Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Коцеев, О разбиении компактов, допускающих T -системы комплексных функций, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 259–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:23:21

УДК 517

О РАЗБИЕНИИ КОМПАКТОВ, ДОПУСКАЮЩИХ T -СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Кошечев

Рассматриваются полунепрерывные сверху разбиения на континуумы компакта, допускающего чебышевскую систему непрерывных комплексных функций. В частности, для пространства разбиения Мура доказывается возможность вложения в двумерную сферу его циклических элементов.

Библиография: 8 названий.

Введение. Рассматриваются компакты Q (т.е. метризуемые бикомпактные пространства), для которых в пространстве $C(Q, \mathbb{C})$ непрерывных комплексных функций существует система Чебышева порядка n (кратко $T(n, \mathbb{C})$ -система или просто T -система)

$$\{f_1(q), \dots, f_n(q)\}, \quad (1)$$

т.е. система линейно независимых функций, полиномы по которой с комплексными коэффициентами обладают свойством единственности элемента наилучшего приближения для любой функции из $C(Q, \mathbb{C})$.

T -системы комплексных функций изучались многими авторами [1]–[4]. В 1948 году А. Н. Колмогоровым получен критерий для $T(n, \mathbb{C})$ -систем [1]. В работах Шенберга и Янга [2] и Овердека [3] показано, что если Q – двумерный или одномерный локально связный компакт и на Q существует $T(n, \mathbb{C})$ -система порядка $n > 1$, то Q гомеоморфен подмножеству плоскости $\mathbb{C}$.

В работе рассматриваются полунепрерывные сверху разбиения на континуумы компакта Q , допускающего $T(n, \mathbb{C})$ -систему (1) порядка $n > 2$. В частности, полунепрерывным сверху является разбиение Мура $\mathcal{D}$ компакта Q на компоненты множества $\overline{N}$ и отдельные точки дополнения $Q \setminus \overline{N}$, где N – множество точек, в которых Q не является локально связным. В п. 2 доказывается возможность вложения в сферу S^2 циклических элементов пространства разбиения $\mathcal{D}$. В п. 1 для метрического континуума Q и натурального n рассматривается семейство $e_n Q$ всех конечных подмножеств из Q мощности точно равной n и доказывается связность этого семейства в хаусдорфовой метрике. Результаты п. 1 используются в п. 2.

Пункт 2 работы выполнен при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-196.

1. Связность $e_n Q$. Подчеркнем отличие определенного во введении семейства $e_n Q$ от часто встречающегося в математической литературе семейства $\text{exr}_n Q$ всех конечных подмножеств пространства Q мощности, не превосходящей n (см., например, [5]), связность которого хорошо известна [6, теорема 12, с. 147].

Обозначим через $d(\cdot, \cdot)$ хаусдорфову метрику в пространстве $\text{exr } Q$ всех непустых замкнутых подмножеств компакта Q . Семейство $e_n Q$ с индуцированной метрикой обозначим тем же символом.

ЛЕММА 1. *Для метрического континуума Q пространство $e_n Q$ связно при любом натуральном n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим по индукции, что для любого $m \leq n$ и любого метрического континуума Q $e_m Q$ связно, и докажем связность $e_{n+1} Q$.

По теореме Мазуркевича и Янишевского [6, теорема 1, с. 200] для любых двух точек из Q существует континуум, неприводимый между этими точками. Пусть $a, b \in Q$ ($a \neq b$) и континуум $K \subset Q$ неприводим между a и b , т.е. $a, b \in K$, но эти точки нельзя соединить никаким собственным подконтинуумом континуума K . Докажем вначале связность $e_{n+1} K$.

По теореме Борсука и Мазуркевича [6, теорема 3, с. 195] существует монотонное семейство континуумов из K , образующее в пространстве $\text{exr } K$ дугу с концами a и K , т.е. существует гомеоморфизм

$$F: [0, 1] \rightarrow F([0, 1]) \subset \text{exr } K, \quad F(0) = a, \quad F(1) = K,$$

такой, что для любого $t \in [0, 1]$ $F(t)$ – континуум из K , из $t < t'$ следует $F(t) \subset F(t')$. Аналогично, существует гомеоморфизм

$$G: [0, 1] \rightarrow G([0, 1]) \subset \text{exr } K, \quad G(0) = K, \quad G(1) = b,$$

причем для любого $\tau \in [0, 1]$ $G(\tau)$ – континуум из K , из $\tau > \tau'$ следует $G(\tau) \subset G(\tau')$. Заметим, что ввиду неприводимости K между точками a и b выполнено $b \notin F(t)$ для любого $t \in [0, 1]$.

Пару чисел $(t, \tau) \in [0, 1) \times (0, 1]$ назовем *допустимой*, если $F(t) \cap G(\tau) = \emptyset$. Для допустимой пары (t, τ) рассмотрим множество

$$M_{t, \tau} = \{ \{q_1, q_2, \dots, q_n, p\} \in e_{n+1} K : \{q_1, \dots, q_n\} \in e_n F(t), p \in G(\tau) \}.$$

Так как $e_n F(t)$ связно по предположению индукции и $M_{t, \tau}$ гомеоморфно произведению $e_n F(t) \times G(\tau)$, то $M_{t, \tau}$ связно.

Для любых допустимых пар (t, τ) и (t', τ')

$$M_{t, \tau} \cap M_{t', \tau'} \neq \emptyset.$$

В самом деле, с одной стороны, в силу монотонности семейства $G(\cdot)$ $b \in G(\tau) \cap G(\tau')$. С другой стороны, ввиду монотонности семейства $F(\cdot)$ либо $F(t) \subset F(t')$, либо $F(t') \subset F(t)$.

Из доказанного следует, что объединение M множеств $M_{t, \tau}$ по всем допустимым парам (t, τ) является связным множеством в $e_{n+1} K$.

Пусть $\{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\} \in e_{n+1}K$. Рассмотрим вначале случай $q_{n+1} = b$. Так как $F(1) = K$, объединение континуумов $F(t)$ по всем $t \in [0, 1)$ плотно в K , поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует число $t \in (0, 1)$ такое, что

$$\max_{i=1, \dots, n} \rho(q_i, F(t)) < \varepsilon,$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ – метрика в K . Откуда следует, что найдется такой элемент $\{q'_1, \dots, q'_n\} \in e_n F(t)$, что $\rho(q_i, q'_i) < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$), следовательно, $\{q_1, \dots, q_n, b\} \in \overline{M}$, где замыкание берется в $e_{n+1}K$. Пусть теперь $\{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\} \in e_{n+1}(K \setminus b)$,

$$\tau_0 = \inf_{\tau \in [0, 1]} \{q_i \notin G(\tau), i = 1, \dots, n+1\}.$$

Очевидно, что $G(\tau_0) \cap \{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\} \neq \emptyset$. Перенумеровав точки q_i , если это необходимо, можно считать, что $q_{n+1} \in G(\tau_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau > \tau_0$ такое, что $\rho(q_{n+1}, G(\tau)) < \varepsilon$, поэтому $\{q_1, \dots, q_{n+1}\}$ принадлежит замыканию в $e_{n+1}K$ связного множества

$$\bigcup_{\tau > \tau_0} \{\{q_1, \dots, q_n, q\} : q \in G(\tau)\},$$

которое, как только что было доказано, пересекается с $\overline{M}$.

Итак, каждая точка из $e_{n+1}K$ либо принадлежит связному множеству $\overline{M}$, либо содержится в замыкании некоторого связного множества, пересечение которого с $\overline{M}$ непусто. Значит, любые две точки из $e_{n+1}K$ можно соединить связным подмножеством, откуда следует связность $e_{n+1}K$.

Если A_1, A_2 – два подконтинуума из Q , $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, и для любого $m \leq n+1$ $e_m A_i$ связно ($i = 1, 2$), то, как нетрудно показать, $e_m(A_1 \cup A_2)$ также связно для тех же m . Аналогичное утверждение верно и для любого конечного числа подконтинуумов, пересечение которых непусто.

Пусть $\{q_1, \dots, q_{n+1}\} \in e_{n+1}Q$, $\{q'_1, \dots, q'_{n+1}\} \in e_{n+1}Q$, $q_0 \in Q$; K_i, K'_i – подконтинуумы из Q , неприводимые между q_0 и q_i соответственно между q_0 и q'_i , $i = 1, \dots, n+1$. В силу доказанного множество

$$e_{n+1} \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} K_i \cup K'_i \right)$$

связно. Таким образом, любые два элемента из $e_{n+1}Q$ можно соединить связным подмножеством, следовательно, $e_{n+1}Q$ связно.

2. Разбиения Q . Как известно, *разбиением пространства Q* называется семейство $\mathscr{D}$ замкнутых непустых и непересекающихся подмножеств из Q , объединение которых представляет собой все пространство Q . Семейство $\mathscr{D}$ в своей фактортопологии называется *пространством разбиения*, отображение $P: Q \rightarrow \mathscr{D}$, называемое *проекцией*, определяется условием $P(q) = D$ тогда и только тогда, когда $q \in D \in \mathscr{D}$. Разбиение $\mathscr{D}$ называется *полунепрерывным сверху*, если для всякого открытого множества $G \subset Q$ объединение всех $D \in \mathscr{D}$, содержащихся в G , открыто; это эквивалентно условию, что P – замкнутое отображение [6, с. 72].

ТЕОРЕМА 1 [6, с. 74]. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы разбиение $\mathcal{D}$ компакта Q было полунепрерывным сверху:*

- 1) *из условия $D \cap \text{Li } D_n \neq \emptyset$ следует, что $\text{Ls } D_n \subset D$, где $D, D_n \in \mathcal{D}$;*
- 2) *если последовательность $D_1, D_2, \dots$ сходится, то ее предел содержится в единственном элементе разбиения $\mathcal{D}$.*

По теореме П. С. Александрова [6, теорема 1, с. 73] полунепрерывное сверху разбиение компакта (в своей фактортопологии) гомеоморфно компактному метрическому пространству.

ТЕОРЕМА 2 (Мур, [6, с. 253]). *Пусть Q – континуум и N – множество точек, в которых Q не является локально связным. Тогда пространство разбиения Q на компоненты множества $\overline{N}$ и отдельные точки дополнения $Q \setminus \overline{N}$ является локально связным континуумом.*

Другими словами, существует непрерывное отображение f компакта Q на Y такое, что Y есть локально связный континуум, и семейство множеств $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, совпадает с семейством компонент множества $\overline{N}$ и отдельных точек дополнения $Q \setminus \overline{N}$.

Заметим, что отображение f является монотонным, т.е. прообразы связных множеств связны [6, теорема 9, с. 140].

Разбиения, вообще говоря, отличные от указанных разбиений Мура, возникают при рассмотрении замкнутых подмножеств пространства разбиения и их полных прообразов при факторотображении. Точнее, пусть $\mathcal{D}$ – разбиение Мура компакта Q с пространством разбиения Y и проекцией f . Для замкнутого подмножества $Y_0 \subset Y$ рассмотрим разбиение множества $f^{-1}(Y_0)$, индуцированное разбиением $\mathcal{D}$, на семейство замкнутых связных подмножеств $\{f^{-1}(y) : y \in Y_0\}$. Разбиение, индуцированное разбиением Мура (также как и само разбиение Мура), является полунепрерывным сверху. Более того, разбиение любого компактного пространства на компоненты полунепрерывно сверху [6, теорема 1, с. 190]. Отметим также, что если f – непрерывное отображение компакта X на компакт Y , то разбиение $X = \bigcup_{y \in Y} \{f^{-1}(y)\}$ полунепрерывно сверху [6, теорема 3, с. 73].

Пусть даны компакт $Q \subset S^2$ и его полунепрерывное сверху разбиение $\mathcal{D}$ на континуумы $D \in \mathcal{D}$ с пространством разбиения Y и проекцией f . Рассмотрим компакт $Q' \supset Q$ (называемый далее ассоциированным с Q) и его разбиение $\mathcal{D}'$, которые связаны с Q и разбиением $\mathcal{D}$ следующим образом. Если элемент разбиения $D \in \mathcal{D}$ не разделяет сферу S^2 , то полагаем $D = D' \in \mathcal{D}'$. Пусть $D \in \mathcal{D}$ разделяет S^2 . Обозначим через D' множество из S^2 , которое получается из D добавлением к нему всех тех компонент дополнения $S^2 \setminus D$, которые не содержат точек множества Q . Так как компоненты открытого множества $S^2 \setminus D$ открыты, то D' замкнуто. Положим $Q' = \bigcup D'$, где объединение берется по всем $D' \in \mathcal{D}'$. Подмножество $Q' \subset S^2$ замкнуто, и $\mathcal{D}'$ является его полунепрерывным сверху разбиением на континуумы $D' \in \mathcal{D}'$. В самом деле, если $x \in \text{Li } D'_n$ и $x \notin \bigcup D'_n$, то $x \in \text{Li } D_n \subset Q \subset Q'$, так как расстояния от x до множеств D'_n и D_n совпадают. Далее, пусть $D', F' \in \mathcal{D}'$ и $D' \neq F'$. Тогда $D' \cap F' = \emptyset$. Действительно, если $D' = D \in \mathcal{D}$ или $F' = F \in \mathcal{D}$, то утверждение следует из определения семейства $\mathcal{D}'$. Пусть $D' \setminus D \neq \emptyset$ и $F' \setminus F \neq \emptyset$. Предположим, что $x \in D' \cap F'$. Обозначим через $A(B)$ компоненту точки x в множестве $S^2 \setminus D$ ($S^2 \setminus F$ соответственно). Так как $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$, а x и F лежат в разных компонентах множества $S^2 \setminus D$, то $B \cap D \neq \emptyset$, что

противоречит определению семейства $\mathcal{D}'$. Проверим полунепрерывность сверху разбиения $\mathcal{D}'$. В силу теоремы 1 достаточно показать, что $D' \cap \text{Li } D'_n \neq \emptyset$ влечет $\text{Ls } D'_n \subset D'$. Пусть $x \in D' \cap \text{Li } D'_n$. Тогда $x \in D \cap \text{Li } D_n$ и по теореме 1 $\text{Ls } D'_n = \text{Ls } D_n \subset D \subset D'$. Наконец, связность $D' \in \mathcal{D}'$ следует из связности D и того факта, что пересечение D с замыканием компоненты множества $S^2 \setminus D$ непусто.

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}: Q' \rightarrow Y$, полагая $\mathcal{F}(q') = f(D)$ для $q' \in D'$. Непрерывность $\mathcal{F}$ легко проверяется: если $q'_n \rightarrow q'$, $q'_n \in D'_n$, $q' \in D'$, то $q' \in D$ и найдется такая последовательность точек $q_n \in D_n$ (за исключением случая стационарной последовательности $\{D'_n\}$), что $q_n \rightarrow q'$, откуда $\mathcal{F}(q'_n) = f(q_n) \rightarrow f(q') = \mathcal{F}(q')$. Монотонность $\mathcal{F}$ следует из связности элементов разбиения $\mathcal{D}'$ [6, теорема 9, с. 140].

ЛЕММА 2. *Компакт Q' , ассоциированный с континуумом $Q \subset S^2$, пространством разбиения которого является Θ -кривая Y , состоящая из трех дуг l_0, l_1, l_2 (каждая пара которых имеет общими только концевые точки), разделяет сферу S^2 на три области Ω^0, Ω^1 и Ω^2 – компоненты множества $S^2 \setminus Q' = \bigcup_{j=0}^2 \Omega^j$. При этом $\text{Fr } \Omega^j \subset f^{-1}(l_j \cup l_{j-1})$ (индексы приведены по mod 3).*

Лемма 2 легко выводится из теоремы о Θ -кривой [6, с. 505] и следующей теоремы Мура [6, теорема 8, с. 526].

ТЕОРЕМА 3 (Мур). *Пространство полунепрерывного сверху разбиения сферы S^2 на континуумы, не разделяющие S^2 , гомеоморфно S^2 .*

Другими словами, если g – непрерывное отображение сферы S^2 на компакт Z такое, что для каждого $z \in Z$ множество $g^{-1}(z)$ – континуум, не разделяющий S^2 , то Z гомеоморфно S^2 .

Для получения разбиения сферы S^2 , о котором идет речь в теореме 3, из разбиения $\mathcal{D}'$ компакта $Q' \subset S^2$ семейство $\mathcal{D}'$ следует дополнить одноэлементными множествами из $S^2 \setminus Q'$. Отметим также, что в условиях леммы 2 элементы разбиения $\mathcal{D}'$ не разделяют S^2 . В самом деле, пусть $D \in \mathcal{D}$ разделяет S^2 и $f(D) = y \in Y$. Так как $Y \setminus y$ связно и f – монотонное отображение, $Q \setminus D = f^{-1}(Y \setminus y)$ лежит в одной компоненте множества $S^2 \setminus D$, скажем в компоненте G , поэтому при переходе от D к D' все остальные компоненты множества $S^2 \setminus D$ “закрашиваются”, следовательно, $S^2 \setminus D' = G$ связно.

ЛЕММА 3. *Пусть на компакте Q задана $T(n, \mathbb{C})$ -система (1) порядка $n > 2$, G – открытое подмножество из Q такое, что $e_{n-2}G \neq \emptyset$, $e_2(Q \setminus G) \neq \emptyset$. Тогда для любого элемента $\mathcal{P} \in e_{n-2}G$ существует непрерывное и инъективное отображение*

$$\xi(\mathcal{P}, \cdot): Q \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

такое, что отображение

$$\xi: e_{n-2}G \rightarrow C(Q \setminus G, \mathbb{CP}^1)$$

непрерывно, где

$$\xi(\mathcal{P}) = \xi(\mathcal{P}, \cdot)|_{Q \setminus G}: Q \setminus G \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

есть сужение отображения $\xi(\mathcal{P}, \cdot)$ на множество $Q \setminus G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{n-2}\} \in e_{n-2}Q$, $n > 2$, и система функций (1) является T -системой из $C(Q, \mathbb{C})$. Обозначим через $F(\mathcal{P})$ $(n-2) \times n$ -матрицу (a_{ij}) , полагая $a_{ij} = f_j(p_i)$. Для $q \in Q$ матрица $F(\mathcal{P}, q)$ получается из $F(\mathcal{P})$ добавлением $(n-1)$ -й строки вида $(f_1(q), \dots, f_n(q))$. Определитель $(n-1)$ -го порядка матрицы $F(\mathcal{P}, q)$, полученный вычеркиванием i -го столбца, обозначим $\Delta_i(\mathcal{P}, q)$.

Для любого $\mathcal{P} \in e_{n-2}Q$ существует вектор $l = (l_1, l_2)$ с целыми положительными координатами $1 \leq l_1 < l_2 \leq n$ такой, что отображение

$$q \rightarrow \xi_l(\mathcal{P}, q) = (\Delta_{l_1}(\mathcal{P}, q) : \Delta_{l_2}(\mathcal{P}, q)) \in \mathbb{CP}^1,$$

определенное на множестве $Q \setminus \mathcal{P}$, непрерывно и инъективно [4, лемма 1]. Вектор l , вообще говоря, зависит от элемента $\mathcal{P}$. Однако, если задано открытое множество $G \subset Q$ и выполнены условия леммы 3, то вектор l может быть выбран одинаковым для всех $\mathcal{P} \in e_{n-2}G$. Для этого зафиксируем $\{q_1, q_2\} \in e_2(Q \setminus G)$ и от системы (1) перейдем к другой $T(n, \mathbb{C})$ -системе на Q

$$\{\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)\},$$

составленной из полиномов по системе (1) таких, что $\varphi_i(q_j) = 0$ для $i = 1, \dots, n-2$, $j = 1, 2$. Это можно сделать в силу критерия Колмогорова для $T(n, \mathbb{C})$ -систем [1] (см. также [4]).

Для системы $\{\varphi_i(q)\}$ составим матрицу $\Phi(\mathcal{P}, q)$ по аналогии с матрицей $F(\mathcal{P}, q)$ для (1) и определители $\Delta_{n-1}(\mathcal{P}, q)$ и $\Delta_n(\mathcal{P}, q)$. Тогда вектор $l_0 = (n-1, n)$ задает требуемое отображение

$$\xi = \xi_{l_0}: \mathcal{P} \rightarrow \xi_{l_0}(\mathcal{P}, \cdot) \in C(Q \setminus G, \mathbb{CP}^1).$$

Обозначим через K_1 граф “три домика, три колодца”, через K_2 полный граф с пятью вершинами.

ТЕОРЕМА 4. Если на континууме Q существует $T(n, \mathbb{C})$ -система (1) порядка $n > 2$, то пространство полунепрерывного сверху разбиения Q на континуумы не содержит топологически графов K_1 и K_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим геометрическую реализацию графа K_1 в $\mathbb{R}^3$. А именно, рассмотрим граф, образованный вершинами тетраэдра $ABCD$, ребрами AB , AC , BD , CD , вершинами E и F – серединами отрезков $[A, D]$ и $[B, C]$ соответственно и ребрами EF , AE , ED , BF и FC .

Пусть $\mathcal{D}$ – полунепрерывное сверху разбиение Q на континуумы, Y – пространство разбиения $\mathcal{D}$, $f: Q \rightarrow Y$ – проекция. Если Y содержит (топологически) K_1 в качестве собственного подмножества, то система (1) является T -системой на континууме $f^{-1}(K_1)$ с индуцированным разбиением, поэтому доказательство сводится к случаю, когда $Y = K_1$ (с точностью до гомеоморфизма).

Введем в рассмотрение точки $L \in (A, E)$, $M \in (E, D)$, $N' \in (E, F)$ и положим

$$G = [E, L] \cup [E, M] \cup [E, N'].$$

Пусть K – подграф графа K_1 , порожденный вершинами A, B, C, D и F , $Q_K = f^{-1}(K)$. Разбиение континуума Q_K , индуцированное разбиением $\mathcal{D}$, и соответствующую проекцию на факторпространство K обозначим теми же символами $\mathcal{D}$ и f .

Рассмотрим триод

$$T = [L', E] \cup [M', E] \cup [N'', E] \subset G,$$

где $L' \in (L, E)$, $M' \in (M, E)$, $N'' \in (N', E)$. Для любого элемента $\mathcal{P} \in e_{n-2}f^{-1}(T)$ рассмотрим в соответствии с леммой 3 вложение $\xi(\mathcal{P}, \cdot)$ компакта Q_K в S^2 и положим $\xi(\mathcal{P}, Q_K) = Q_{K, \mathcal{P}}$. От компакта $Q_{K, \mathcal{P}} \subset S^2$ перейдем к ассоциированному с ним компакту $Q'_{K, \mathcal{P}}$ с тем же пространством разбиения K и проекцией $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Из определения ассоциированного компакта следует, что $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y)) \neq \mathcal{F}^{-1}(y)$ для $y \in K$ только в том случае, если $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y))$ разделяет S^2 и среди компонент множества $S^2 \setminus \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y))$ имеются такие, которые не содержат точек множества $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(K))$.

Покажем, что если $y \in K$ и $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y)) \neq \mathcal{F}^{-1}(y)$, то

$$\mathcal{F}^{-1}(y) \cap \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(Y \setminus (K \cup G))) = \emptyset. \quad (2)$$

Предположим противное. Пусть $y \in K$, $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y))$ разделяет S^2 и $H_{\mathcal{P}}$ — одна из компонент множества $S^2 \setminus \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y))$, которая “закрашивается” при переходе к ассоциированному компакту $Q'_{K, \mathcal{P}}$, причем

$$H_{\mathcal{P}} \cap \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(Y \setminus (K \cup G))) \neq \emptyset.$$

Пусть, например, $H_{\mathcal{P}}$ содержит точки множества $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(D, M))$. В силу инъективности $\xi(\mathcal{P}, \cdot)$ (по лемме 3) и монотонности f $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(D, M)) \subset H_{\mathcal{P}}$. По определению $Q'_{K, \mathcal{P}} \subset \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(K \setminus y)) \cap H_{\mathcal{P}} = \emptyset$. Пусть $q \in f^{-1}(K \setminus y)$, $p \in f^{-1}(M)$, тогда $\xi(\mathcal{P}, q) \notin \overline{H}_{\mathcal{P}}$, $\xi(\mathcal{P}, p) \in H_{\mathcal{P}}$. Разделитель $\text{Fr } H_{\mathcal{P}}$ содержит замкнутый неприводимый разделитель $R_{\mathcal{P}} \subset \text{Fr } H_{\mathcal{P}} \subset \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(y))$ между точками $\xi(\mathcal{P}, q)$ и $\xi(\mathcal{P}, p)$ [6, теорема 3, с. 250], причем $R_{\mathcal{P}}$ — общая граница двух компонент множества $S^2 \setminus R_{\mathcal{P}}$ [6, теорема 2, с. 469], одна из которых, скажем $A_{\mathcal{P}}$, содержит

$$H_{\mathcal{P}} \supset \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(D, M)) \ni \xi(\mathcal{P}, p),$$

а другая $B_{\mathcal{P}}$ содержит

$$\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(K \setminus y)) \ni \xi(\mathcal{P}, q).$$

Понятие замкнутого неприводимого разделителя сферы S^2 является топологическим инвариантом [6, с. 470] (см. также [7]), поэтому для любого $\mathcal{P}' \in e_{n-2}f^{-1}(T)$ множество $R_{\mathcal{P}'} = \xi(\mathcal{P}', R)$, где $R = \xi(\mathcal{P})^{-1}(R_{\mathcal{P}})$, также является замкнутым неприводимым разделителем S^2 , причем $S^2 \setminus R_{\mathcal{P}'}$ — объединение двух компонент $A_{\mathcal{P}'}$ и $B_{\mathcal{P}'}$ [6, теорема 2, с. 469; теорема 7, с. 490].

Покажем, что для любого $\mathcal{P}' \in e_{n-2}f^{-1}(T)$ связные множества

$$\xi(\mathcal{P}', f^{-1}(D, M)) \ni \xi(\mathcal{P}', p), \quad \xi(\mathcal{P}', f^{-1}(K \setminus y)) \ni \xi(\mathcal{P}', q) \quad (3)$$

принадлежат разным компонентам. Для этого рассмотрим подмножество U элементов $\mathcal{P}' \in e_{n-2}f^{-1}(T)$, для которых точки $\xi(\mathcal{P}', p)$ и $\xi(\mathcal{P}', q)$ лежат в разных компонентах дополнения $S^2 \setminus R_{\mathcal{P}'}$, и подмножество $V = [e_{n-2}f^{-1}(T)] \setminus U$. Нетрудно заметить, что множество V открыто.

Покажем, что U также открыто. Пусть $\mathcal{P}_0 \in U$. Рассмотрим на S^2 два открытых диска $V_p \ni \xi(\mathcal{P}_0, p)$ и $V_q \ni \xi(\mathcal{P}_0, q)$, замыкания которых не пересекаются ни между

собой, ни с множеством $R_{\mathcal{P}_0}$. Существует число ε ($0 < \varepsilon < 2$) такое, что для любого $q' \in \mathbb{R}$ геометрически правильный диск с центром в $\xi(\mathcal{P}_0, q')$ и радиусом ε содержится в кольце $S^2 \setminus (V_p \cup V_q)$. Возьмем в $e_{n-2}f^{-1}(T)$ столь малую окрестность W элемента $\mathcal{P}_0$, чтобы выполнялись условия: для любого $\mathcal{P}' \in W$ $\xi(\mathcal{P}', p) \in V_p$, $\xi(\mathcal{P}', q) \in V_q$; $R_{\mathcal{P}'} \subset S^2 \setminus (\overline{V_p} \cup \overline{V_q})$; расстояние между точками $\xi(\mathcal{P}_0, q')$ и $\xi(\mathcal{P}', q')$ в евклидовой метрике на S^2 меньше ε для любого $q' \in \mathbb{R}$. Существование такой окрестности W следует из леммы 3. При этих условиях можно указать гомотопию

$$H: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow S^2 \setminus (V_p \cup V_q),$$

при которой точка $H(t, q')$ при изменении $t \in [0, 1]$ пробегает однозначно определенную дугу (длины $< \pi$) большого круга, содержащего точки $\xi(\mathcal{P}_0, q')$ и $\xi(\mathcal{P}', q')$ – концы этой дуги. Отсюда следует, что для любого $\mathcal{P}' \in W$ диски $V_p \ni \xi(\mathcal{P}', p)$ и $V_q \ni \xi(\mathcal{P}', q)$ лежат в разных компонентах множества $S^2 \setminus R_{\mathcal{P}'}$ [6, теорема 2, с. 471].

По лемме 1 $e_{n-2}f^{-1}(T)$ связно и является объединением двух открытых множеств U и V , причем $\mathcal{P} \in U \neq \emptyset$, следовательно, $V = \emptyset$ и $e_{n-2}f^{-1}(T) = U$. Отсюда следует, что множества (3) принадлежат разным компонентам множества $S^2 \setminus R_{\mathcal{P}'}$ для любого $\mathcal{P}' \in e_{n-2}f^{-1}(T)$.

При $y \neq A$ и $\mathcal{P}'' \in e_{n-2}f^{-1}([N'', E])$ связное множество

$$\xi(\mathcal{P}'', f^{-1}((D, E) \cup [E, A]))$$

имеет общие точки с каждым из множеств (3) и, следовательно, с каждой из компонент $A_{\mathcal{P}''}$ и $B_{\mathcal{P}''}$, откуда следует, что оно имеет общие точки и с разделителем $R_{\mathcal{P}''}$, однако это противоречит инъективности $\xi(\mathcal{P}'', \cdot)$. При $y = A$ и $\mathcal{P}'' \in e_{n-2}f^{-1}([L', E])$ аналогичными свойствами обладает множество

$$\xi(\mathcal{P}'', f^{-1}((D, E) \cup [E, F])).$$

Таким образом, равенство (2) доказано.

Граф K является Θ -кривой. Положим $l_0 = [A, B] \cup [A, C]$, $l_1 = [B, D] \cup [D, C]$, $l_2 = [B, F] \cup [F, C]$. По лемме 2 $Q'_{K, \mathcal{P}}$ разделяет S^2 на три области $\Omega_{\mathcal{P}}^0$, $\Omega_{\mathcal{P}}^1$ и $\Omega_{\mathcal{P}}^2$ для любого $\mathcal{P} \in e_{n-2}f^{-1}(T)$, и в силу равенства (2)

$$\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(Y \setminus (K \cup G))) \subset \bigcup_{i=0}^2 \Omega_{\mathcal{P}}^i.$$

Используя леммы 1–3 и рассуждая как при доказательстве равенства (2), нетрудно показать, что для любого $\mathcal{P} \in e_{n-2}f^{-1}(T)$ множество $\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(Y \setminus (K \cup G)))$ содержится в одной из этих компонент, скажем в $\Omega_{\mathcal{P}}^1$, причем по лемме 2

$$\text{Fr } \Omega_{\mathcal{P}}^1 \subset \xi(\mathcal{P}, f^{-1}(l_0 \cup l_1)).$$

Тогда

$$\xi(\mathcal{P}, f^{-1}(F)) \cap \text{Fr } \Omega_{\mathcal{P}}^1 = \emptyset, \quad \mathcal{P} \in e_{n-2}f^{-1}(T). \quad (4)$$

Вместе с тем при $\mathcal{P}' \in e_{n-2}f^{-1}([L', E])$ в силу леммы 3 связное множество

$$\xi(\mathcal{P}', f^{-1}([E, D] \cup [E, F]))$$

не пересекается с $\xi(\mathcal{P}', f^{-1}(K))$, имеет общие точки с $\Omega_{\mathcal{P}'}^1$ и, следовательно, содержится в $\Omega_{\mathcal{P}'}^1$, однако это противоречит равенству (4).

На граф K_2 доказательство переносится с незначительными изменениями.

Как и в теореме 2, под разбиением Мура компакта Q понимаем разбиение Q на компоненты множества $\overline{N}$ и отдельные точки $Q \setminus \overline{N}$.

СЛЕДСТВИЕ. Циклический континуум, являющийся пространством разбиения Мура компакта Q , допускающего $T(n, \mathbb{C})$ -систему (1) порядка $n > 2$, гомеоморфен подмножеству сферы S^2 .

Утверждение следует из теорем 2, 4 и теоремы Клейтора [8] (см. также [6, замечание 2, с. 310]) о вложении в S^2 циклического локально связного континуума, не содержащего топологически графов K_1 и K_2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // УМН. 1948. Т. 3. № 1. С. 216–221.
- [2] Schoenberg I. J., Yang C. T. On the unicity of solutions of problems of best approximation // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. V. 54. P. 1–12.
- [3] Overdeck J. M. On the nonexistence of complex Haar systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 5. P. 737–740.
- [4] Кошечев В. А. О чебышевских системах локально аналитических функций // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 35–46.
- [5] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [6] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
- [7] Александров П. С. Топологические теоремы двойственности. Ч. 1. Замкнутые множества // Тр. МИАН. 1955. Т. 48. С. 5–108.
- [8] Claytor S. Topological immersions of peanian continua in a spherical surface // Ann. of Math. 1934. V. 35. № 4. P. 809–835.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступило
05.06.95