Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, О связи между максимумом модуля и тейлоровскими коэффициентами целых функций многих комплексных переменных, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 238–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:29:21

УДК 517.5

О СВЯЗИ МЕЖДУ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ И ТЕЙЛОРОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ю. Ф. Коробейник

В работе приводятся результаты о связи между ростом максимума модуля и убыванием тейлоровских коэффициентов целых функций многих переменных. Результаты получены двумя различными способами, первый из которых в одномерной ситуации предложен ранее В. А. Осколковым, а второй основан на использовании функций, сопряженных по Лежандру–Юнгу–Фенхелю с весовыми. Основное внимание уделяется характеристике роста целых функций по совокупности переменных; однако, некоторые результаты получены и в случае, когда допускается различный рост по разным переменным.

Библиография: 8 названий.

Связь между характером возрастания максимума модуля целой функции одного и нескольких переменных и убывания модулей ее тейлоровских коэффициентов исследовалась многими математиками, начиная с Адамара, который в конце XIX века ввел понятия порядка и типа целой функции одного комплексного переменного и выразил их через модули тейлоровских коэффициентов. При этом целая функция конечного ненулевого порядка может иметь нулевой или бесконечный (максимальный) тип. В 20-х годах нашего века Валирон ввел понятие обобщенного порядка $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$ [1, § 12] и показал, что для любой целой функции $f(z)$ ненулевого конечного порядка ρ можно построить уточненный порядок $\rho(r) \rightarrow \rho$ такой, что f имеет нормальный (т.е. конечный и ненулевой) тип σ относительно порядка $\rho(r)$:

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln M_f(r),$$

где $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. При этом, как показал Валирон, тип целой функции порядка $\rho \in (0, +\infty)$ относительно любого уточненного порядка $\rho(r) \rightarrow \rho$ также выражается с помощью довольно простой формулы через модули ее тейлоровских коэффициентов.

В последнее время весьма общие результаты по построению шкалы сравнения целых функций были получены Осколковым [2], [3]. В частности, он показал, что в некотором

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-242.

классе $\bar{I}$ вещественнозначных функций, определенных на $[1, \infty)$, можно ввести α -тип целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

по правилу

$$\sigma_{\alpha}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\ln M_f(r) / \int_1^r \alpha(t) d \ln t \right)$$

и выразить его через тейлоровские коэффициенты f_n . При этом для произвольной целой функции f найдется функция α_0 из класса $\bar{I}$, для которой $0 < \sigma_{\alpha_0}(f) < +\infty$ [2], [3].

Осколков также показал, что для любой целой функции f требуемую весовую функцию α_0 (с $\sigma_{\alpha_0}(f) = 1$) можно выбрать в классе $\bar{I}$, более узком, чем первоначальный класс $\bar{I}$ (точное описание классов $\bar{I}$ и $\hat{I}$, введенных в [2], [3], приводится ниже).

В связи с работами [2], [3] возник вопрос о справедливости аналогичных результатов для других функциональных рядов: одномерных и многомерных рядов Дирихле, Тейлора–Дирихле и т.д. Пожалуй, в таком исследовании естественно начать с многомерных степенных рядов, т.е. с целых функций нескольких комплексных переменных. Именно характеристика роста целых в $\mathbb{C}^m$, $m \geq 1$, функций и является основным моментом в данной статье. Вначале, используя методы, развитые в [2], [3] для одномерного случая, получаются аналоги одномерных результатов по описанию роста по совокупности переменных целых в $\mathbb{C}^m$ функций. При этом некоторые из полученных в этом направлении результатов являются новыми и в случае $m = 1$.

Далее в работе изучается случай, когда целая функция может иметь различный рост по разным переменным. Именно, по аналогии с сопряженными типами при данной системе порядков $(\rho_1, \dots, \rho_m)$, введенных Баумгартнером еще в 1914 году, в работе даются определения сопряженных α -типов (по максимуму модуля функции f и по ее тейлоровским коэффициентам) и показывается, что соответствующие две гиперповерхности сопряженных типов (по модулю функции и по ее тейлоровским коэффициентам) совпадают. Дается законченное описание гиперповерхности сопряженных α -типов по модулю функции (указать столь же полное описание второй гиперповерхности удастся только при дополнительных, довольно жестких, ограничениях на функцию $\alpha(x)$).

В последней части статьи для описания исследуемой связи применяется другой метод, основанный на использовании функций, сопряженных к весовым в смысле Лежандра–Юнга–Фенхеля. Такой подход позволил охарактеризовать порядок убывания коэффициентов целых в $\mathbb{C}^m$ функций, мажоранты роста которых имеют довольно сложную (например, двучленную) асимптотику.

1. Основные результаты для описания роста по совокупности переменных. Пусть $m \geq 1$ и $A(\mathbb{C}^m)$ – пространство всех целых функций

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n,$$

где $n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\|n\| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$, $z^n = z_1^{n_1} \dots z_m^{n_m}$.

Пусть, далее, I – множество вещественнозначных непрерывно дифференцируемых на $[1, \infty)$ функций $\alpha(x)$ таких, что

$$1) \alpha(1) = 0;$$

- 2) $\alpha'(x) > 0 \quad \forall x > 1$;
 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = +\infty$;

$\bar{I}$ – множество всех функций α из I , для которых

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\alpha'(x)}{\alpha^2(x)} = 0.$$

Обозначим символом $\beta(r)$ функцию, обратную к $\alpha(x) \in I$. Для любой f из $A(\mathbb{C}^m)$ и для произвольной зафиксированной полной ограниченной кратногоугольной области $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}^m$ с центром в начале координат (см. [4, с. 10] или [5, с. 38]) положим

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{G}) &= \max\{|z_1|^{n_1} \dots |z_m|^{n_m} : z \in \overline{\mathcal{G}}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^m, \\ b_n &= |f_n| d_n(\mathcal{G}), \quad M(r; \mathcal{G}, f) = \max\{|f(z)| : z \in R\overline{\mathcal{G}}\}, \\ R\overline{\mathcal{G}} &= \{w = Rv : v \in \overline{\mathcal{G}}\}, \end{aligned}$$

как обычно, $\overline{\mathcal{G}}$ – замыкание области $\mathcal{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in I$, $f \in A(\mathbb{C}^m)$ и существуют $\sigma > 0$, $r_0 < \infty$ такие, что

$$\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq \sigma \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \forall r \geq r_0. \quad (1)$$

Тогда найдется $n_0 < \infty$ такое, что

$$\ln b_n < - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \|n\| \geq n_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [4, с. 139] $b_n r^{\|n\|} \leq M(r; \mathcal{G}, f) \quad \forall r > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+^m$. Из (1) находим

$$\ln b_n \leq \sigma \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt - \|n\| \ln r \quad \forall r \geq r_0.$$

Выберем n_0 так, чтобы $n_0/\sigma > r_0$. Тогда, полагая $r = \beta(\|n\|/\sigma)$, получим при $\|n\| \geq n_0$

$$\ln b_n \leq \sigma \int_0^{\|n\|/\sigma} \frac{t\beta'(t)}{\beta(t)} dt - \|n\| \ln \beta\left(\frac{\|n\|}{\sigma}\right) = - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\alpha \in \bar{I}$, $f \in A(\mathbb{C}^m)$ и существуют $\sigma > 0$, $n_0 < \infty$, $d < \infty$ такие, что

$$\ln b_n \leq - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt + d \ln \|n\| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \|n\| \geq n_0, \quad (2)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_\varepsilon < \infty$ такое, что

$$\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq (\sigma + \varepsilon) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \forall r \geq r_\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что найдется $d_1 < \infty$ такое, что

$$\ln b_n \leq d_1 - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt + d \ln \|n\| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Для всех $r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} M(r; \mathcal{G}, f) &\leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n r^{\|n\|} \leq M \sum_{\|n\|=0}^{\infty} (\|n\| + 1)^{m-1+d} r^{\|n\|} \exp\left(-\int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt\right) \\ &= M \exp\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \sum_{\|n\|=0}^{\infty} (\|n\| + 1)^{m-1+d} B_{\|n\|} \exp\left(-\int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt\right), \\ &\text{где } B_k = \max\left\{r^k \exp\left(-\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt\right) : r \geq 0\right\}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Величина B_k определяется с помощью элементарных выкладок (см. [2, с. 133]) и ее значение равно

$$\exp \int_0^k \ln \beta\left(\frac{2t}{2\sigma + \varepsilon}\right) dt.$$

Отсюда

$$M(r; \mathcal{G}, f) \leq M \exp\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{m-1+d} \exp\left(-\int_0^k \ln \frac{\beta(t/\sigma)}{\beta(2t/(2\sigma + \varepsilon))} dt\right).$$

Используя оценки работы [2, с. 133–134], проведенные с учетом условия 4), находим, что ряд в правой части последнего неравенства сходится. Таким образом,

$$M(r; \mathcal{G}, f) \leq M_1 \exp\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \forall r > 0.$$

С учетом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt = +\infty,$$

получаем, что найдется $r_\varepsilon < \infty$ такое, что

$$\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq (\sigma + \varepsilon) \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \forall r \geq r_\varepsilon.$$

В одномерном случае предложения 1 (при $m = 1$) и 2 (при $m = 1, d = 0$) были ранее получены тем же методом в [3].

Для любой функции

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n \in A(\mathbb{C}^m)$$

ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned}\Omega(F) &= \left\{ \sigma > 0 : \exists r_0 < +\infty \quad \ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq \sigma \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \forall r \geq r_0 \right\}, \\ \Omega_1(F) &= \left\{ \sigma > 0 : \exists N < +\infty \quad \ln b_n \leq - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \|n\| \geq N \right\}, \\ \Omega_2(F) &= \left\{ \sigma > 0 : \exists d \leq +\infty, \exists N < \infty \right. \\ &\quad \left. \ln b_n \leq d \ln \|n\| - \int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \|n\| \geq N \right\}, \\ \sigma_\alpha(f) &= \inf \Omega(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\ln M(r; \mathcal{G}, f) \Big/ \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \right), \\ \tau_\alpha(f) &= \inf \Omega_1(f), \quad \lambda_\alpha(f) = \inf \Omega_2(f).\end{aligned}$$

Из предложений 1, 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 1. Если $\alpha \in \bar{I}$, то

$$\sigma_\alpha(f) = \tau_\alpha(f) = \lambda_\alpha(f) \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m). \quad (3)$$

При $m = 1$ теорема 1 получена ранее в [2] (для констант $\sigma_\alpha(f)$ и $\tau_\alpha(f)$).

Постараемся придать первому из равенств (3) несколько иную, более симметричную форму, для чего найдем другое представление для $\tau_\alpha(f)$. Прежде всего заметим, что если $\alpha \in I$, то обратная к α функция β непрерывно дифференцируема и монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, откуда

$$\beta(x) > 1, \quad x \ln \beta(x) > \int_0^x \ln \beta(t) dt \quad \forall x > 0. \quad (4)$$

Положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \ln \beta(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad \varphi(0) = 0.$$

Функция φ определена и непрерывна на $[0, +\infty)$, дифференцируема в $(0, +\infty)$. Из (4) следует, что $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x > 0$. Кроме того, применение правила Лопиталья дает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Тогда обратная к φ функция ψ определена на $[0, +\infty)$, непрерывно дифференцируема и монотонно возрастает на $(0, +\infty)$, принимая все значения из $[0, +\infty)$.

Введем еще одну характеристику функции f :

$$\nu_\alpha(f) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\psi(\ln(b_n)^{-1/\|n\|})}, \quad (5)$$

где, как выше, $b_n = |f_n|d_n(\mathcal{G})$, $n \in \mathbb{Z}_+^m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\alpha \in I$, то $\tau_\alpha(f) = \nu_\alpha(f) \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\nu_\alpha(f) < +\infty$, где величина $\nu_\alpha(f)$ определена соотношением (5). Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \|n\| < (\nu_\alpha(f) + \varepsilon)\psi(\ln(b_n)^{-1/\|n\|}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \|n\| \geq N$. Отсюда при тех же n

$$\ln b_n < -\|n\|\varphi\left(\frac{n}{\nu_\alpha(f) + \varepsilon}\right) = -\int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\nu_\alpha(f) + \varepsilon}\right) dt.$$

Таким образом, $\nu_\alpha(f) + \varepsilon \in \Omega_1(f) \quad \forall \varepsilon > 0$, откуда $\nu_\alpha(f) \geq \tau_\alpha(f)$.

2) Пусть теперь $\tau_\alpha(f) < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется $d < +\infty$ такое, что

$$\ln b_n \leq -\int_0^{\|n\|} \ln \beta\left(\frac{t}{\tau_\alpha(f) + \varepsilon}\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \|n\| \geq d.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что

$$\ln b_n \leq -\|n\|\varphi\left(\frac{n}{\tau_\alpha(f) + \varepsilon}\right),$$

или, что то же самое, тому, что $\|n\| \leq (\tau_\alpha(f) + \varepsilon)\psi(\ln(b_n)^{-1/\|n\|})$. Отсюда $\tau_\alpha(f) + \varepsilon \geq \|n\|/\psi(\ln(b_n)^{-1/\|n\|}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \|n\| \geq d$. Следовательно, $\tau_\alpha(f) + \varepsilon \geq \nu_\alpha(f) \quad \forall \varepsilon > 0$, т.е. $\tau_\alpha(f) \geq \nu_\alpha(f)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha \in \bar{I}$, то

$$\sigma_\alpha(f) = \tau_\alpha(f) = \nu_\alpha(f) \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m),$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\ln M(r; \mathcal{G}, f) / \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \right) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\psi(\ln(b_n)^{-1/\|n\|})}. \quad (6)$$

Взяв в качестве $\mathcal{G}$ полидиск $\mathcal{E}_1 = \{z : |z_k| < 1, k = 1, \dots, m\}$ и положив $M(r; \mathcal{E}_1, f) = M_f(r)$, получим из теоремы 2 с учетом $d_n(\mathcal{E}_1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m$ следующее

СЛЕДСТВИЕ. Если $\alpha \in \bar{I}$ и

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n \in A(\mathbb{C}^m),$$

то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\ln M_f(r) / \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \right) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\psi(\ln(f_n)^{-1/\|n\|})}. \quad (7)$$

Если f – любая отличная от полинома функция из $A(\mathbb{C}^m)$, т.е. трансцендентная целая функция, то, как известно (см. [5, гл. II, с. 173]), $\ln M_f(r)$ – выпуклая функция от $\ln r$ и

$$\ln M_f(r) = \ln M_f(1) + \int_1^r \frac{u(t)}{t} dt,$$

где функция $u(t)$ монотонно и неограниченно возрастает. Эта функция кусочно-непрерывна на любом интервале. Более того, промежуток $(1, +\infty)$ можно представить в виде

объединения $\bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k, x_{k+1})$, $x_0 = 1$, на каждом из которых функция u бесконечно дифференцируема. Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\ln M_f(r) / \int_1^r \frac{u(t)}{t} dt \right) = 1.$$

Как замечено в [2], всегда можно найти непрерывно дифференцируемую (и даже бесконечно дифференцируемую) в $[1, +\infty)$ функцию $v(x)$ со свойствами 1)–3) такую, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \frac{u(t)}{t} dt / \int_1^r \frac{v(t)}{t} dt \right) = 1$$

и, следовательно, $\sigma_v(f) = 1$.

Таким образом, множество $\bar{I}$ является универсальной эффективной шкалой в классе $A(\mathbb{C}^m)$ в том смысле, что для любой $f \in A(\mathbb{C}^m)$ существует $\alpha_0 \in \bar{I}$ такое, что $\sigma_{\alpha_0}(f) = 1$, и, кроме того, для всех $\alpha \in \bar{I}$ и $f \in A(\mathbb{C}^m)$ справедливо равенство (7).

Обозначим символом $\hat{I}$ множество всех функций $\alpha(x)$ из I , для которых

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{x\alpha'(x)}{\alpha^2(x)} \int_1^x \alpha(t) d \ln t \leq 2.$$

Заметим, что если последнее неравенство имеет место, то, подавно, выполняется условие 4), так что $\hat{I} \subset \bar{I}$ (при этом $\hat{I}$ – собственное подмножество $\bar{I}$). Как показано в [3], для любой функции $u(x)$ с перечисленными выше свойствами найдется функция $v(x)$ из $\hat{I}$ такая, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r u(t) d \ln t / \int_1^r v(t) d \ln t \right) = 1.$$

Отсюда следует, что $\hat{I}$ является универсальной эффективной шкалой для $A(\mathbb{C}^m)$ (при $m = 1$ этот результат получен ранее в [3]).

В заключение данного пункта приведем примеры применения формулы (7).

Перед тем, как рассмотреть эти примеры, отметим, что, как и в [2], во всех приведенных выше (и последующих) результатах фактически используется лишь асимптотическое (при больших x) поведение функции $\alpha(x)$ и обратной к ней $\beta(x)$. В частности, можно отказаться от условия $\alpha(1) = 0$, заменив во всех интегралах вида

$$\int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^r \ln \beta(t) dt$$

нижние пределы достаточно большими числами.

ПРИМЕР 1. Пусть $\alpha(t) = t^\rho$, $0 < \rho < \infty$. Тогда

$$\beta(t) = t^{1/\rho}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\rho} \ln \frac{x}{e}, \quad \psi(x) = \exp(1 + \rho x).$$

Согласно следствию из теоремы 2

$$e\rho \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \|n\| \cdot |f_n|^{\rho/\|n\|} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m)$$

или, что то же самое,

$$(e\rho\sigma_f)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \|n\|^{1/\rho} |f_n|^{1/\|n\|} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m), \quad (8)$$

где σ_f – тип целой функции f порядка ρ (по совокупности переменных). Формула (8) хорошо известна.

ПРИМЕР 2. Пусть $\alpha(t) = (\ln t)^\rho$, $0 < \rho < \infty$. В этом случае

$$\beta(t) = \exp(t^{1/\rho}), \quad \varphi(x) = \frac{\rho}{\rho+1} x^{1/\rho}, \quad \psi(x) = \left(\frac{\rho+1}{\rho} x\right)^\rho.$$

По следствию из теоремы 2

$$(\rho+1)^{\rho+1} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{\rho+1}} = \rho^\rho \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|^{\rho+1}}{(\ln(1/|f_n|))^\rho} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

Эта формула также известна (по крайней мере, при $m = 1$).

ПРИМЕР 3. Пусть, наконец, $\alpha(t) = \exp(c(\ln t)^\rho)$, $0 < c < \infty$, $1 < \rho < \infty$. Тогда

$$\beta(x) = \exp\left(\ln \frac{x}{c}\right)^{1/\rho}.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$\varphi(x) = c^{-1/\rho} (\ln x)^{1/\rho} \left(1 - \frac{1}{\rho \ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right), \quad \psi(t) = \exp(ct^\rho + 1 + o(1)).$$

Согласно следствию из теоремы 2

$$c\rho e \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{1-\rho} \exp(c(\ln r)^\rho)} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\exp(c\|n\|^{-\rho} (\ln(1/|f_n|))^\rho)} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

Заметим, что целые функции f , для которых $0 < \sigma_\alpha(f) < \infty$, имеют в примере 1 ненулевой конечный, во примере 2 – нулевой (конечный логарифмический) и в примере 3 – бесконечный порядок.

Хотя равенства (6), (7) имеют место для любой функции из $A(\mathbb{C}^m)$, при их практическом использовании, особенно в случае целых функций бесконечного порядка (по совокупности переменных), возникают определенные трудности, связанные с необходимостью определения асимптотики (при больших x) функции $\psi(x)$, обратной к $\varphi(x)$. В связи с этим желательно выразить значение $\nu_\alpha(f)$ непосредственно через функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Это удастся сделать при дополнительных предположениях о функции α . Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении, начав с одного вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 1 [6]. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3) и условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \mu, \quad 0 \leq \mu < +\infty. \quad (9)$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(kt)}{g(t)} = k^\mu \quad \forall k \in (0, +\infty).$$

Предположим теперь, что функция $\alpha(x)$ из I удовлетворяет условию (9) (при $g = \alpha$), и пусть $0 < \mu < +\infty$. Заметим, что тогда условие 4) выполняется, так что $\alpha \in \bar{I}$. Далее, условие (9) равносильно тому, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\beta'(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{\mu}.$$

Применяя лемму 1 к функции β , получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta(kx)}{\beta(x)} = k^{1/\mu} \quad \forall k > 0.$$

Далее,

$$\varphi(x) = \ln \beta(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t\beta'(t)}{\beta(t)} dt = \ln \beta(x) - \frac{1}{\mu} + o(1).$$

Положив $\mu_1 = \exp(1/\mu)$, найдем, что $\psi(x) = \alpha(\mu_1(1 + o(1)) \exp x)$.

Применяя лемму 1 к функции α и учитывая ее монотонность, имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{\alpha(x)} = \mu_1^\mu = e.$$

По формуле (5)

$$e\nu_\alpha(f) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\alpha((|f_n|d_n(\mathcal{G}))^{-1/\|n\|})}.$$

Обозначив через A правую часть последнего равенства, находим

$$A^{1/\mu} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \beta(\|n\|)(b_n)^{1/\|n\|}.$$

Учитывая теорему 2, получаем

$$e\sigma_\alpha(f) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|}{\alpha((b_n)^{-1/\|n\|})}, \quad (10)$$

$$(e\sigma_\alpha(f))^{1/\mu} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \beta(\|n\|)(b_n)^{1/\|n\|}, \quad b_n = |f_n|d_n(\mathcal{G}), \quad n \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (11)$$

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 3. Если функция α удовлетворяет условиям 1)–3) и (9), то для любой $f(z) \in A(\mathbb{C}^m)$ справедливы равенства (10) и (11).

Рассмотрим в качестве примера функцию $\alpha(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ непрерывно дифференцируема на $[r_0, +\infty)$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l(r \ln r \rho'(r) + \rho(r)) = \mu \in (0, +\infty). \quad (12)$$

Тогда условия 1), 2) выполняются (условие 2) – асимптотически), так же как и условие (9). В частности, условие (12) выполняется, если $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)$ и

$\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = 0$, т.е. если $\rho(r)$ – уточненный порядок по Валирону. В этом случае, как нетрудно подсчитать,

$$\int_1^r \frac{\alpha(t)}{t} dt \sim \frac{r^{\rho(r)}}{\rho},$$

и по формуле (11) получаем хорошо известное равенство

$$(e\rho\tilde{\sigma}(f))^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \beta(\|n\|)(|f_n|d_n(\mathcal{G}))^{1/\|n\|},$$

где

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln M(r; \mathcal{G}, f),$$

а $\beta(t)$ – функция, обратная к $r^{\rho(r)}$.

Заметим, что теорема 3 “обслуживает”, главным образом, целые функции ненулевого конечного порядка. Следующий результат применяется более широко.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[x_0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям 1)–3). Пусть, далее,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d \ln(x\alpha'(x))}{d \ln \alpha(x)} = 1. \quad (13)$$

Тогда для любой функции $f \in A(\mathbb{C}^m)$

$$\nu_\alpha(f) = \tau_\alpha(f) = \frac{1}{e} \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} (\beta(\|n\|)(|f_n|d_n(\mathcal{G}))^{1/\|n\|})^{\beta(\|n\|)/(\|n\|\beta'(\|n\|))}. \quad (14)$$

Если, кроме того, функция $\alpha(x)$ обладает свойством 4), то любая из величин $\nu_\alpha(f)$, $\tau_\alpha(f)$ в (14), совпадает с $\sigma_\alpha(f)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [2, с. 135–136].

Условиями теоремы 3 удовлетворяют традиционные функции сравнения $\alpha(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$ – уточненный порядок по Валирону, при дополнительном предположении о том, что функция $\rho(r)$ дважды непрерывно дифференцируема. Как показывают примеры, приведенные для случая $m = 1$ в [2, с. 137–138], этим же условиям удовлетворяют многие функции сравнения, применяемые для описания роста целых функций бесконечного порядка. В то же время ряд функций сравнения, используемых при оценке роста целых функций нулевого порядка, не удовлетворяет условию (13). В качестве примера можно рассмотреть функцию $\alpha(r) = (\ln r)^\delta$, $0 < \delta < \infty$. Соответствующий (при $m = 1$) класс функций $y \in A(\mathbb{C})$, для которых

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_y(r)}{(\ln r)^{\delta+1}} < \infty$$

(функции конечного логарифмического порядка), встречается в ряде разделов комплексного анализа, он исследовался Ж. Валироном, А. А. Гольдбергом и другими авторами (см., например, работу [7] и библиографию к ней).

Следующая теорема применима к целым функциям конечного логарифмического порядка.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3) и, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x\alpha'(x) \ln x} = \gamma, \quad 0 < \gamma < +\infty. \quad (15)$$

Тогда для любой $f \in A(\mathbb{C}^m)$

$$(\nu_\alpha(f))^\gamma (1+\gamma) = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)}, \quad \sigma_\alpha(f) = \left[\frac{1}{1+\gamma} \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} \right]^{1/\gamma}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что условие (15) влечет условие 4), так что $\alpha \in \bar{I}$ и $\nu_\alpha(f) = \tau_\alpha(f) = \sigma_\alpha(f) \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m)$. Далее, из определения величины $\nu_\alpha = \nu_\alpha(f)$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N < \infty$ такое, что

$$\|n\| < (\nu_\alpha + \varepsilon) \psi\left(\frac{1}{\|n\|} \ln \frac{1}{b_n}\right) \quad \forall n, \quad \|n\| > N.$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \varphi(\|n\|/(\nu_\alpha + \varepsilon))}{\ln(1/b_n)} \leq 1. \quad (17)$$

Условие (15) равносильно тому, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta'(x)x}{\beta(x) \ln \beta(x)} = \gamma.$$

Используя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\ln \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta(x)}{\ln \beta(x) + x\beta'(x)/\beta(x)} = \frac{1}{1+\gamma}.$$

Применяя лемму 1 к функции $\ln \beta(x)$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta(kx)}{\ln \beta(x)} = k^\gamma \quad \forall k > 0.$$

Из (17) находим

$$A := \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} \leq (1+\gamma)(\nu_\alpha + \varepsilon)^\gamma, \quad 0 < \varepsilon < \infty. \quad (18)$$

Следовательно, $A \leq (1+\gamma)(\nu_\alpha)^\gamma$. С другой стороны, если $\nu_\alpha > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность мультииндексов n_k , для которой

$$\|n_k\| \uparrow \infty, \quad \|n_k\| > (\nu_\alpha - \varepsilon) \psi\left(\frac{1}{\|n_k\|} \ln \frac{1}{b_{n_k}}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда получим, что для любого $\varepsilon \in (0, \nu_\alpha)$

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \varphi(\|n\|/(\nu_\alpha - \varepsilon))}{\ln(1/b_n)} \geq 1.$$

Но тогда

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} \geq (1 + \gamma)(\nu_\alpha)^\gamma,$$

и первое из равенств (16) доказано при $\nu_\alpha > 0$. Если $\nu_\alpha = 0$, то из (18) получим

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} \leq 0.$$

Так как левая часть последнего неравенства неотрицательна, то первое равенство (16) (а, следовательно, и второе) доказано и при $\nu_\alpha = 0$.

В случае $\gamma = 0$ можно также выразить $\nu_\alpha(f)$ с помощью функции β , но соответствующий результат, как мы сейчас убедимся, не является таким законченным, как теорема 5.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3), а также условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x\alpha'(x) \ln x} = 0. \quad (19)$$

Тогда для любой функции $f \in A(\mathbb{C}^m)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} &= 1, & \text{если } \nu_\alpha \in (0, +\infty), \\ \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} &\leq 1, & \text{если } \nu_\alpha = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\nu_\alpha = \nu_\alpha(f) \in [0, +\infty)$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5, находим

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|/(\nu_\alpha + \varepsilon))}{\ln(1/b_n)} \leq 1.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta(kx)}{\ln \beta(x)} = 1 \quad \forall k > 0,$$

получим

$$B_f := \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|)}{\ln(1/b_n)} \leq 1.$$

Если при этом $\nu_\alpha > 0$, то для любого $\varepsilon \in (0, \nu_\alpha)$ получаем, как выше,

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \beta(\|n\|/(\nu_\alpha - \varepsilon))}{\ln(1/b_n)} \geq 1,$$

откуда $B_f \geq 1$ и, окончательно, $B_f = 1$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям 1)–4) и (19). Тогда для любой функции $f \in A(\mathbb{C}^m)$ $B_f = 1$, если $\sigma_\alpha(f) \in (0, +\infty)$, и $B_f \leq 1$, если $\sigma_\alpha(f) = 0$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $\alpha(x) = \exp(c(\ln x)^\mu)$, где $0 < c < +\infty$, $0 < \mu < +\infty$. Тогда выполнены условия 1)–4) и (19), причем $\beta(x) = \exp(\ln x/c)^{1/\mu}$. Положим

$$\tilde{\sigma}_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; \mathcal{G}, f)}{(\ln r)^{1-\mu} \exp c(\ln r)^\mu}, \quad \tilde{\nu}_f = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\|(\ln \|n\|)^{1/\mu}}{\ln(1/b_n)} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

По теореме 6, если $\tilde{\sigma}_f < +\infty$, то $\tilde{\nu}_f \leq c^{1/\mu}$. Если при этом $\tilde{\sigma}_f \in (0, +\infty)$, то $\tilde{\nu}_f = c^{1/\mu}$. В частности, если $\mu = 1$, то

$$\alpha(x) = x^c, \quad \mu(x) = x^{1/c},$$

$$\tilde{\sigma}_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; \mathcal{G}, f)}{r^c}, \quad \tilde{\nu}_f = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\|n\| \ln \|n\|}{\ln(1/b_n)}.$$

На основании теоремы 6 делаем вывод, который в рамках величин $\tilde{\sigma}_f$ и $\tilde{\nu}_f$ нельзя улучшить: если $\tilde{\sigma}_f = 0$, то $\tilde{\nu}_f \leq c$, а если $\tilde{\sigma}_f \in (0, +\infty)$, то $\tilde{\nu}_f = c$.

2. Целые функции с различным характером роста по переменным. До сих пор мы рассматривали характеристики роста целых функций (типа $M(R; \mathcal{G}, f)$), которые не учитывали специфику многомерного случая, т.е. возможность различного роста функции $f \in A(\mathbb{C}^m)$ по переменным $z_1, z_2, \dots, z_m$. В настоящем пункте приводятся некоторые результаты, в которых такая специфика учитывается.

Положим для любой функции $f(z) \in A(\mathbb{C}^m)$ и для любого $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$

$$M_f[r] = \max\{|f(z)| : |z_j| \leq r_j, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть непрерывно дифференцируемые на $[1, \infty)$ функции $\alpha_j(x)$ обладают свойствами 1)–3) и $\beta_j(x)$ – обратные к ним функции ($j = 1, \dots, m$). Пусть, далее, $f \in A(\mathbb{C}^m)$ и существуют $T < \infty$, $A_j < +\infty$ ($1 \leq j \leq m$) такие, что

$$\ln M_f[r] \leq T + \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m.$$

Тогда

$$\ln |f_n| \leq T - \sum_{j=1}^m \int_0^{n_j} \ln \beta\left(\frac{t}{A_j}\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенствам Коши

$$|f_n| \leq M_f[r] r^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m.$$

Отсюда для тех же n и r

$$\ln |f_n| \leq T + \sum_{j=1}^m \left(A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt - n_j \ln r_j \right).$$

Положив $r_j = \beta_j(n_j/A_j)$, $j = 1, \dots, m$, получим (после замены $\alpha_j(t) = v_j$ в каждом из интегралов)

$$A_j \int_1^{\beta_j(n_j/A_j)} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt - n_j \ln \beta_j\left(\frac{n_j}{A_j}\right) = - \int_0^{n_j} \ln \beta_j\left(\frac{t}{A_j}\right) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, неравенства (20) установлены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\alpha \in \bar{I}$,

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n \in A(\mathbb{C}^m)$$

и существуют конечные постоянные T и A_j , $j = 1, \dots, m$, такие, что выполняются неравенства (20).

Тогда по любой системе чисел $(B_1, \dots, B_m)$, для которых $B_j > A_j$, $j = 1, \dots, m$, найдется конечное число $T_1 < \infty$ такое, что

$$\ln M_f[r] \leq T_1 + \sum_{j=1}^m B_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(x)}{x} dx \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$M_f[r] \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |f_n| r^n \leq T_0 \sum_{\|n\|=0}^{\infty} r^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \int_0^{n_j} \ln \beta_j\left(\frac{t}{A_j}\right) dt\right) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m,$$

где $T_0 := \exp T$. Положим

$$D_{n_j} = \sup_{r_j > 0} \left\{ r_j^{n_j} \exp\left(-B_j \int_0^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt\right) \right\}.$$

Как отмечалось выше,

$$D_{n_j} = \exp \int_0^{n_j} \ln \beta\left(\frac{t}{B_j}\right) dt, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда для всех $r \in \mathbb{R}_+^m$

$$M_f[r] \leq T_0 \exp\left(\sum_{j=1}^m B_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt\right) \sum_{\|n\|=0}^{\infty} \exp\left(-\sum_{j=1}^m \int_0^{n_j} \left(\ln \beta\left(\frac{t}{A_j}\right) - \ln \beta\left(\frac{t}{B_j}\right)\right) dt\right).$$

Но, как и выше (см. [2], [3]), каждый ряд

$$S_j := \sum_{n_j=0}^{\infty} \exp\left(-\int_0^{n_j} \ln \frac{\beta(t/A_j)}{\beta(t/B_j)} dt\right), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

сходится. Если $S = \prod_{j=1}^m S_j$, то

$$M_f[r] \leq T_0 S \exp\left(\sum_{j=1}^m B_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt\right) \quad \forall r_j \in \mathbb{R}_+^m,$$

и неравенство (21) доказано.

Положим $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j \in \overline{I}$, $1 \leq j \leq m$, $(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, где $\beta_j = \alpha_j^{-1}$, $1 \leq j \leq m$. Для любой целой функции

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n$$

введем множества

$$E_f^{(\alpha)} := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}_+ : \exists T = T(\gamma) < \infty \quad \ln M_f[r] \leq T + \gamma \sum_{j=1}^m \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^m \right\},$$

$$E_f^{(\beta)} := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}_+ : \exists D = D(\gamma) < \infty \quad \ln |f_n| \leq D - \sum_{j=1}^m \int_0^{n_j} \ln \beta_j \left(\frac{t}{\gamma} \right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m \right\}.$$

Положим $\sigma(f, \{\alpha\}) = \inf E_f^{(\alpha)}$, $\tau(f, \{\beta\}) = \inf E_f^{(\beta)}$. Из предложений 4, 5 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 7. Если $\alpha_j \in \overline{I}$, $j = 1, \dots, m$, то для любой целой в $\mathbb{C}^m$ функции f

$$\sigma(f, \{\alpha\}) = \tau(f, \{\beta\}).$$

Введем еще два подмножества $\mathbb{R}_+^m$:

$$H_f^{(\alpha)} = \left\{ A = (A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}_+^m : \exists T = T(A) < \infty \right. \\ \left. \ln M_f[r] \leq T + \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m \right\},$$

$$H_f^{(\beta)} = \left\{ B = (B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{R}_+^m : \exists D = D(B) \right. \\ \left. \ln |f_n| \leq D - \sum_{j=1}^m \int_0^{n_j} \ln \beta_j \left(\frac{t}{B_j} \right) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m \right\}.$$

Непосредственно из предложений 4, 5 выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. Если $\alpha_j \in \overline{I}$, $j = 1, \dots, m$, то

$$\text{int } H_f^{(\alpha)} = \text{int } H_f^{(\beta)} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

Заметим, что гиперповерхность $\partial H_f^{(\alpha)}$ разбивает $\mathbb{R}_+^m$ на два множества, одним из которых является $\text{int } H_f^{(\alpha)}$. Естественно назвать ее *гиперповерхностью сопряженных типов по системе (α)* .

Из теоремы 8 следует, что в ее предположениях гиперповерхность сопряженных типов по системе (α) любой функции $f \in A(\mathbb{C}^m)$ совпадает с гиперповерхностью $\partial H_f^{(\beta)}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\alpha \in \bar{I}$ и $A = (A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}_+^m$. Тогда $A \in \partial H_f^{(\alpha)}$ (т.е. $(A_1, \dots, A_m)$ – сопряженные типы f по системе (α)) в том и только том случае, если

$$\Delta_f := \overline{\lim}_{\|r\| \rightarrow \infty} \left(\ln M_f[r] / \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \right) = 1. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (22). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется r_0 такое, что

$$\ln M_f[r] < \sum_{j=1}^m (A_j + \varepsilon) \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \quad \forall \|r\| \geq r_0,$$

откуда

$$\ln M_f[r] < C + \sum_{j=1}^m (A_j + \varepsilon) \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^m$$

и $(A_1 + \varepsilon, \dots, A_m + \varepsilon) \in H_f^{(\alpha)} \quad \forall \varepsilon > 0$. Следовательно, $A \in \overline{H_f^{(\alpha)}}$. Допустим, что $A \in \text{int } H_f^{(\alpha)}$. Но тогда найдется $\theta_0 \in (0, 1)$ такое, что $\theta A \in H_f^{(\alpha)} \quad \forall \theta \in (1, 1 + \theta_0)$, откуда

$$\overline{\lim}_{\|r\| \rightarrow \infty} \left(\ln M_f[r] / \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \right) \leq \frac{1}{\theta} < 1.$$

Следовательно, $A \in \partial H_f^{(\alpha)}$.

Обратно, пусть $A \in \partial H_f^{(\alpha)}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\tilde{A}_k, k = 1, \dots, m$, такие, что $|\tilde{A}_k - A_k| < \varepsilon$ и $\tilde{A} = (\tilde{A}_k)_{k=1}^m \in H_f^{(\alpha)}$. Поэтому найдется $C < \infty$ такое, что для всех $r \in \mathbb{R}_+^m$

$$\ln M_f[r] \leq C_\varepsilon + \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt + \varepsilon \sum_{j=1}^m \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt,$$

$$\overline{\lim}_{\|r\| \rightarrow \infty} \left(\ln M_f[r] / \sum_{j=1}^m A_j \int_1^{r_j} \frac{\alpha_j(t)}{t} dt \right) \leq 1 + \varepsilon \max \left\{ \frac{1}{A_j} : 1 \leq j \leq m, A_j \neq 0 \right\}.$$

Штрих означает суммирование по тем $j \leq m$, для которых $A_j \neq 0$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то $\Delta_f \leq 1$. Если $\Delta_f < 1$, то, очевидно, $A \in \text{int } H_f^{(\alpha)}$. Окончательно, $\Delta_f = 1$.

Аналогичную характеристику гиперповерхности $\partial H_f^{(\beta)}$ пока можно дать лишь при дополнительных предположениях относительно функции α . Например, если $\alpha \in I$ и выполнено условие (9), то

$$B = (B_1, \dots, B_m) \in \partial H_f^{(\beta)}$$

$$\iff \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\|n\|} \ln |f_n| + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\|n\|} \int_0^{n_j} \ln \beta_j \left(\frac{t}{B_j} \right) dt \right) = 0.$$

3. Сравнение с помощью сопряженных функций. Приведенные выше результаты о связи между порядком возрастания модуля целой функции и характером убывания модулей ее тейлоровских коэффициентов такие, как теоремы 1, 2 и их многочисленные следствия, имеют тот недостаток, что “не различают” весовые функции, эквивалентные друг другу при $r \rightarrow \infty$. Иначе говоря, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \alpha_1(t) d \ln t / \int_1^r \alpha(t) d \ln t \right) = 1, \quad f \in A(\mathbb{C}^m),$$

то $\sigma_{\alpha_1}(f) = \sigma_{\alpha_2}(f)$, и как следствие $\nu_{\alpha_1}(f) = \nu_{\alpha_2}(f)$ (предполагаем, что $\alpha_j \in \bar{I}$, $j = 1, 2$).

Мы опишем сейчас другой подход к описанию указанной связи, свободный от этого недостатка и основанный на использовании функции, сопряженной с данной в смысле Лежандра–Юнга–Фенхеля (или просто сопряженной).

Пусть $r_0 \in (0, +\infty)$. Будем говорить, что вещественнозначная функция $H(r)$ удовлетворяет условиям (A), если $H(r)$ определена и ограничена снизу на любом промежутке $[r_0, M]$, $M < +\infty$, и если $\lim_{r \rightarrow \infty} (H(r)/r) = +\infty$.

Если $H(r)$ удовлетворяет условиям (A), то на $[0, +\infty)$ определена сопряженная к ней функция $H^*(x) = \sup_{r \geq r_0} [xr - H(r)]$.

Как известно (см., например, [8, гл. III, § 12]), $H^*(r)$ не убывает на $[0, +\infty)$, т.е. $H^*(x) \geq H^*(0) = -\inf_{r \geq r_0} H(r) \quad \forall x \in [0, +\infty)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H^*(x)}{x} = +\infty.$$

Поэтому на $[0, +\infty)$ определена сопряженная к H^* функция

$$H^{**}(x) = \sup_{t \geq 0} \{xt - H^*(t)\}.$$

Для нее $H(r) \geq H^{**}(r_0) \quad \forall r \geq r_0$, и равенство $H(r) = H^{**}(r)$, $r \geq r_0$, имеет место тогда и только тогда, когда $H(r)$ выпукла на $[r_0, +\infty)$. Так, в частности, будет, если для $H(r)$ выполнены условия (A), $H(r)$ непрерывно дифференцируема на $[r_0, +\infty)$, а $H'(r)$ монотонно возрастает. В этом случае, если $H_1(x)$ – обратная к $H'(x)$ функция, то $H^*(x) = xH_1(x) - H(H_1(x))$, $x \geq x_1$.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ – ограниченная полная кратногоугольная область в $\mathbb{C}^m$ с центром в начале координат и

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_n z^n \in A(\mathbb{C}^m).$$

Положим для любого $r > 0$

$$\mu_f(r, \mathcal{G}) = \sup_{\|n\| \geq 0} \{ |f_n| d_n(\mathcal{G}) r^{\|n\|} \} = \sup_{\|n\| \geq 0} \{ b_n r^{\|n\|} \}.$$

Пусть, кроме того, $r_1 = \exp r_0$.

ТЕОРЕМА 10. Если H удовлетворяет условиям (A), то

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+^m} \{\ln b_n + H^*(\|n\|)\} = \sup_{r \geq r_1} \{\ln \mu_f(r, \mathcal{G}) - H(\ln r)\} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала правая часть равенства (23) конечна и равна d . Тогда $\ln \mu_f(r, \mathcal{G}) \leq H(\ln r) + d \quad \forall r \geq r_1$. Отсюда

$$\begin{aligned} \ln b_n &\leq d + H(\ln r) - \|n\| \ln r, \quad \ln b_n \leq d - \sup_{x \geq x_0} \{\|n\|x - H(x)\} = d - H^*(n) \\ &\forall n \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \forall r \geq r_1. \end{aligned}$$

Пусть теперь левая часть равенства (23) конечна и равна D . Тогда $\ln b_n \leq D - H^*(\|n\|) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m$. Отсюда

$$\ln b_n r^{\|n\|} \leq D + \sup_{x \geq 0} \{x \ln r - H^*(r)\} = D + H^{**}(\ln r) \leq D + H(\ln r) \quad \forall r \leq r_1.$$

Следовательно, $\mu_f(r, \mathcal{G}) \leq D + H(\ln r) \quad \forall r \geq r_1$.

Приведем теперь оценку для $M(r; \mathcal{G}, f)$, хорошо известную при $m = 1$:

$$\begin{aligned} M(r; \mathcal{G}, f) &\leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n r^{\|n\|} \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n(\theta r)^{\|n\|} \theta^{-\|n\|} \leq T(\theta) \mu_f(\theta r, \mathcal{G}) \\ &\forall r > 0, \quad \forall \theta \in (1, +\infty). \end{aligned}$$

Введем следующие характеристики целой функции f :

$$\begin{aligned} \delta(f; \mathcal{G}, H) &= \inf \left\{ c > 0 : \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln M(r; \mathcal{G}, f) - H(\ln r + c)) < +\infty \right\}, \\ \gamma(f; \mathcal{G}, H) &= \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \left(\ln(b_n)^{1/\|n\|} + \frac{H^*(\|n\|)}{\|n\|} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 11. Если функция $H(x)$ удовлетворяет условиям (A) и не убывает на $[x_0, +\infty)$, то

$$\delta(f; \mathcal{G}, H) = \gamma(f; \mathcal{G}, H) \quad \forall f(z) \in A(\mathbb{C}^m). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta = \delta(f; \mathcal{G}, H)$, $\gamma = \gamma(f; \mathcal{G}, H)$.

1) Пусть сначала $\gamma < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $D < +\infty$ такое, что

$$\ln b_n + H^*(\|n\|) < \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right) \|n\| + D \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Выберем число $\theta > 1$ так, чтобы $2 \ln \theta < \varepsilon$. Для всех $r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} M(r; \mathcal{G}, f) &\leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n r^{\|n\|} \leq T(\theta) \sup_{\|n\| \geq 0} \{b_n(\theta r)^{\|n\|}\}, \\ \ln M(r; \mathcal{G}, f) &\leq T_1(\theta) + \sup_{\|n\| \geq 0} \left\{ -H^*(\|n\|) + D + \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right) \|n\| + \|n\| \ln r + \|n\| \ln \theta \right\} \\ &\leq T_2(\theta) + \sup_{x \geq 0} \{x(\gamma + \varepsilon + \ln r) - H^*(x)\} \leq T_2(\theta) + H(\ln r + \gamma + \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\ln M(r; \mathcal{G}, f) - H(\ln r + \gamma + \varepsilon)) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

и, следовательно, $\gamma + \varepsilon \geq \delta \quad \forall \varepsilon > 0$, т.е. $\gamma \geq \delta$.

2) Пусть теперь $\delta < +\infty$. Тогда для любых $n \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\varepsilon > 0$ найдется $Q < \infty$ такое, что

$$\begin{aligned} \ln b_n &\leq \ln M(r; \mathcal{G}, f) - \|n\| \ln r \leq Q + H(\ln r + \delta + \varepsilon) - \|n\| \ln r \\ &= Q + \|n\|(\delta + \varepsilon) - (\|n\|(\ln r + \delta + \varepsilon) - H(\ln r + \delta + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\ln b_n \leq Q + \|n\|(\delta + \varepsilon) - \sup_{t \geq 0} \{\|n\|t - H(t)\} = Q + \|n\|(\delta + \varepsilon) - H^*(\|n\|) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Следовательно, $\ln(b_n)^{1/\|n\|} + H^*(\|n\|)/\|n\| \leq Q/\|n\| + \delta + \varepsilon$, откуда $\gamma \leq \delta + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, т.е. $\gamma \leq \delta$. Окончательно, $\gamma = \delta$.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $f \in A(\mathbb{C}^m)$, $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1 = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_k| \leq 1, k = 1, \dots, n\}$. Тогда $d_n(\mathcal{E}_1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^m$. Положим $M_f(r) = M(r; \mathcal{E}_1, f)$. Тогда, как известно, $\ln M_f(r)$ – выпуклая функция от $\ln r$:

$$\ln M_f(r) = s + \int_1^r \frac{\nu(t)}{t} dt.$$

При этом, если f – трансцендентная целая функция (т.е. f – не полином), то функция ν монотонно и неограниченно возрастает. Положим

$$H_0(x) = s + \int_1^{e^x} \frac{\nu(t)}{t} dt = \ln M_f(e^x).$$

Тогда $H_0(x)$ – выпуклая функция от x на $(0, \infty)$, монотонно и неограниченно возрастающая. Для всякого $c \in (-\infty, +\infty)$ положим

$$\delta_c := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln M_f(r) - H_0(\ln r + c)) \leq 0.$$

Легко проверить, что $\delta_c \leq 0$ при $c \geq 0$, $\delta_0 = 0$ и $\delta_c = +\infty \quad \forall c > 0$. Таким образом, $\delta(f; \mathcal{E}_1, H_0) = 0$ и по теореме 11

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \left(\ln |f_n|^{1/\|n\|} + \frac{H_0^*(\|n\|)}{\|n\|} \right) = 0.$$

При этом $H_0(x)$ – выпуклая функция, определенная на $[0, +\infty)$. Последнее равенство, пожалуй, наиболее точно характеризует порядок убывания тейлоровских коэффициентов целой функции с заданным максимумом модуля (в определенном смысле это равенство неулучшаемо).

В качестве примера рассмотрим функцию $H(x) = g(x) + \nu x$, где функция $g(x)$ непрерывна, дифференцируема и положительна на $[x_0, +\infty)$, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} H'(x) = +\infty$

(и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} (H(x)/x) = +\infty$). В данном случае $H^*(t) = g^*(t - \nu)$ и по теореме 10

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \left(\ln(b_n)^{1/\|n\|} + \frac{g^*(\|n\| - \nu)}{\|n\|} \right) = \inf \left\{ c > 0 : \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln M(r; \mathcal{G}, f) - g(\ln r + c) - \nu \ln r) < +\infty \right\} \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

Если, в частности, $g(x) = x^2$, то, как легко подсчитать,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; \mathcal{G}, f) - (\ln r)^2}{\ln r} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} \left(\ln |b_n|^{1/\|n\|} + \frac{\|n\|}{4} \right) \quad \forall f \in A(\mathbb{C}^m).$$

Таким образом, теорема 11 позволяет охарактеризовать порядок убывания тейлоровских коэффициентов целых функций, рост максимума модуля которых имеет двучленную (и даже более сложную) асимптотику.

В заключение рассмотрим уже знакомый случай, когда

$$H(r) = \int_1^{\exp r} \alpha(t) d \ln t.$$

Пусть I_1 – класс всех непрерывных, монотонно возрастающих на $[1, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям 1), 3) из п. 1 (как и выше, условие 1) может быть опущено). Очевидно, что I – собственное подмножество I_1 . Пусть $\alpha \in I_1$. Тогда $H(r)$ – выпуклая функция от r , причем

$$H'(r) = \alpha(e^r), \quad H_1(r) = \ln \beta(r), \quad H^*(r) = \int_0^r \ln \beta(t) dt.$$

Пусть $f \in A(\mathbb{C}^m)$ и $\gamma = \gamma(f; \mathcal{G}, H)$, $\delta = \delta(f; \mathcal{G}, H)$. Имеем

$$\gamma = \ln \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} (b_n)^{1/\|n\|} \beta_n,$$

где

$$\beta_n := \exp \left(\frac{1}{\|n\|} \right) \int_0^{\|n\|} \ln \beta(t) dt.$$

Что же касается величины δ , то в данной ситуации ее можно представить в несколько иной форме. Прежде всего, заметим, что если $\delta < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d < +\infty$ такое, что

$$\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq d + \int_1^{r \exp(\delta + \varepsilon)} \alpha(t) d \ln t \quad \forall r \geq r_0.$$

Тогда при $r \geq r_\varepsilon$

$$\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq \int_1^{b(r)} \alpha(t) d \ln t, \quad b(r) = r \exp(\delta + 2\varepsilon).$$

Положим $\zeta(r) = \int_1^r \alpha(t) d \ln t$. Так как $\zeta(r)$ непрерывно и монотонно возрастает на $[1, +\infty)$, то обратная к ней функция $\zeta^{-1}(r)$ определена на $[0, +\infty)$. При этом для всех $r \geq r_1$ выполнено $\zeta^{-1}(\ln M(r; \mathcal{G}, f)) \leq b(r)$. Положим

$$\eta := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\zeta^{-1}(\ln M(r; \mathcal{G}, f))}{r}.$$

Имеем $\eta \leq \exp(\delta + 2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$, откуда $\eta \leq \exp \delta$.

Пусть теперь $\eta < +\infty$. Тогда $\ln M(r; \mathcal{G}, f) \leq \zeta(r(\eta + \varepsilon)) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall r > \tilde{r}_\varepsilon$, и потому

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln M(r; \mathcal{G}, f) - \zeta(r(\eta + \varepsilon))) < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда $\eta + \varepsilon \geq \exp \delta \quad \forall \varepsilon > 0$, т.е. $\eta \geq \exp \delta$. В итоге $\eta = \exp \delta$, и, учитывая равенство (24), приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 12. Если $\alpha \in I_1$, то для любой функции $f \in A(C^m)$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\zeta^{-1}(\ln M(r; \mathcal{G}, f))}{r} = \overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow \infty} (b_n)^{1/\|n\|} \exp\left(\frac{1}{\|n\|}\right) \int_0^{\|n\|} \ln \beta(t) dt,$$

где $\mathcal{G}$ — любая ограниченная полная кратнокруговая область с центром в начале координат, $b_n = |f_n|d_n(\mathcal{G})$, $\beta(t)$ — функция, обратная к $\alpha(r)$, а $\zeta^{-1} - \kappa \int_1^r \alpha(t) d \ln t$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
- [2] Осолков В. А. О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 129–148.
- [3] Осолков В. А. Свойства функций, заданных значениями их линейных функционалов. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1995.
- [4] Ронкин Л. И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев: Наукова думка, 1977.
- [5] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [6] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [7] Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Матем. сб. 1978. Т. 106. № 1. С. 44–65.
- [8] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Ростовский государственный университет
E-mail: kor@rsu.rnd.su

Поступило
27.06.95