \frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \left(t^{-k/n} \int_{x+t/2}^{\infty} q'_k(u) du \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{x+t/2} ((t+2x-2u)^{-k/n} - t^{-k/n}) q'_k(u) du \right), \\ D_x A_l(x, t) &= \int_x^{x+t/2} q_0(u) A_{l-1}(u, t-2u+2x) du \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\Gamma(1-k/n)} \int_0^t \left((t-s)^{-k/n} \int_{x+(t-s)/2}^{\infty} (q'_k(u) A_{l-1}(u, s) \right. \\ &\quad \left. + q_k(u) D_u A_{l-1}(u, s)) du \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{x+t/2} ((t+2x-2u-s)^{-k/n} - (t-s)^{-k/n}) \right. \\ &\quad \left. \times (q'_k(u) A_{l-1}(u, s) + q_k(u) D_u A_{l-1}(u, s)) du \right) ds. \end{aligned}$$

Аналогично оценке для $A_l(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned} \|D_x A_0\|(x) &\leq \int_x^{\infty} |q_0(u)| du + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^{\infty} u^{1-k/n} |q'_k(u)| du \leq \sigma_1(x), \\ \|D_x A_l\|(x) &\leq \int_x^{\infty} |q_0(u)| \cdot \|A_{l-1}\|(u) du \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} \int_x^{\infty} u^{1-k/n} (|q'_k(u)| \cdot \|A_{l-1}\|(u) \\ &\quad + |q_k(u)| \cdot \|D_u A_{l-1}\|(u)) du. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая оценку (16), методом математической индукции получим

$$\|D_x A_l\|(x) \leq \sigma_1(x) \frac{(\sigma(x))^l}{l!} (l+1).$$

Следовательно, ряд (17) можно почленно дифференцировать по x и имеет место оценка (5).

Чтобы доказать суммируемость производных $(D_t^{1/n})^m A(x, t)$, $m = 1, 2, \dots, n$, последовательно применим оператор $D_t^{1/n}$ к обеим частям уравнения (14) и воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} D_t^{1/n} \left(\frac{t^{-k/n}}{\Gamma(1-k/n)} \right) &= \frac{t^{-(k+1)/n}}{\Gamma(1-(k+1)/n)}, \\ D_t^{1/n} \left(\frac{1}{\Gamma(1-k/n)} \int_x^{x+t/2} (t+2x-2u)^{-k/n} q_k(u) du \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-(k+1)/n)} \int_x^{x+t/2} (t+2x-2u)^{-(k+1)/n} q_k(u) du \end{aligned}$$

(см. [5, с. 47]). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 (D_t^{1/n})^m A(x, t) = & \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2\Gamma(1 - (k+m)/n)} \left(t^{-(k+m)/n} \int_x^\infty q_k(u) du \right. \\
 & - \int_x^{x+t/2} (t+2x-2u)^{-(k+m)/n} q_k(u) du \Big) \\
 & + \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2\Gamma(1 - (k+m)/n)} \int_0^t \left((t-s)^{-(k+m)/n} \int_x^\infty q_k(u) A(u, s) du \right. \\
 & - \int_x^{x+(t-s)/2} (t+2x-2u-s)^{-(k+m)/n} q_k(u) A(u, s) du \Big) ds \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2} (D_t^{1/n})^k q_{n-m+k} \left(x + \frac{t}{2} \right) - \int_x^\infty q_{n-m+k}(u) (D_t^{1/n})^k A(u, t) du \right. \\
 & \left. - \int_x^{x+t/2} q_{n-m+k}(u) (D_\xi^{1/n})^k A(u, \xi) \Big|_{\xi=t+2x-2u} du \right), \quad m = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда в силу леммы и оценки (4) имеем

$$\begin{aligned}
 \|D_t^{1/n} A\|(x) & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-(k+1)/n}}{\Gamma(2 - (k+1)/n)} \int_x^\infty u^{1-(k+1)/n} |q_k(u)| du \cdot \exp\{\sigma(x)\}, \\
 \|(D_t^{1/n})^m A\|(x) & \leq \sum_{k=0}^{n-m} \frac{2^{1-(k+m)/n}}{\Gamma(2 - (k+m)/n)} \int_x^\infty u^{1-(k+m)/n} |q_k(u)| du \cdot \exp\{\sigma(x)\} \\
 & + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2 - k/n)} \int_x^\infty u^{1-k/n} |q'_{n-m+k}(u)| du \\
 & + \sum_{k=1}^{m-1} \int_x^\infty |q_{n-m+k}(u)| \cdot \|(D_t^{1/n})^k A\|(u) du, \quad m = 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Следовательно, производные $(D_t^{1/n})^m A(x, t)$, $m = 1, 2, \dots, n$, суммируемы по t на интервале $(0, \infty)$.

3. Применяя оператор $I_t^{(n-1)/n}$ к обеим частям равенств (14), (18) и используя оценки (9) и (4), непосредственно получаем, что функция $A(x, t)$ удовлетворяет условиям (6) и (7).

4. Если функции $q_0(x), q'_1(x), \dots, q'_{n-1}(x)$ непрерывно дифференцируемы и интегралы

$$\int_0^\infty (1+u) |q'_0(u)| du, \quad \int_0^\infty (1+u)^{1-1/n} |q''_k(u)| du, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

сходятся, то, рассуждая так же, как на втором этапе, можно показать, что существуют суммируемые по t производные $D_x^2 A(x, t)$, $D_x (D_t^{1/n})^m A(x, t)$, $m = 1, 2, \dots, n$, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^m D_x A(x, t) = 0.$$

Для того чтобы функция вида (3) удовлетворяла уравнению (1), должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty D_x^2 A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt - 2\lambda^n \int_0^\infty D_x A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(x) \left(1 + \int_0^\infty A(x, t) \exp\{-\lambda^n t\} dt \right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны, используя формулу (12) при $k = 1$ и соотношения (7), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty A(x, t) \exp\{-\lambda^n t\} dt &= \lambda^n \int_0^\infty I_t^{(n-1)/n} A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt \\ &= I_t^{(n-1)/n} A(x, t) \Big|_{t=0} + \int_0^\infty D_t^{1/n} A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt. \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \lambda^k \int_0^\infty A(x, t) \exp\{-\lambda^n t\} dt &= \sum_{m=0}^{k-1} \lambda^m I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^m A(x, t) \Big|_{t=0} \\ &+ \int_0^\infty (D_t^{1/n})^k A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt, \\ &k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \lambda^n \int_0^\infty D_x A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt &= \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^m D_x A(x, t) \Big|_{t=0} \\ &+ \int_0^\infty (D_t^{1/n})^n D_x A(x, t) \cdot \exp\{-\lambda^n t\} dt. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (19) и проведем некоторые упрощения, придем к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(D_x^2 A(x, t) - 2(D_t^{1/n})^n D_x A(x, t) - \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) (D_t^{1/n})^m A(x, t) \right) \exp\{-\lambda^n t\} dt \\ & - \lambda^{n-1} (2I_t^{(n-1)/n} D_x A(x, t) \Big|_{t=0} + q_{n-1}(x)) - \lambda^{n-2} (2I_t^{(n-1)/n} D_t^{1/n} D_x A(x, t) \Big|_{t=0} \\ & + q_{n-1}(x) I_t^{(n-1)/n} A(x, t) \Big|_{t=0} + q_{n-2}(x)) - \dots \\ & - (2I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^{n-1} D_x A(x, t) \Big|_{t=0} \\ & + q_{n-1}(x) I_t^{(n-1)/n} (D_t^{1/n})^{n-2} A(x, t) \Big|_{t=0} + \dots + q_0(x)) = 0. \end{aligned}$$

Так как функция $A(x, t)$ удовлетворяет условию (6), внеинтегральные члены в последнем равенстве обращаются в 0, следовательно, она будет удовлетворять уравнению (8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На каждом секторе

$$\Delta_k = \left\{ \lambda : -\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

существует решение $f_k(x, \lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x, \lambda) \exp\{(-1)^k \lambda^n x\} = 1$$

и представимое в виде

$$f_k(x, \lambda) = \exp\{(-1)^{k-1} \lambda^n x\} + \int_x^\infty A(x, t-x) \exp\{(-1)^{k-1} \lambda^n t\} dt.$$

Используя свойства ядер $A_l(x, t)$, можно исследовать прямую и обратную задачи рассеяния для уравнения (1) с граничным условием $y(0) = 0$. Этому вопросу будет посвящена одна из следующих работ автора.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя формулу (12), нетрудно показать, что при $\lambda \in \Delta_0, t-x \geq 0$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1 - \exp\{-2\lambda^n(t-x)\}}{2\lambda^{n-k}} \right| \leq \frac{2^{1-k/n}}{\Gamma(2-k/n)} (t-x)^{1-k/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда из уравнения (10) стандартным методом (см., например, [8], [9]) получаем

$$|f(x, \lambda) \exp\{\lambda^n x\} - 1| \leq \frac{C\sigma(x)}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Delta_0, \quad C > 0.$$

Отсюда согласно теореме типа Винера–Пэли [6, с. 443] существует функция $B(x, t)$ такая, что

$$f(x, \lambda) = \exp\{-\lambda^n x\} \left(1 + \int_0^\infty B(x, t) e_\rho(t; \lambda) dt \right),$$

где $e_\rho(t; \lambda) = t^{1/\rho-1} E_\rho(-\lambda t^{1/\rho}; 1/\rho)$, $\rho = n/(2n-1)$, а $E_\rho(z; \mu)$ – функция Миттага–Леффлера. Как и в [9], можно изучать свойства функции $B(x, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если выполняются условия а), б) и

$$\int_0^\infty |q_n(t)| dt < +\infty, \quad \int_0^\infty (1+t) |q'_n(t)| dt < +\infty,$$

то для решения $f(x, \lambda)$ уравнения

$$y'' - \sum_{k=0}^n q_k(x) y = \lambda^{2n} y,$$

удовлетворяющего условию (2), имеет место следующее треугольное представление:

$$f(x, \lambda) = \exp\left\{-\lambda^n x + \frac{1}{2} \int_x^\infty q_n(t) dt\right\} + \int_0^\infty A(x, t-x) \exp\{-\lambda^n t\} dt.$$

Отметим, что для $n = 1$ это представление получено в работе [10] (см. также [8, с. 186]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
- [2] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
- [3] Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106. № 2. С. 187–190.
- [4] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [5] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [6] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [7] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.
- [8] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
- [9] Гусейнов И. М. О некоторых представлениях для решения дифференциальных уравнений высокого порядка // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1986. № 1. С. 27–32.
- [10] Jaulent M., Jean C. The inverse s -wave scattering problem for a class of potentials depending on energy // Comm. Math. Phys. 1972. V. 28. P. 117–220.

Бакинский государственный университет
им. М. А. Расулзаде

Поступило
15.08.95