Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, С. А. Хонов, Е. А. Иванов, О точной оценке максимального правдоподобия состава расслоенной совокупности, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 216–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:29:59

УДК 519.2

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ СОСТАВА РАССЛОЕННОЙ СОВОКУПНОСТИ

Г. И. Ивченко, С. А. Хонов, Е. А. Иванов

В заметке находится точный вид экстремальных значений целочисленного вектора $\overline{N} = (N_1, \dots, N_k)$, максимизирующих функцию

$$\prod_{j=1}^k \binom{N_j}{l_j}$$

при произвольных целых $l_1 > 0, \dots, l_k > 0, k \geq 2$, и заданном $N^0 = N_1 + \dots + N_k$, а также обсуждаются статистические применения этого результата.

Библиография: 2 названия.

1. В приложениях математической статистики в ряде случаев приходится иметь дело с моделями, неизвестный параметр которых представляет собой целочисленный вектор $\overline{N} = (N_1, \dots, N_k)$ с известным значением $N^0 = N_1 + \dots + N_k$, входящий в выражение функции правдоподобия в виде сомножителя

$$L(\overline{N}; \bar{l}) = \prod_{j=1}^k \binom{N_j}{l_j},$$

называемого иногда *ядром правдоподобия* (здесь $\bar{l} = (l_1, \dots, l_k)$ – наблюдаемое значение соответствующей достаточной статистики, и везде предполагается, что все $l_j > 0$ и $N^0 \geq l = l_1 + \dots + l_k$). В качестве примера можно привести задачу выборочного контроля, когда изделия классифицируются по $k \geq 2$ категориям качества. Для контроля партии из N^0 изделий, содержащей неизвестное число N_j изделий j -го сорта, $j = 1, \dots, k$, из нее отбирается по схеме простой бесповторной выборки $n < N^0$ изделий. В этом случае достаточная статистика $\overline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_k)$, где η_j – число изделий j -го сорта в выборке, имеет многомерное гипергеометрическое распределение

$$P_{\overline{N}}(\overline{\eta} = \bar{l}) = L(\overline{N}; \bar{l}) \binom{N^0}{n}^{-1}, \quad l_1 + \dots + l_k = n.$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00387.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдению над $\bar{\eta}$ оценить состав $\bar{N} = (N_1, \dots, N_k)$ партии.

Вообще, с подобной ситуацией часто сталкиваются при выборочном обследовании расслоенных конечных совокупностей вида $U = U_1 \cup \dots \cup U_k$, $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$, когда размеры $N_j = |U_j|$, $j = 1, \dots, k$, составляющих ее слоев неизвестны и должны быть оценены по результатам соответствующего статистического эксперимента. Подобные задачи активно обсуждались в литературе: накоплено большое число результатов для различных схем получения данных (организации выборки) и различных методов оценивания неизвестного состава $\bar{N} = (N_1, \dots, N_k)$ совокупности.

Обзор этих результатов и соответствующую библиографию можно найти в последних работах на эту тему [1], [2].

Настоящая заметка посвящена решению одной из открытых задач в этой области. Мы рассматриваем оценивание параметра $\bar{N}$ по принципу правдоподобия, который, как отмечается в [1], с различных позиций является в данной проблематике более предпочтительным и согласно которому в качестве оценки параметра $\bar{N}$ выбирается точка максимума ядра правдоподобия $L(\bar{N}; \bar{l})$. Таким образом, по определению оценка максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\bar{N}} = (\hat{N}_1, \dots, \hat{N}_k)$ параметра $\bar{N}$ определяется в данном случае как решение следующей дискретной задачи на условный экстремум:

$$\hat{\bar{N}} = \arg \max_{\bar{N} \in \mathcal{N}} L(\bar{N}; \bar{l}), \quad \mathcal{N} = \{\bar{N} : N_1 + \dots + N_k = N^0\}. \quad (1)$$

Специфика задачи (1) заключается в том, что здесь мы имеем дело с функциями от многомерного целочисленного аргумента, для которых отсутствуют общие методы решения подобных экстремальных задач. Лишь для простейшего случая $k = 2$ (ядро L является функцией фактически одного переменного N_1) решение задачи (1) достаточно просто и известно из литературы: $\hat{N}_1 = [(N^0 + 1)l_1/l]$, где $[\cdot]$ есть целая часть числа; при этом, если число $(N^0 + 1)l_1/l$ целое, то $\hat{N}_1 - 1$ также является ОМП параметра N_1 . Для общего случая $k \geq 2$ явный вид решений задачи (1) дается нами впервые. Мы также выясняем степень неоднозначности ОМП $\hat{\bar{N}}$ и приводим простой алгоритм для ее компьютерных вычислений.

2. Ключевую роль в дальнейшем играет функция

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^k [\lambda l_j], \quad \lambda \geq 0. \quad (2)$$

Свойства этой функции детально обсуждаются в п. 3, здесь мы отметим лишь некоторые из них, необходимые для формулировки и доказательства основного результата заметки: $F(\lambda)$ – неубывающая, непрерывная справа ступенчатая целочисленная функция, точки скачков которой кратны обратным значениям параметров l_j , для нее однозначно определена обратная функция

$$F^{-1}(N) = \min\{\lambda : F(\lambda) \geq N\}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

множество значений которой совпадает с множеством точек роста F . Введем также множество $J(\lambda) = \{j : \lambda l_j - \text{целое}\}$, т.е. множество номеров тех слагаемых в (2), которые

в точке λ претерпевают единичный скачок. Тогда величина скачка функции F в точке λ есть

$$\Delta F(\lambda) = F(\lambda) - F(\lambda - 0) = |J(\lambda)|.$$

Пусть теперь $\lambda^0 = F^{-1}(N^0)$ и $J^0 = J(\lambda^0)$, т.е. λ^0 – точка скачка F , определяемая из условия $F(\lambda^0 - 0) < N^0 \leq F(\lambda^0)$, а $|J^0|$ – величина этого скачка. Отметим, что $\lambda^0 \geq 1$ (так как $N^0 \geq l$), причем $\lambda^0 = 1$ тогда и только тогда, когда $N^0 = l$, а $|J^0| \leq k$. Наконец, положим $\delta^0 = F(\lambda^0) - N^0$, тогда $0 \leq \delta^0 < |J^0|$.

ТЕОРЕМА. Решения задачи (1) имеют вид

$$\widehat{N} = ([\lambda^0 l_j] - I_D(j), j = 1, \dots, k), \quad (3)$$

где D – произвольное подмножество размера δ^0 множества J^0 и $I_D(j)$ – его индикатор.

Прежде чем доказывать теорему, дадим некоторые пояснения. Множество J^0 по определению всегда непусто, а параметр δ^0 может быть равен 0, и тогда $D = \emptyset$. Лишь в этом случае, т.е. при $F(\lambda^0) = N^0$, ОМП $\widehat{N}$ определяется однозначно: $\widehat{N} = ([\lambda^0 l_j], j = 1, \dots, k)$. В противном случае, т.е. при $\delta^0 > 0$, существует

$$\binom{|J^0|}{\delta^0}$$

различных вариантов выбора подмножества $D \subset J^0$ и, следовательно, соответствующих версий ОМП. Таким образом, в рассматриваемой задаче ОМП определяется, вообще говоря, неоднозначно, что характерно для моделей с дискретным параметром. Однако, неоднозначность здесь имеет специфический характер: различные версии ОМП отличаются лишь изменением на 1 некоторых координат. Наконец, предположение, что все $l_j > 0$, не является ограничением общности задачи, так как в противном случае (но при $l > 0$) лишь понижается размерность вектора $\overline{N}$, поскольку функция $L(\overline{N}; \overline{l})$ фактически зависит от N_j или $l_j > 0$. В терминах же ОМП это означает, что при $l_j = 0$ полагается $\widehat{N}_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. По определению ОМП $\widehat{N}$ есть такая точка гиперплоскости $\mathcal{N}$ (см. (1)), в которой выполняется неравенство $L(\overline{N} + \overline{\delta}; \overline{l}) \leq L(\overline{N}; \overline{l})$, где $\overline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)$ – произвольный ненулевой целочисленный вектор, удовлетворяющий условиям $\delta_1 + \dots + \delta_k = 0$ и $N_j + \delta_j \geq l_j$ для всех j . Обозначив $J_- \equiv \{j : \delta_j < 0\}$, $J_+ = \{j : \delta_j > 0\}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{L(\overline{N} + \overline{\delta}; \overline{l})}{L(\overline{N}; \overline{l})} &= \prod_{j \in J_-} \frac{(N_j + \delta_j + 1 - l_j) \cdots (N_j - l_j)}{(N_j + \delta_j + 1) \cdots N_j} \prod_{j \in J_+} \frac{(N_j + 1) \cdots (N_j + \delta_j)}{(N_j + 1 - l_j) \cdots (N_j + \delta_j - l_j)} \\ &= \prod_{j \in J_-} \left(1 - \frac{l_j}{N_j + \delta_j + 1}\right) \cdots \left(1 - \frac{l_j}{N_j}\right) \bigg/ \prod_{j \in J_+} \left(1 - \frac{l_j}{N_j + 1}\right) \cdots \left(1 - \frac{l_j}{N_j + \delta_j}\right) \\ &\leq \prod_{j \in J_-} \left(1 - \frac{l_j}{N_j}\right)^{|\delta_j|} \bigg/ \prod_{j \in J_+} \left(1 - \frac{l_j}{N_j + 1}\right)^{\delta_j}. \end{aligned}$$

В частности, если все ненулевые $\delta_j = \pm 1$, то в последнем неравенстве имеет место знак равенства, и рассматриваемое отношение будет не больше 1 тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{l_j}{N_j + 1} \leq \frac{l_i}{N_i}, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Так как

$$\sum_{j \in J_-} |\delta_j| = \sum_{j \in J_+} \delta_j,$$

то точка $\overline{N}$, удовлетворяющая (4), будет точкой и глобального максимума функции $L(\overline{N}; \overline{l})$. Тем самым, любое решение неравенств (4), принадлежащее гиперплоскости $\mathcal{N}$, является ОМП $\widehat{N}$.

Проверим теперь, что любая точка из указанных в (3), является ОМП, т.е. для нее выполняется (4) и она лежит на $\mathcal{N}$. Для индексов $j \in J^0$ величины $\lambda^0 l_j$ являются целыми числами, поэтому в (3)

$$\widehat{N}_j = \begin{cases} \lambda^0 l_j - 1 & \text{при } j \in D, \\ \lambda^0 l_j & \text{при } j \in J^0 \setminus D. \end{cases}$$

Если $j \notin J^0$, то $\lambda^0 l_j - 1 < \widehat{N}_j = [\lambda^0 l_j] < \lambda^0 l_j$. Таким образом, в любом случае (для любого j) $\lambda^0 l_j - 1 \leq \widehat{N}_j \leq \lambda^0 l_j$ или $\widehat{N}_j \leq \lambda^0 l_j \leq \widehat{N}_j + 1$. Отсюда имеем $\widehat{N}_j / l_j \leq \lambda^0 \leq (\widehat{N}_j + 1) / l_j$ для любого j , и значит, для $\widehat{N} = (\widehat{N}_1, \dots, \widehat{N}_k)$ также выполняются неравенства (4). Наконец, тот факт, что точка $\widehat{N}$ лежит на гиперплоскости $\mathcal{N}$, следует из очевидных равенств

$$\sum_{j=1}^k \widehat{N}_j = F(\lambda^0) - \sum_{j=1}^k I_D(j) = N^0 + \delta^0 - |D| = N^0.$$

Обратно, покажем, что любое решение системы (4), принадлежащее $\mathcal{N}$, может быть представлено в виде (3). Пусть точка $\overline{N} \in \mathcal{N}$ удовлетворяет соотношениям (4). Обозначим

$$\lambda' = \max_j \frac{N_j}{l_j}, \quad E = \left\{ j : \frac{N_j}{l_j} = \lambda' \right\}$$

и убедимся сначала, что $\lambda' = \lambda^0$.

Во-первых, для любого j имеем $N_j \leq \lambda' l_j$, т.е. $N_j \leq [\lambda' l_j]$, следовательно, $N^0 \leq F(\lambda')$. Во-вторых, для $j \in E$ имеем $N_j = \lambda' l_j$, а в силу (4) $\lambda' l_j \leq N_j + 1$. Отсюда следует, что для любого $\lambda < \lambda'$ $[\lambda l_j] \leq \lambda l_j < N_j$ при $j \in E$ и $[\lambda l_j] \leq N_j$ при всех j . Поскольку множество E непусто, отсюда получаем соотношение $F(\lambda) < N^0$. Таким образом, $F(\lambda) < N^0 \leq F(\lambda')$ для любого $\lambda < \lambda'$, т.е. $\lambda' = F^{-1}(N^0) = \lambda^0$.

Положим теперь $D = \{j : \lambda^0 l_j = N_j + 1\}$. Ясно, что $D \subset J^0$ и при $j \notin D$ $[\lambda^0 l_j] \leq N_j$, что с учетом полученного выше неравенства $N_j \leq [\lambda' l_j]$ дает равенство $N_j = [\lambda^0 l_j]$. Таким образом, имеем представление типа (3):

$$N_j = \begin{cases} \lambda^0 l_j - 1 & \text{при } j \in D, \\ [\lambda^0 l_j] & \text{при } j \notin D, \end{cases} = [\lambda^0 l_j] - I_D(j), \quad j = 1, \dots, k,$$

из которого также следует, что $N^0 = F(\lambda^0) - |D|$, т.е. $|D| = F(\lambda^0) - N^0 = \delta^0$. Теорема доказана.

К вычислительным аспектам, связанным с формулами (3), мы вернемся в п. 4.

3. Для практического использования результата (3) нужно иметь удобный алгоритм вычисления параметра $\lambda^0 = F^{-1}(N^0)$, т.е. алгоритм обращения функции F , определенной в (2). В данном пункте мы проводим более детальный анализ этой функции и получаем ее конструктивное описание, которое позволяет построить эффективный и удобный для компьютерной реализации алгоритм.

Введем две вспомогательные функции, первая из которых для любого $\lambda \geq 0$ вычисляет ту точку скачка, в которой функция F впервые становится равной $F(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \min\{\lambda' : F(\lambda') = F(\lambda)\},$$

а вторая вычисляет ближайшую после λ точку скачка F :

$$n(\lambda) = \min\{\lambda' : F(\lambda') > F(\lambda)\}.$$

Таким образом, вместе эти две функции определяют полуинтервал постоянства функции F , которому принадлежит точка λ : $F(\lambda') = F(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda' \in [p(\lambda), n(\lambda))$.

Для практического вычисления этих функций имеются удобные формулы:

$$p(\lambda) = \max_j \frac{[\lambda l_j]}{l_j}, \quad n(\lambda) = \min_j \frac{[\lambda l_j] + 1}{l_j}.$$

Действительно, так как всегда $[\lambda l_j] \leq \lambda l_j < [\lambda l_j] + 1$, имеют место неравенства

$$\frac{[\lambda l_j]}{l_j} \leq p(\lambda) \leq \lambda < n(\lambda) \leq \frac{[\lambda l_j] + 1}{l_j}. \quad (5)$$

Отсюда, во-первых, имеем $[\lambda l_j] \leq p(\lambda) l_j \leq \lambda l_j$, т.е. $[p(\lambda) l_j] = [\lambda l_j]$ и, следовательно, $F(p(\lambda)) = F(\lambda)$.

Во-вторых, для любого $\lambda' \in [\lambda, n(\lambda))$ выполняются соотношения $\lambda l_j \leq \lambda' l_j < [\lambda l_j] + 1$, откуда также $[\lambda' l_j] = [\lambda l_j]$ и, следовательно, $F(\lambda') = F(\lambda)$. Таким образом, на полуинтервале $[p(\lambda), n(\lambda))$ функция F постоянна и равна $F(\lambda)$. В то же время, как $p(\lambda)$ (при $\lambda \geq (\max_j l_j)^{-1}$), так и $n(\lambda)$ (при любом $\lambda \geq 0$) являются точками скачков функции F , поскольку они кратны обратным величинам некоторых l_j . При этом величина скачка $|J(n(\lambda))|$ в точке $n(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$|J(n(\lambda))| = \left| \left\{ j : \frac{[\lambda l_j] + 1}{l_j} = n(\lambda) \right\} \right|, \quad (6)$$

и, аналогично, в точке $p(\lambda)$

$$|J(p(\lambda))| = \left| \left\{ j : \frac{[\lambda l_j]}{l_j} = p(\lambda) \right\} \right|. \quad (7)$$

Действительно, например, $J(n(\lambda))$ – это по определению множество тех j , для которых $n(\lambda) l_j$ – целое, т.е. в него входят указанные в (6) значения j . Для остальных j в силу (5) $\lambda l_j < n(\lambda) l_j < [\lambda l_j] + 1$, т.е. $n(\lambda) l_j$ не может быть целым числом. Таким

образом, $J(n(\lambda))$ включает лишь указанные в (6) значения j . Аналогично проверяется и (7).

Роль функции $n(\lambda)$ не исчерпывается сказанным выше. Эта функция обладает важным свойством “динамики”: поскольку $n(\lambda)$ всегда вычисляет непосредственно следующую за λ точку скачка функции F , то с ее помощью можно последовательно перечислить все точки скачков на любом интервале $\lambda > \lambda_0 \geq 0$. Именно, это будет последовательность $\{\lambda_t = n(\lambda_{t-1}) = n_t(\lambda_0), t = 1, 2, \dots\}$; здесь n_t есть t -я итерация функции n : $n_t(\lambda) = n(n_{t-1}(\lambda))$, $n_0(\lambda) = \lambda$. Последовательность $\{|J(\lambda_t)|, t = 1, 2, \dots\}$ (см. (6)) задает величины соответствующих скачков. Тем самым, функцию $F(\lambda)$ при $\lambda \geq \lambda_0$ можно конструктивно описать с помощью двойной последовательности $\{(\lambda_t, |J(\lambda_t)|), t = 1, 2, \dots\}$:

$$F(\lambda) = F(\lambda_0) + \sum_{i=1}^t |J(\lambda_i)|, \quad \lambda \in [\lambda_t, \lambda_{t+1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

(пустая сумма при $t = 0$ здесь заменяется на 0). В частности, при $\lambda_0 = 0$ формула (8) дает конструктивное представление F на всей полупрямой $\lambda \geq 0$.

Наконец, представление (8) позволяет предложить следующий простой алгоритм вычисления обратной функции $F^{-1}(N)$ для любого целого $N \geq F(\lambda_0)$ (а при $\lambda = 0$ – для любого $N = 1, 2, \dots$): при $N > F(\lambda_0)$

$$F^{-1}(N) = \lambda_{\tau(N)}, \quad \text{где } \tau(N) = \min\{t : F(\lambda_t) \geq N\}, \quad (9)$$

если же $N = F(\lambda_0)$, то $F^{-1}(N) = p(\lambda_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если требуется вычислить значение обратной функции F^{-1} лишь в отдельной конкретной точке N^0 (как, например, в формулах (3)), то общий алгоритм (9) можно несколько усовершенствовать, если учесть, что при $\lambda_0 = (N^0 + 1)/l$ имеют место оценки

$$N^0 + 1 - k < F(\lambda_0) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{N^0 + 1}{l} l_j \right] \leq N^0 + 1.$$

Здесь $F(\lambda_0) = N^0 + 1$ тогда и только тогда, когда $J(\lambda_0) = \{1, 2, \dots, k\}$, т.е. λ_0 – точка скачка и $\Delta F(\lambda_0) = |J(\lambda_0)| = k$, следовательно, в этом случае $F^{-1}(N^0) = \lambda_0$. Если же $F(\lambda_0) \leq N^0$, то “работает” общий алгоритм (9), при этом неравенство $F(\lambda_0) < N^0$ возможно лишь при $k > 2$, и в этом случае число шагов алгоритма не превосходит $N^0 - F(\lambda_0) \leq k - 2$ (t -м шагом алгоритма является вычисление $\lambda_t = n(\lambda_{t-1})$ и сравнение $F(\lambda_t)$ с N^0 , $t = 1, 2, \dots$).

4. Вернемся к нашей основной задаче и применим изложенную в п. 3 методику для вычисления ОМП (3). Как отмечено в п. 2, при $N^0 = l$ параметр $\lambda^0 = F^{-1}(N^0) = 1$ и, следовательно, $\widehat{N} = \bar{l}$ (что, конечно, очевидно). Поэтому далее будем считать, что $N^0 > l$.

Применяя усовершенствованный (в соответствии с замечанием) вариант алгоритма (9), получим, что при $F(\lambda_0) = N^0 + 1$ параметры $\lambda^0 = \lambda_0 = (N^0 + 1)/l$, $\delta^0 = F(\lambda_0) - N^0 = 1$, и поэтому имеется k версий ОМП: $\widehat{N}_i = \lambda_0 \bar{l} - \bar{e}_i$, $i = 1, \dots, k$, где $\bar{e}_i$ – i -й единичный вектор.

В случае $F(\lambda_0) = N^0$ согласно (9) $\lambda^0 = p(\lambda_0)$, $\delta^0 = 0$, и по формуле (3) ОМП определяется однозначно: $\widehat{N} = ([p(\lambda_0)l_j] = [\lambda_0 l_j], j = 1, \dots, k)$. При $k = 2$ этими двумя вариантами все исчерпывается, и мы имеем (указанный в п. 1) известный результат.

Если же $k > 2$ (что представляет для нас наибольший интерес), то возможен также случай $F(\lambda_0) < N^0$, и здесь в соответствии с (9) $\lambda^0 = \lambda_{\tau^0}$, где $\tau^0 = \min\{t : F(\lambda_t) \geq N^0\}$. Тем самым, вместе с (3) мы имеем эффективно реализуемый (за число шагов, не превосходящее $k - 2$) конструктивный алгоритм вычисления всех возможных значений ОМП.

ПРИМЕР. Пусть $k = 3$, $N^0 = 14$ и $\vec{l} = (3, 1, 4)$. Здесь $\lambda_0 = 15/8$, $F(\lambda_0) = 13$, т.е. имеем случай $F(\lambda_0) < N^0$. Согласно алгоритму (9) находим $\lambda_1 = n(\lambda_0) = 2$, $F(\lambda_1) = 16$, откуда $\lambda^0 = F^{-1}(N^0) = \lambda_1$ и $\delta^0 = 2$. Далее, $J^0 = \{1, 2, 3\}$ и подмножество D в теореме может быть выбрано тремя способами: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$. Поэтому имеем три версии ОМП: $(5, 1, 8)$, $(5, 2, 7)$ и $(6, 1, 7)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ivchenko G. I., Khonov S. A. Maximum likelihood estimation for a stratified finite population // Math. Methods Statist. 1994. V. 3. № 4. P. 346–361.
- [2] Ивченко Г. И., Хонов С. А. Статистическое оценивание состава конечной совокупности // Дискретная матем. 1996. Т. 8. № 1. С. 3–40.

Московский государственный институт электроники и математики

Поступило
07.06.96