Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Ультраметрические пространства и связанные с ними гильбертовы пространства, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 223–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:49:22

УДК 517.518

УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Р. С. Исмагилов

В работе приводятся простые доказательства вложимости ультраметрических пространств в гильбертовы. Основная часть работы посвящена ультраметрическим пространствам, названным вполне-бесконечными. Рассматриваются связанные с ними гильбертовы пространства, автоморфизмы вполне-бесконечных пространств и соответствующие им линейные операторы.

Библиография: 7 названий.

Введение

Метрическое пространство (X, d) называется *ультраметрическим*, если

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \quad x, y, z \in X. \quad (1)$$

Известно, что оно допускает изометрическое вложение в вещественное гильбертово пространство. Этому вопросу посвящены работы И. А. Вестфрида и А. Ф. Тимана [1], [2]. Несколько ранее в работах автора [3], [4] было доказано, что для ультраметрических пространств выполняется критерий вложимости в гильбертово пространство; впрочем, само утверждение о вложимости не было сформулировано явно. В § 1 предлагаемой работы мы воспроизведем этот результат, несколько усовершенствовав изложение. Мы приведем также другое доказательство вложимости. Оба доказательства просты и отличаются от доказательств Вестфрида и Тимана.

Затем мы рассматриваем ультраметрические пространства, названные вполне-бесконечными. Недискретное пространство этого класса не локально компактно, что препятствует построению привычных объектов функционального анализа (меры, инвариантной относительно изометрических преобразований, функциональных пространств и т.д.). Тем не менее, мы построим некоторую алгебру функций на вполне-бесконечном пространстве (X, d) и введем в ней семейство скалярных произведений, инвариантных относительно любой изометрии. Получается набор гильбертовых пространств – аналог пространств типа L_2 на пространствах с мерой.

В § 3 вводятся автоморфизмы вполне-бесконечных пространств: аналоги преобразования пространств с мерой, оставляющего меру квазиинвариантной. Определяется якобиан автоморфизма – аналог производной Радона–Никодима преобразованной меры

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского математического общества.

относительно исходной. Автоморфизму ставится в соответствие линейный оператор в упомянутой алгебре функций, он задается заменой переменной с последующим умножением на некоторую степень якобиана (стандартный прием в теории преобразований пространств с мерой). Для изометрических преобразований якобиан равен 1, а соответствующий оператор унитарен в каждом из указанных гильбертовых пространств. Отметим, что некоторые автоморфизмы с якобианом, отличным от тождественной единицы, порождают унитарные операторы в некоторых из упомянутых гильбертовых пространств. Мы построим группу автоморфизмов с этим свойством.

В качестве примера рассматривается поле $\mathbb{F}$ формальных степенных рядов с коэффициентами из бесконечного поля и проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ с естественной метрикой d . Естественное действие группы $GL_2(\mathbb{F})$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ задает автоморфизмы вполне-бесконечного пространства $(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}), d)$. Это приводит к унитарным представлениям группы $GL_2(\mathbb{F})$ в указанных гильбертовых пространствах (представления группы $SL_2(\mathbb{F})$ рассмотрены в [3]–[6]). Эти группы не локально компактны. Подчеркнем, что в этой, сугубо элементарной, работе не используются какие-либо сведения о представлениях групп (термин “представление” поясняется в п. 3.1).

§ 1. Изометрические вложения ультраметрических пространств

Мы покажем, что ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в пространство функций. Затем приведем два простых доказательства вложимости в гильбертово пространство. Как упоминалось во введении, другие изложения этих вопросов содержатся в работах [1]–[5], [7].

Если (X, d) – произвольное метрическое пространство, то шар радиуса $r \geq 0$ с центром $a \in X$ определяется равенством

$$U_a^r = \{x \mid x \in X, d(x, a) \leq r\}.$$

Для ультраметрического пространства (X, d) шары U_a^r, U_b^r совпадают при $d(a, b) \leq r$ и не пересекаются при $d(a, b) > r$, это следует из (1). Положим

$$\text{diam } X = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

1. Универсальные метрические пространства. Начнем с примеров ультраметрических пространств, состоящих из функций.

1) Возьмем произвольное множество A , содержащее более одного элемента, и ограниченное числовое множество $E \subset (0, \infty)$. Через A^E обозначим множество всех отображений $\xi: E \rightarrow A$. Введем в A^E метрику δ по формулам $\delta(\xi_1, \xi_2) = \sup\{t \mid \xi_1(t) \neq \xi_2(t)\}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$, $\delta(\xi_1, \xi_1) = 0$. Получим ультраметрическое пространство (A^E, δ) .

2) Возьмем такое же множество A и неограниченное сверху множество $E \subset (0, \infty)$. Зафиксируем отображение $\eta: E \rightarrow A$. Обозначим через A_η^E множество всех отображений $\xi: E \rightarrow A$ таких, что $\xi(t) = \eta(t)$ для достаточно больших $t \in E$. Введем метрику δ так же, как и выше. Получим ультраметрическое пространство (A_η^E, δ) .

Следующие предложения выявляют свойство “универсальности” построенных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Любое ультраметрическое пространство (X, d) , диаметр которого конечен, изометрически вкладывается в некоторое (A^E, δ) . Если пространство X конечно, то множества A, E также можно выбрать конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – множество всех положительных значений, принимаемых метрикой d . Через A обозначим множество всех шаров пространства X . Рассмотрим пространство (A^E, δ) . Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие функцию $\xi_x \in A^E$ вида $\xi_x(t) = U_x^t$, $t \in E$. Покажем, что полученное отображение $x \mapsto \xi_x$, $x \in X$, изометрично. Для этого возьмем точки $x, y \in X$, $x \neq y$. Пусть $r = d(x, y)$. Если $t \in E$, $t < r$, то $U_x^t \cap U_y^t = \emptyset$; если $t \geq r$, то $U_x^t = U_y^t$. Итак,

$$\delta(\xi_x, \xi_y) = \sup\{t \mid \xi_x(t) \neq \xi_y(t)\} = r = d(x, y),$$

что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любое ультраметрическое пространство бесконечного диаметра изометрически вкладывается в некоторое (A_η^E, δ) .

Доказывается аналогично.

В работе [5, лемма 9] показано, что любое конечное ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в поле формальных степенных рядов. Другая конструкция предложена в работе Вестфрида [2]. Изометрические вложения в другие пространства, необязательно ультраметрические, рассмотрены в [7].

2. Вложение в гильбертово пространство. Известно и легко доказывается, что метрическое пространство допускает изометрическое вложение в вещественное гильбертово пространство, если этим свойством обладает любое его конечное подпространство. Поэтому мы ограничимся конечными пространствами.

Итак, пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство, $c_0 > c_1 > \dots > c_m = 0$ – множество всех значений метрики d . Наша цель – изометрически вложить (X, d) в вещественное гильбертово пространство.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вложимости. Не ограничивая общности, будем считать, что для любой точки $x \in X$ шары $U_x^{c_k}$, $1 \leq k \leq m$, попарно различны, ибо согласно предложению 1 любое X вкладывается в пространство с этим свойством. Обозначим через $H(X)$ вещественное гильбертово пространство, ортонормированным базисом которого служит набор всех шаров пространства (X, d) , отличных от X . Каждый такой шар имеет вид $U_a^{c_k}$, $a \in X$, $1 \leq k \leq m$. Определим отображение $\varphi: X \rightarrow H(X)$ формулой

$$x \mapsto \varphi(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k U_x^{c_k}, \quad \lambda_k = \sqrt{\frac{c_{k-1}^2 - c_k^2}{2}}. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отображение $\varphi: X \rightarrow H(X)$, заданное формулой (2), изометрично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точки $x, y \in X$, $x \neq y$. Тогда $d(x, y) = c_p$, где $0 \leq p < m$, и

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k U_x^{c_k}, \quad \varphi(y) = \sum_{j=1}^m \lambda_j U_y^{c_j}.$$

Шары $U_x^{c_k}, U_y^{c_j}$ совпадают тогда и только тогда, когда $k = j$, $d(x, y) \leq c_k$; последнее неравенство равносильно неравенству $k \leq p$. Следовательно, $(U_x^{c_k}, U_y^{c_k}) = 1$ при $k \leq p$, $(U_x^{c_k}, U_y^{c_j}) = 0$ при $k \neq j$ и $p < k = j$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 &= |\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 - 2(\varphi(x), \varphi(y)) = 2 \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 - 2 \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \\ &= 2 \sum_{k=p+1}^m \lambda_k^2 = \sum_{k=p+1}^m (c_{k-1}^2 - c_k^2) = c_p^2 = d^2(x, y). \end{aligned}$$

Итак, $|\varphi(x) - \varphi(y)| = d(x, y)$. Этим доказано предложение 3.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЛОЖИМОСТИ. Доказательство, которое будет сейчас приведено, содержится, по-существу, в [3, лемма 10], а также в [4, лемма 2]. Мы лишь упростим изложение.

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство, L – линейное пространство всех функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих конечный носитель. Определим в L билинейную форму

$$[f_1, f_2] = - \sum_{x, y \in X} d^2(x, y) f_1(x) f_2(y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Метрическое пространство (X, d) допускает изометрическое вложение в гильбертово пространство в том и только том случае, если квадратичная форма $[f, f]$ неотрицательно определена на подпространстве*

$$L_0 = \left\{ f \mid f \in L, \sum_{x \in X} f(x) = 0 \right\},$$

т.е. $[f, f] \geq 0$ при $f \in L_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и раньше, X конечно, n – число его элементов. Пусть $[f, f] \geq 0$ при $f \in L_0$. Положим $L_{00} = \{f \mid f \in L_0, [f, f] = 0\}$. Тогда L_{00} – линейное подпространство в L_0 и в факторпространстве $H = L_0/L_{00}$ возникает положительно определенное скалярное произведение $\frac{1}{2}[f_1, f_2]$. Образ элемента $f \in L_0$ при естественном отображении $L_0 \rightarrow H$ обозначим через $\bar{f}$. Для любой точки $a \in X$ введем функцию δ_a вида $\delta_a(x) = 0$ при $x \neq a$, $\delta_a(a) = 1$. Возьмем также функцию $f^0(x) = 1$, $x \in X$. Заметим, что $\delta_a - \frac{1}{n}f^0 \in L_0$, тем самым, определено отображение $\psi: X \rightarrow H$ формулой $\psi(a) = \overline{\delta_a - \frac{1}{n}f^0}$. Для любых точек $x, y \in X$ имеем $|\psi(x) - \psi(y)|^2 = \frac{1}{2}[\delta_x - \delta_y, \delta_x - \delta_y] = d^2(x, y)$. Итак, отображение $\psi: X \rightarrow H$ изометрично.

Мы доказали, что условие $[f, f] \geq 0$, $f \in L_0$, достаточно для вложимости пространства (X, d) в гильбертово пространство. Необходимость этого условия очевидна. Предложение 4 доказано.

Обратимся к ультраметрическому пространству (X, d) . Пусть оно конечно и $c_0 > \dots > c_m = 0$ – множество всевозможных значений, принимаемых метрикой d . Для любого $k = 0, 1, \dots, m$ пространство X является объединением l_k попарно не

пересекающихся шаров радиуса c_k . Обозначим эти шары через $U(k, i)$, $1 \leq i \leq l_k$. Заметим, что $l_0 = 1$, $l_m = |X|$. Введем квадратичные формы

$$S_k(f) = \sum_{i=1}^{l_k} \left| \sum_{x \in U(k, i)} f(x) \right|^2, \quad f \in L, \quad 0 \leq k \leq m.$$

В частности,

$$S_0(f) = \left| \sum_{x \in X} f(x) \right|^2, \quad S_m(f) = \left| \sum_{x \in X} f(x) \right|^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Справедливо равенство*

$$- \sum_{x, y \in X} d^2(x, y) f(x) f(y) = -c_0^2 S_0(f) + \sum_{k=1}^m (c_{k-1}^2 - c_k^2) S_k(f), \quad f \in L. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно для любого $k = 0, 1, \dots, m$ подсчитаем сумму

$$\sum_{d(x, y) \leq c_k} f(x) f(y).$$

Неравенство $d(x, y) \leq c_k$ равносильно тому, что точки x, y лежат в одном из шаров $U(k, i)$. Отсюда

$$\sum_{d(x, y) \leq c_k} f(x) f(y) = \sum_{i=1}^{l_k} \sum_{x, y \in U(k, i)} f(x) f(y) = \sum_{i=1}^{l_k} \left| \sum_{x \in U(k, i)} f(x) \right|^2 = S_k(f).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} - \sum_{x, y \in X} d^2(x, y) f(x) f(y) &= - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 \sum_{d(x, y) = c_k} f(x) f(y) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 \left(\sum_{d(x, y) \leq c_k} f(x) f(y) - \sum_{d(x, y) \leq c_{k+1}} f(x) f(y) \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 (S_k(f) - S_{k+1}(f)) \\ &= -c_0^2 S_0(f) + \sum_{k=1}^m (c_{k-1}^2 - c_k^2) S_k(f). \end{aligned}$$

Предложение 5 доказано.

Из (3) следует, что

$$- \sum_{x, y \in X} d^2(x, y) f(x) f(y) \geq c_{m-1}^2 \sum_{x \in X} |f(x)|^2, \quad f \in L_0.$$

Отсюда получаем, используя предложение 4, что (X, d) вложимо в гильбертово пространство.

§ 2. Вполне-бесконечные пространства

Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство, $E = d(X \times X)$ – множество значений метрики d . Назовем пространство (X, d) *вполне-бесконечным*, если для любого положительного $r \in E$ и любого конечного набора точек $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \subset X$ такого, что $d(x_i, x_j) = r$ при $i \neq j$, существует такая точка $x_{n+1} \in X$, что $d(x_{n+1}, x_i) = r$, $1 \leq i \leq n$. Тем самым, множество $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ может быть включено в бесконечное множество равноотстоящих точек. Если при этом множество E дискретно, т.е. состоит из изолированных точек, то назовем (X, d) *пространством дискретного типа*; если E конечно, то отнесем (X, d) к *конечному типу*. Если, наконец, E является плотным подмножеством отрезка $[0, a]$, $0 < a \leq \infty$, то назовем (X, d) *пространством непрерывного типа*.

В п. 2.1 мы рассмотрим некоторые простые свойства вполне-бесконечных пространств, а в п. 2.2 введем алгебры функций и гильбертовы пространства функций на них.

1. Свойства вполне-бесконечных пространств. В следующих леммах (X, d) является вполне-бесконечным пространством, а E – множеством значений метрики d .

ЛЕММА 1. Пусть (Y, δ) – конечное ультраметрическое пространство, F – множество значений метрики δ , причем $F \subset E$. Пусть $Y_0 \subset Y$. Тогда любое изометрическое отображение $Y_0 \rightarrow X$ можно продолжить до изометрического отображения $Y \rightarrow X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – число точек множества F . Применим индукцию по m . Если $m = 2$, то утверждение леммы вытекает из определения вполне-бесконечного пространства. Пусть теперь $m > 2$ и множество F состоит из чисел $r_1 > \dots > r_m = 0$. Шары радиуса r_2 образуют разбиение $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_p$, $p > 1$. По индуктивному допущению утверждение леммы верно для любого шара Y_i . Отсюда легко выводится, что оно верно и для Y .

ЛЕММА 2. Для любого конечного множества $S \subset X$ существует такое множество S^0 , что $S \subset S^0 \subset X$ и (S^0, d) – вполне-бесконечное пространство конечного типа.

Доказательство, как и выше, основано на индукции по числу точек в множестве значений метрики d на подпространстве S , при этом используется лемма 1. Несложные подробности опускаем.

2. Алгебры функций и гильбертовы пространства функций. Начнем с простого замечания. Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. Для любой функции $\varphi: [0, \infty)^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, и любого набора точек $a_i \in X$, $1 \leq i \leq n$, возникает функция $\varphi(d(x, a_1), \dots, d(x, a_n))$, $x \in X$. Взяв набор функций φ , можно образовать алгебру функций на X , порожденную функциями указанного вида. В следующем предложении будет показано, что для ультраметрического пространства эта конструкция имеет интересную особенность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство, $a_i \in X$, $1 \leq i \leq n$, $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, $t_i \geq 0$, – комплекснозначная функция. Тогда существуют

функции $\psi_i(t)$, $t \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, обладающие следующими свойствами:

1) справедливо равенство

$$\varphi(d(x, a_1), \dots, d(x, a_n)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(d(x, a_i)), \quad x \in X; \quad (4)$$

2) существуют такие точки $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$, что каждая из функций $\psi_i(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, представляется в виде линейной комбинации функций, полученных из функции $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ заменой t_i на t для некоторых значений i и заменой t_i на константы t_i^0 для остальных значений i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n = 2$, т.е. дана функция $\varphi(d(x, a_1), d(x, a_2))$, $x \in X$. Положим $r = d(a_1, a_2)$. Легко видеть, что точка $(d(x, a_1), d(x, a_2))$ лежит в множестве $F \subset \mathbb{R}^2$, которое является объединением отрезков $\{(t_1, r), 0 \leq t_1 \leq r\}$, $\{(r, t_2), 0 \leq t_2 \leq r\}$, $\{(t, t), r \leq t\}$. Осталось подобрать такие функции $\psi_i(t_i)$, $i = 1, 2$, что $\varphi(t_1, t_2) = \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2)$ при $(t_1, t_2) \in F$. Достаточно положить $\psi_1(t_1) = \varphi(t_1, r)$, $0 \leq t_1 \leq r$; $\psi_1(t_1) = \varphi(t_1, t_1)$, $t_1 \geq r$; $\psi_2(t_2) = \varphi(r, t_2) - \varphi(r, r)$, $0 \leq t_2 \leq r$; $\psi_2(t_2) = 0$, $t_2 \geq r$. Этим доказано наше предложение при $n = 2$. Далее применяем индукцию по n . При $n \geq 3$, используя индуктивное предположение, мы можем представить функцию $\varphi(d(x, a_1), \dots, d(x, a_{n-1}), t_n)$, $x \in X$, $t_n \geq 0$, в виде суммы функций $h_i(d(x, a_i), t_n)$, $1 \leq i \leq n-1$. Каждую из функций $h_i(d(x, a_i), d(x, a_n))$ можно представить в виде суммы функций $g_{ij}(d(x, a_k))$. Это приводит к равенству (4). Предложение 6 доказано.

Пусть теперь (X, d) – вполне-бесконечное пространство дискретного или непрерывного типа. Мы введем алгебру функций на X , следуя образцу, описанному в начале этого пункта. Для простоты ограничимся случаем $\text{diam } X = 1$.

Пусть сначала (X, d) – пространство дискретного типа. Множество значений метрики d состоит либо из чисел $1 = c_0 > \dots > c_m = 0$, либо из чисел $1 = c_0 > c_1 > \dots$, $c_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Обозначим через f_a^k индикатор шара $U_a^{c_k}$, $a \in X$. Заметим, что равенство $f_a^k = f_b^m$ равносильно условиям $k = m$, $d(a, b) \leq c_k$. Через $B(X)$ обозначим множество функций $f(x)$, $x \in X$, представимых в виде конечных линейных комбинаций функций f_a^k . Ясно, что $B(X)$ – алгебра относительно умножения функций. Важно отметить, что набор $\{f_a^k\}$ линейно независим, ибо любой шар $U_a^{c_k}$ является объединением бесконечного набора шаров радиуса c_{k+1} . Добавим, что $B(X)$ есть линейная оболочка функций вида $\varphi(d(x, a))$, где функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, постоянна в окрестности нуля.

Зафиксируем числа β_k , $k = 0, 1, \dots$, и введем в $B(X)$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, задав его на базисе $\{f_a^k\}$ равенствами

$$(f_a^k, f_b^m) = \begin{cases} 0, & f_a^k \neq f_b^m, \\ \beta_k, & f_a^k = f_b^m. \end{cases} \quad (5)$$

Гильбертово пространство, полученное из $B(X)$ пополнением по норме $\sqrt{(f, f)}$, обозначим через $H(X)$ ($H^{\{\beta_k\}}(X)$ либо $H^{\{\beta_k\}}$). Итак, для пространства (X, d) дискретного типа гильбертово пространство построено.

Пусть теперь (X, d) – пространство непрерывного типа, причем $\text{diam } X = 1$. Тем самым, множество значений метрики d плотно в отрезке $[0, 1]$. Построим алгебру функций и гильбертово пространство, связанные с (X, d) .

Назовем функцию $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ *кусочно-гладкой*, если она непрерывна, имеет непрерывную производную в $[0, 1]$, за возможным исключением конечного набора точек, причем производная ограничена на области ее определения. Обозначим через $B(X)$ множество всех функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(d(x, a_k)), \quad x \in X,$$

где $a_k \in X$, $1 \leq k \leq N$, $\varphi_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, – кусочно-гладкие функции. Из предложения 6 следует, что $B(X)$ – алгебра функций.

Введем в $B(X)$ скалярное произведение. Грубо говоря, мы определим его путем предельного перехода от подпространств $Y \subset X$, принадлежащих дискретному типу. Сейчас будет дано подробное описание.

Зафиксируем число $\beta \geq 0$ и непрерывную неотрицательную функцию $\theta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, последняя порождает меру $\theta(t) dt$ на отрезке $[0, 1]$. Возьмем любое подпространство конечного типа $Y \subset X$, пусть $c_0 > \dots > c_m = 0$ – множество значений метрики d на Y . Возьмем числа β_k , $0 \leq k \leq m$, и введем в алгебре $B(Y)$ скалярное произведение, как описано выше (см. (5)). Это скалярное произведение обозначим через $(\cdot, \cdot)_Y^{\{\beta_k\}}$. Будем варьировать пространство Y и числа $\{\beta_k\}$ так, чтобы число β_0 стремилось к β , мера $\tau_Y^{\{\beta_k\}}$, предписывающая каждой точке c_k вес $\beta_k(c_k - c_{k-1})^2$, стремилась к мере $\theta(t) dt$ в слабой топологии и, наконец, величина $\max_k(c_k - c_{k+1})$ стремилась к 0.

Теперь мы готовы осуществить обещанный предельный переход, что позволит построить скалярное произведение в $B(X)$. Возьмем любые две функции $f, h \in B(X)$. Таким образом,

$$f(x) = \sum_i \varphi_i(d(x, a_i)), \quad h(x) = \sum_i \psi_i(d(x, b_i)), \quad x \in X,$$

где $a_i, b_i \in X$, φ_i, ψ_i – кусочно-гладкие функции, обе суммы конечны. Возьмем подпространство $Y \subset X$ конечного типа, содержащее все точки a_i, b_i (оно существует в силу леммы 2). Возьмем также числа $\beta_k > 0$ и введем в $B(Y)$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_Y^{\{\beta_k\}}$, как указано выше. Ясно, что функции $f|_Y, h|_Y$ принадлежат пространству $B(Y)$, а потому определено их скалярное произведение. Будем варьировать Y и $\{\beta_k\}$, как объяснялось выше. Положим

$$(f, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim(f|_Y, h|_Y)_Y^{\{\beta_k\}}. \quad (6)$$

(Строгое изложение приведенной конструкции потребовало бы языка фильтров и т.п., мы предпочли простое описание.)

ЛЕММА 3. *Предел (6) существует для любых функций из $B(X)$. В частности, если*

$$f(x) = \varphi(d(x, a)), \quad h(x) = \psi(d(x, b)), \quad x \in X$$

(здесь $a, b \in X$, φ, ψ – кусочно-гладкие функции), то

$$(f, h) = \beta \varphi(1) \overline{\psi(1)} + \int_r^1 \varphi'(t) \overline{\psi'(t)} \theta(t) dt, \quad r = d(a, b). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_x^k – индикатор шара $\{y \mid y \in Y, d(y, x) \leq c_k\}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(c_k) (f_a^k(x) - f_a^{k+1}(x)) + \varphi(c_m) f_a^m(x) \\ &= \sum_{k=1}^m (\varphi(c_k) - \varphi(c_{k-1})) f_a^k(x) + \varphi(c_0) f_a^0, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Аналогично записывается функция $h(x)$. Положим $d(a, b) = c_p$. Напомним, что $f_a^k = f_b^i$ при $k = i, p \leq k, (f_a^k, f_b^i) = 0$ при $i \neq k$ и при $i = k < p$. Поэтому

$$(f \mid Y, h \mid Y)_{Y^{\{\beta_k\}}}^{\{\beta_k\}} = \sum_{k=p}^m (\varphi(c_k) - \varphi(c_{k-1})) \overline{(\psi(c_k) - \psi(c_{k-1}))} \beta_k + \varphi(c_0) \overline{\psi(c_0)} \beta_0.$$

Перейдем к пределу, варьируя Y и $\{\beta_k\}$, как объяснялось выше. Несложное вычисление, использующее равенство Лагранжа $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \varphi'(s)(t_1 - t_2)$ и аналогичное равенство для ψ , приводит к формуле (7). Лемма доказана.

Итак, скалярное произведение в $B(X)$ построено. Пополнение пространства $B(X)$ приводит к гильбертову пространству, обозначим его $H(X)$ (либо $H_\theta^\beta(X)$). Оно задается числом $\beta \geq 0$ и мерой $\theta(t) dt$.

Используя лемму 3, представим $H_\theta^\beta(X)$ в виде прямого интеграла гильбертовых пространств. С этой целью для любого $r > 0$ обозначим через H_r гильбертово пространство, ортонормированным базисом которого служит множество всех шаров радиуса r пространства X ; в частности, H_1 – одномерное пространство с базисом X . Каждой точке $a \in X$ и каждой кусочно-гладкой функции $\varphi(t), t \in [0, 1]$, поставим в соответствие вектор-функцию $r \mapsto h_a^\varphi(r) \in H_r, 0 \leq r \leq 1$, задав ее равенствами $h_a^\varphi(r) = \varphi'(r) U_a^r$ при $r < 1, h_a^\varphi(1) = \varphi(1)X$. Введем на $[0, 1]$ меру σ , полагая $d\sigma = \theta(t) dt$ на $[0, 1], \sigma\{1\} = \beta$. Семейство $\{H_r\}$, мера σ и набор вектор-функций $\{h_a^\varphi\}$ определяет прямой интеграл $\mathcal{H} = \int_0^1 H_r d\sigma(r)$. Лемма 3 устанавливает естественный изоморфизм гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ и $H_\theta^\beta(X)$.

§ 3. Автоморфизмы вполне-бесконечных пространств и порожденные ими линейные операторы

Напомним, что если (X, τ) – пространство с мерой, то мера называется *квазиинвариантной относительно биекции* $x \mapsto xg, x \in X$, если она переходит в эквивалентную меру. В этом случае определена производная $\dot{g}(x) = d\tau(xg)/d\tau(x)$, называемая *якобианом преобразования* g . Биекции с этим свойством образуют группу $\text{Aut}(X, \tau)$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ операторы

$$(T^\lambda(g)f)(x) = (\dot{g}(x))^\lambda f(xg), \quad x \in X, \quad g \in \text{Aut}(X, \tau),$$

образуют линейное представление этой группы в пространстве измеримых функций. При $\text{Re } \lambda = 1/2$ представление унитарно в пространстве $L_2(X, \tau)$.

Цель этого параграфа – построение некоторого аналога, описанного сейчас, для вполне-бесконечных пространств. В этом случае мера на X отсутствует, и в роли $L_2(X, \tau)$ выступят построенные выше гильбертовы пространства $H(X)$.

1. Группа $\text{Aut}(X, d)$. Предварительно напомним, что отображение метрических пространств $f: (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ называется *гомотетией*, если

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) = kd(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in X,$$

для некоторого $k > 0$. Число k называется *коэффициентом гомотетии*.

Пусть теперь (X, d) – вполне-бесконечное пространство, принадлежащее дискретно-му либо непрерывному типу. Предполагается, что $\text{diam } X = 1$. *Автоморфизмом пространства (X, d)* назовем биекцию $x \mapsto xg$, $x \in X$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) для любой функции $f \in B(X)$ функция $x \mapsto f(xg)$, $x \in X$, также принадлежит пространству $B(X)$;
- 2) для любой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U_x^r , $r > 0$, что отображение $g|U_x^r$ есть гомотетия, тем самым, определена функция $\dot{g}$ на X такая, что $\dot{g}(x)$ есть коэффициент гомотетии отображения g в окрестности точки x ;
- 3) введенная функция $\dot{g}(x)$, $x \in X$, принадлежит алгебре $B(X)$.

Функцию $\dot{g}$ назовем *якобианом автоморфизма g* . Из предложения 6 легко вывести, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $(\dot{g}(x))^\lambda$, $x \in X$, также принадлежит алгебре $B(X)$.

Группу всех автоморфизмов пространства (X, d) обозначим через $\text{Aut}(X, d)$ (мы опускаем несложную проверку того, что автоморфизмы, действительно, образуют группу). Выполняется равенство $(g_1g_2)(x) = \dot{g}_1(x)\dot{g}_2(xg_1)$, $x \in X$, $g_i \in \text{Aut}(X, d)$. Из него следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ операторы

$$(T^\lambda(g)f)(x) = (\dot{g}(x))^\lambda f(xg), \quad f \in B(X), \quad g \in \text{Aut}(X, d), \quad (8)$$

образуют линейное представление группы $\text{Aut}(X, d)$, т.е. $T^\lambda(e) = I$ (e – тождественный автоморфизм), $T^\lambda(g_1g_2) = T^\lambda(g_1)T^\lambda(g_2)$, $g_i \in \text{Aut}(X, d)$.

2. Автоморфизмы, порождающие унитарные операторы. Обозначим через $\text{Iso}(X, d)$ группу всех изометрических биекций пространства (X, d) ; ясно, что $\text{Iso}(X, d) \subset \text{Aut}(X, d)$. Если $g \in \text{Iso}(X, d)$, то $\dot{g}(x) = 1$, $x \in X$, и оператор (8) сохраняет любое из скалярных произведений в $B(X)$, введенных в § 2. Тем самым, возникает унитарное представление группы $\text{Iso}(X, d)$ в соответствующем гильбертовом пространстве $H(X)$. Цель этого пункта состоит в следующем: для некоторых вполне-бесконечных пространств (X, d) мы построим подгруппу $G(X, d) \subset \text{Aut}(X, d)$, содержащую подгруппу $\text{Iso}(X, d)$, но не совпадающую с ней, такую, что при $\lambda > 0$ операторы $T^\lambda(g)$ будут унитарными в одном из гильбертовых пространств $H(X)$ для всех $g \in G(X, d)$ ($H(X)$ будет зависеть от λ). Заметим, что существование автоморфизмов пространства (X, d) , не являющихся изометриями и, тем не менее, порождающих унитарные операторы в некотором $H(X)$, не вытекает из каких-либо общих соображений и должно рассматриваться как счастливая случайность. Полное описание таких автоморфизмов отсутствует.

Пусть сначала (X, d) – пространство дискретного типа. Наложим на него следующие ограничения:

- 1) множество значений метрики d состоит из чисел $0, \alpha^k$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$;
- 2) мощность множества шаров радиуса α^k не зависит от k .

Нетрудно описать все такие пространства (X, d) . Для этого зафиксируем множество A , равномощное множеству шаров пространства (X, d) , и обозначим через A^∞ множество всех последовательностей $x = (x_0, x_1, \dots)$, $x_i \in A$. Введем в A^∞ метрику δ по формулам $\delta(x, x) = 0$, $\delta(x, y) = \alpha^m$, где $x = (x_0, x_1, \dots)$, $y = (y_0, y_1, \dots)$, $x \neq y$, $m = \min\{k \mid x_k \neq y_k\}$. Легко проверить, что полученное пространство (A^∞, δ) изометрично исходному пространству (X, d) . Отсюда вытекает следующее важное для дальнейшего утверждение: шар $U_a^{\alpha^k} \subset X$ и сфера $U_b^{\alpha^m} \setminus U_b^{\alpha^{m+1}}$ гомотетичны для любых $a, b \in X$, $k, m = 0, 1, \dots$, т.е. существует биективная гомотетия одного множества на другое.

Итак, возьмем пространство (X, d) с описанными свойствами 1), 2) и построим подгруппу $G(X, d) \subset \text{Aut}(X, d)$ следующим образом. Возьмем точки $a, b \in X$, $d(a, b) = 1$, и биективные гомотетии $U_a^\alpha \rightarrow X \setminus U_b^\alpha$, $X \setminus U_a^\alpha \rightarrow U_b^\alpha$. В результате получим биекцию $\bar{g}: X \rightarrow X$; легко видеть, что она является автоморфизмом. Обозначим через $G(X, d)$ группу автоморфизмов, порожденную автоморфизмом $\bar{g}$ и подгруппой $\text{Iso}(X, d)$. Итак, искомая подгруппа $G(X, d)$ построена.

Возьмем число $\lambda > 0$ и рассмотрим гильбертово пространство $H^{\{\beta_k\}}(X)$ (см. п. 2.2), где $\beta_0 = 1$, $\beta_k = \alpha^{2\lambda k} (1 - \alpha^{2\lambda})^{-1}$ при $k \geq 1$. Для краткости обозначим это пространство через $H_\lambda(X)$.

ТЕОРЕМА 1. При $\lambda > 0$, $g \in G(X, d)$ оператор $T^\lambda(g)$, действующий в $B(X)$ по формуле (8), продолжается до унитарного оператора в $H_\lambda(X)$.

Мы сохраним обозначение $T^\lambda(g)$ для указанного продолжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить унитарность оператора $T^\lambda(\bar{g})$, где $\bar{g}$ – построенный выше автоморфизм. Напомним, что в пространстве $H_\lambda(X)$ имеется ортогональный базис $\{f^0, f_c^k\}$, $k \geq 1$, где $f^0(x) = 1$, $x \in X$, f_c^k – индикатор шара $U_c^{\alpha^k} = \{x \mid d(x, c) \leq \alpha^k\}$. Простые вычисления показывают, что образы этих функций под действием оператора $T^\lambda(\bar{g})$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} T^\lambda(\bar{g})f^0 &= (\alpha^{-\lambda} - \alpha^\lambda)f_a^1 + \alpha^\lambda f^0, & T^\lambda(\bar{g})f_b^1 &= \alpha^\lambda(f^0 - f_a^1), \\ T^\lambda(\bar{g})f_c^k &= \alpha^{-\lambda}f_{c\bar{g}^{-1}}^{k+1}, & k \geq 1, \quad d(c, b) &= 1, \\ T^\lambda(\bar{g})f_c^k &= \alpha^\lambda f_{c\bar{g}^{-1}}^{k-1}, & k \geq 2, \quad d(c, b) &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Несложные вычисления скалярных произведений показывают, что оператор $T^\lambda(\bar{g})$ унитарен. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства ясно, что утверждение теоремы 1 остается справедливым также при $\alpha^\lambda \in (-1, 0)$. Если $\alpha^\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, то операторы $T^\lambda(g)$, $g \in G(X, d)$, унитарны относительно индефинитного скалярного произведения.

Прежде, чем закончить рассмотрение пространств дискретного типа, вернемся к конструкции автоморфизма $\bar{g}$. В этой конструкции были использованы произвольные гомотетии $U_a^\alpha \rightarrow X \setminus U_b^\alpha$, $X \setminus U_a^\alpha \rightarrow U_b^\alpha$. Для дальнейших целей выберем эти гомотетии специальным образом. Для этого рассмотрим множество $D = \{\alpha^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и положим $X_r = \{x \mid d(x, b) = r\}$ при $r \in D$, $r < 1$; $X_r = \{x \mid d(x, a) = r^{-1}\}$ при $r \in D$, $r > 1$; $X_1 = \{x \mid d(x, a) = d(x, b) = 1\}$. Полученные множества X_r , $r \in D$, образуют разбиение пространства X на попарно не пересекающиеся подмножества. Возьмем произвольные биективные гомотетии $X_r \rightarrow X_{\alpha r}$, $r \in D$. В результате получим

биекцию $\bar{g}: X \rightarrow X$. Ясно, что она является частным случаем построенных выше автоморфизмов $\bar{g}$. Добавим, что для любого целого m возникают биективные гомотетии $\bar{g}^m: X_r \rightarrow X_{\gamma r}$, $\gamma = \alpha^m$, $r \in D$. На этом заканчивается рассмотрение пространства (X, d) дискретного типа.

Обратимся к пространству (X, d) непрерывного типа, $\text{diam } X = 1$. Рассмотрим ту же задачу: построить подгруппу $G(X, d) \subset \text{Aut}(X, d)$, содержащую подгруппу $\text{Iso}(X, d)$, но не совпадающую с ней, такую, что при $\lambda > 0$, $g \in G(X, d)$ оператор $T^\lambda(g)$ унитарен в одном из гильбертовых пространств $H_\theta^\beta(X)$, зависящем от λ ; напомним, что пространства $H_\theta^\beta(X)$ были описаны в п. 2.2. Обозначим через S_a^r сферу $\{x \mid d(x, a) = r\}$.

Наложим на (X, d) следующие ограничения:

- 1) множество E , состоящее из положительных значений метрики d , есть полугруппа относительно умножения чисел, $1 \in E$;
- 2) пространство X и любая сфера S_a^r , $r \in E$, гомотетичны.

Заметим, впрочем, что условие 1) вытекает из 2).

Приведем пример такого пространства. Пусть A – бесконечное множество с отмеченным элементом $\bar{a}$, A_a^∞ – множество всех отображений $x: [0, \infty) \rightarrow A$ таких, что $x(t) = \bar{a}$ для всех $t \geq 0$, за возможным исключением дискретного (возможно, пустого) множества значений. Зафиксируем число $\beta \in (0, 1)$ и введем в A_a^∞ метрику δ по формулам $\delta(x, x) = 0$, $\delta(x, y) = \beta^s$, где $x, y \in A_a^\infty$, $x \neq y$, $s = \inf\{t \mid x(t) \neq y(t)\}$. Полученное пространство (A_a^∞, δ) удовлетворяет условиям 1), 2). Здесь $E = (0, 1]$.

Вернемся к произвольному пространству (X, d) со свойствами 1), 2) и построим обещанную подгруппу $G(X, d) \subset \text{Aut}(X, d)$ и гильбертово пространство $H_\theta^\beta(X)$. Сначала построим автоморфизм $\bar{g}$ по аналогии со случаем пространств дискретного типа. Положим $D = E \cup E^{-1}$, где $E^{-1} = \{t \mid t^{-1} \in E\}$. Возьмем точки $a, b \in X$, $d(a, b) = 1$, и введем множества X_r , $r \in D$, полагая $X_r = S_b^r$ при $r < 1$, $X_r = S_b^{1/r}$ при $r > 1$, $X_1 = S_a^1 \cap S_b^1$. Эти множества образуют разбиение пространства X на непересекающиеся части. Из указанных выше условий 1), 2) легко вывести, что множества X_r , $r \in D$, попарно гомотетичны. Зафиксируем число $\gamma \in E$ и возьмем произвольные гомотетии $X_r \rightarrow X_{\gamma r}$. В результате получим биекцию $\bar{g}: X \rightarrow X$. Покажем, что $\bar{g} \in \text{Aut}(X, d)$. Для этого возьмем кусочно-гладкую функцию $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, точку $c \in X$ и рассмотрим функцию $\varphi(d(x, c))$, $x \in X$. Покажем, что функция $\varphi(d(x\bar{g}, c))$, $x \in X$, принадлежит алгебре $B(X)$. Это требует утомительного перебора ряда случаев, мы рассмотрим лишь случай $d(c, b) = r < \gamma < 1$. Пусть $c' = c\bar{g}^{-1}$. Из построения преобразования $\bar{g}$ легко вывести, что величина $d(x\bar{g}, c)$ принимает значения 1 , $\gamma(d(x, a))^{-1}$, $\gamma d(x, b)$, $\gamma d(x, c')$ для точек x , удовлетворяющих соответственно условиям $d(x, a) < \gamma$, $\gamma \leq d(x, a) \leq 1$, $r\gamma^{-1} \leq d(x, b) \leq 1$, $d(x, c') = r\gamma^{-1}$. Точка $(d(x, a), d(x, b), d(x, c'))$, $x \in X$, пробегает плотное подмножество множества $F \subset \mathbb{R}^3$, состоящего из точек (t_1, t_2, t_3) , которые удовлетворяют одному из условий:

- 1) $t_2 = t_3 = 1$, $0 \leq t_1 \leq 1$;
- 2) $t_1 = 1$, $r/\gamma \leq t_2 = t_3 \leq 1$;
- 3) $t_1 = 1$, $0 \leq t_3 \leq r/\gamma = t_2$;
- 4) $t_1 = 1$, $0 \leq t_2 \leq r/\gamma = t_3$.

Отсюда следует, что функция $\varphi(d(x\bar{g}, c))$, $x \in X$, представима в виде $\Phi(d(x, a), d(x, b), d(x, c'))$, где Φ – непрерывная функция на F . Тем самым, функция $\varphi(d(x\bar{g}, c))$, $x \in X$, лежит в $B(X)$. Мы доказали, что преобразование $\bar{g}$ осуществляет автоморфизм ал-

гебры $B(X)$. Наконец, якобиан $\dot{\bar{g}}$ выражается формулами $\dot{\bar{g}}(x) = \gamma$ при $d(x, b) < 1$ и при $d(x, a) = d(x, b) = 1$, $\dot{\bar{g}}(x) = \gamma^{-1}$ при $d(x, a) \leq \gamma$, $\dot{\bar{g}}(x) = \gamma(d(x, a))^{-2}$ при $\gamma \leq d(x, a) \leq 1$. Итак, $\bar{g} \in \text{Aut}(X, d)$. Через $G(X, d)$ обозначим группу автоморфизмов, порожденную автоморфизмом $\bar{g}$ и подгруппой $\text{Iso}(X, d)$. Искомая подгруппа $G(X, d)$ построена.

Зафиксируем число $\lambda > 0$ и построим гильбертово пространство $H_\theta^\beta(X)$, в котором операторы $T^\lambda(g)$, $g \in G(X, d)$, окажутся унитарными. Для этого рассмотрим пространства $H^{\{\beta_k\}}(X)$, $\beta_0 = 1$, $\beta_k = \alpha^{2\lambda k}(1 - \alpha^{2\lambda})^{-1}$ при $k \geq 1$, построенные выше для пространства (X, d) дискретного типа. Совершим “неформальный” переход к пределу при $\alpha \rightarrow 1 - 0$, следуя образцу, описанному в п. 2.2. Другими словами, введем меру, сосредоточенную на множестве $\{\alpha^k, k \geq 0\}$ и предписывающую вес $\beta_k(\alpha^{k-1} - \alpha^k)^2$ точке α^k . Несложное вычисление, которое мы опустим, показывает, что при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ эта мера слабо сходится к мере

$$\frac{1}{2\lambda} t^{2\lambda+1} dt, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Заметим, что величина β_0 не зависит от α . Теперь резонно рассмотреть гильбертово пространство $H_\theta^\beta(X)$, где $\beta = 1$, $\theta(t) = t^{2\lambda+1}/(2\lambda)$, $0 \leq t \leq 1$. Для краткости обозначим его через $H_\lambda(X)$, а соответствующее скалярное произведение – через $(\cdot, \cdot)_\lambda$. Напомним, что для функций $f(x) = \varphi(d(x, a))$, $h(x) = \psi(d(x, b))$, $x \in X$, это скалярное произведение выражается равенством

$$(f, h) = \varphi(1)\overline{\psi(1)} + \frac{1}{2\lambda} \int_r^1 \varphi'(t)\overline{\psi'(t)}t^{2\lambda+1} dt, \quad r = d(a, b).$$

ТЕОРЕМА 2. При $\lambda > 0$ операторы $T^\lambda(g)$, $g \in G(X, d)$, действующие в $B(X)$ по формуле (8), продолжаются до унитарных операторов в гильбертовом пространстве $H_\lambda(X)$.

Эти продолжения обозначим также через $T^\lambda(g)$.

Мы вправе опустить доказательство этой теоремы: во-первых, приведенные выше “неформальные” переходы к пределу от дискретного типа к непрерывному нетрудно превратить в строгое рассуждение, приводящее к доказательству; во-вторых, унитарность оператора $T^\lambda(\bar{g})$ (этого достаточно для доказательства теоремы) можно доказать явным вычислением скалярных произведений функций $T^\lambda(\bar{g})f$, $f(x) = \varphi(d(x, c))$.

Закончим этот параграф следующей задачей: описать все автоморфизмы приведенного выше пространства последовательностей (A^∞, δ) , для которого оператор $T^\lambda(g)$ унитарен при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ в одном из гильбертовых пространств $H^{\{\beta_k\}}(X)$.

§ 4. Вполне-бесконечные пространства, связанные с полем формальных рядов. Представления группы $\text{GL}_2(\mathbb{F})$

Мы рассмотрим пример вполне-бесконечного пространства. Предварительно введем обозначения. Пусть $\mathbb{K}$ – бесконечное поле, $\mathbb{F}$ – множество формальных рядов

$$\xi = \sum f(t)z^t,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ – произвольная функция такая, что множество $\{t \mid f(t) \neq 0\}$ ограничено снизу и дискретно (возможно, пустое). Обычное умножение рядов превращает $\mathbb{F}$

в поле. Введем в $\mathbb{F}$ норму $\|\xi\| = \alpha^s$, $s = \inf\{t \mid f(t) \neq 0\}$, $0 < \alpha < 1$. Через $\mathbb{F}^0$ обозначим подполе рядов

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{K},$$

$a_n = 0$ при отрицательных значениях числа n для достаточно больших $|n|$. Наконец, через $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}^0)$ обозначим группы невырожденных матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^0$.

Определим вполне-бесконечное пространство. Пусть $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ – проективная прямая над $\mathbb{F}$; элемент пространства $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ – множество $x = \{(\lambda x_1, \lambda x_2), \lambda \neq 0\}$, где $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Этот элемент обозначим через $x_1 : x_2$. Введем в $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ метрику d по формуле $d(x, y) = \|x_1 y_2 - x_2 y_1\|$, где $x = x_1 : x_2$, $y = y_1 : y_2$, $\max_i \|x_i\| = 1$, $\max_i \|y_i\| = 1$. Получим пространство непрерывного типа $(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}), d)$. Аналогично определяется пространство $(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}^0), d)$.

Группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ действует на $\mathbb{F}^2$ по формуле

$$(\xi_1, \xi_2)g = (\xi_1 a + \xi_2 c, \xi_1 b + \xi_2 d), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}).$$

Это приводит к действию $x \mapsto xg$, $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F})$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$.

ЛЕММА 4. *Указанное действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ задает гомоморфизм $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \rightarrow G(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}), d)$. Аналогичное утверждение справедливо и для $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}^0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ порождается подгруппой $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}})$, где $\overline{\mathbb{F}} = \{\xi \mid \|\xi\| \leq 1\}$, и элементами $g_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\xi \neq 0$. Подгруппа $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}})$ действует на $(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}), d)$ изометрически. Легко проверяется, что матрица g_ξ действует на $(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}), d)$ точно так, как преобразование $\overline{g}$, построенное в п. 3.2. Лемма доказана.

Добавим лишь, что в качестве точек a, b , использованных при построении преобразования $\overline{g}$, следует взять $0 : 1, 1 : 0$.

Используя гомоморфизмы, указанные в лемме 4, и теоремы 1, 2, получаем унитарные представления групп $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}^0)$; сохраним для них обозначение T^λ . Приведем явные формулы, задающие эти представления. Представления группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}^0)$ определяются числом $\lambda > 0$ и действуют в пространстве $H^{\{\beta_k\}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}))$, $\beta_0 = 1$, $\beta_k = \alpha^{2\lambda k} (1 - \alpha^{2\lambda})^k$, $k \geq 1$, по формуле

$$(T^\lambda(g)f)(x) = \|\det g\|^\lambda \cdot \|\overline{g}x\|^{-2\lambda} f(xg), \quad x = x_1 : x_2, \quad \overline{x} = (x_1, x_2), \quad \max_i \|x_i\| = 1. \quad (9)$$

(Здесь $\|y\| = \max_i \|y_i\|$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{F}^2$.)

Наконец, представление T^λ , $\lambda > 0$, группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ действует в пространстве $H_\theta^\beta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}))$, $\beta = 1$, $\theta(t) = t^{2\lambda+1}/(2\lambda)$, по той же формуле (9).

Возможно, рассмотренные в этой работе пространства $H^{\{\beta_k\}}$, H_θ^β окажутся полезными при построении представлений других “больших” групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вестфрид И. А., Тиман А. Ф. Об одном свойстве универсальности гильбертовых пространств // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 3. С. 528–530.
- [2] Вестфрид И. А. Об универсальных ультраметрических пространствах // Укр. матем. ж. 1994. Т. 46. № 12. С. 1700–1706.
- [3] Исмагилов Р. С. О неприводимых представлениях дискретной группы $SL_2(\mathbb{P})$, унитарных в индефинитной метрике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 4. С. 923–950.
- [4] Исмагилов Р. С. Элементарные сферические функции на группе $SL_2(\mathbb{P})$ над полем, не являющимся локально компактным // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 2. С. 361–390.
- [5] Исмагилов Р. С. О линейных представлениях групп матриц с элементами из нормированного поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 6. С. 1296–1323.
- [6] Исмагилов Р. С. О представлениях $SL_2(\mathbb{P})$, где $\mathbb{P}$ не локально компактно // Функцион. анализ и его прилож. 1973. Т. 7. № 4. С. 85–86.
- [7] Тиман А. Ф. Об аппроксимативных характеристиках метрических пространств и приближении функций // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 314–326.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
06.03.96