Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Метод аппроксимационного штрафа в задаче оптимального управления негладкими сингулярными системами, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 893–904

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:53:38

УДК 517.977

МЕТОД АППРОКСИМАЦИОННОГО ШТРАФА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕГЛАДКИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ СИСТЕМАМИ

С. Я. Серовайский

Рассматриваемая абстрактная задача оптимального управления при наличии дополнительных ограничений и негладких членов в отсутствии требования разрешимости как уравнения состояния на множестве допустимых управлений, так и самой экстремальной задачи. На основе предлагаемого метода аппроксимационного штрафа находится приближенное решение задачи, понимаемое в слабом смысле. В качестве примера рассматривается задача оптимального управления для сингулярного нелинейного уравнения эллиптического типа.

Библиография: 22 названия.

1. Постановка задачи. Задается система, описываемая нелинейным операторным уравнением

$$Ay = Bv + f, \quad (1)$$

где v – управление, y – функция состояния системы, $A: Y \rightarrow Z$ – непрерывный оператор, $B: V \rightarrow Z$ – линейный непрерывный оператор, $f \in Z$; V, Y, Z – рефлексивные банаховы пространства. Управление выбирается из слабо замкнутого подмножества V_∂ из V . Определим множество

$$W = \{(v, y) \in U_\partial \mid Ay = Bv + f\}$$

допустимых пар системы (1), где $U_\partial = V_\partial \times Y$ – подмножество пространства $U = V \times Y$. Задается непрерывный функционал L на Y в предположении непустоты множества

$$W_\partial = \{(v, y) \in W \mid L(y) = 0\}.$$

Рассматривается функционал $I(v, y) = J(y) + K(v)$, где J – непрерывный ограниченный снизу коэрцитивный функционал на Y , K – слабо полунепрерывный снизу дифференцируемый по Гато ограниченный снизу коэрцитивный функционал на V .

ЗАДАЧА P . Найти точку, минимизирующую функционал I на множестве W_∂ .

Отметим, что от уравнения (1) не требуется ни существования, ни единственности решения на любом управлении класса V_∂ , т.е. рассматриваемая система является сингулярной. Кроме того, не предполагается разрешимость экстремальной задачи, т.е. дальнейшие исследования проводятся при возможном отсутствии оптимального управления.

На рассматриваемые операторы и функционалы не накладываются условия дифференцируемости по функции состояния. Определенные затруднения вызывает и наличие дополнительного ограничения типа равенства. Наличие всех этих трудностей осложняет применение известных методов оптимизации. Так, при исследовании экстремальных задач для сингулярных бесконечномерных систем обычно предполагают или доказывают разрешимость экстремальной задачи, причем рассматриваемая система является гладкой, а дополнительные ограничения отсутствуют (см., например, [1], [2]). Известные методы расширения экстремальных задач не адаптированы ни к сингулярным, ни к негладким системам (см., например, [3]–[6]). Решение негладких задач оптимального управления обычно связано с различными обобщениями производных и не имеет отношения к сингулярным системам (см., в частности, [5], [7]). Методы общей теории экстремума, допускающие исследование задач со сложными ограничениями, используют предположение об их разрешимости и не указывают способа преодоления трудностей, обусловленных сингулярностью уравнений (см., например, [8]–[11]).

Для проведения исследования при наличии комплекса указанных сложностей необходимо использовать метод, сочетающий приемы, успешно зарекомендовавшие себя для преодоления отдельных трудностей. Так, вывод необходимых условий экстремума для сингулярных управляемых систем на основе метода вариаций (см., например, [12]) наталкивается на практически непреодолимые препятствия, поскольку в процессе варьирования управления нет гарантии получения допустимой пары системы. Здесь предпочтительнее использование метода штрафа, выводящего управление и функцию состояния на один уровень и превращающего уравнение состояния в общее ограничение типа равенства [1]. Однако метод адаптированного штрафа, на котором основан принцип исследования сингулярных управляемых систем (см., например, [1, с. 51]), оперирует с оптимальным управлением, что заведомо не приемлемо для неразрешимых экстремальных задач. Поскольку сингулярность системы предопределяет применение некоторого варианта метода штрафа, его же естественно использовать и для учета дополнительного ограничения. Применение для этой цели различных обобщений понятия вариации (см., например, [10], [13]) бесполезно при отсутствии разрешимости уравнения состояния на любом допустимом управлении. В данной работе предлагается сочетание общей идеи метода штрафа с предложенным в [14] способом аппроксимации негладких членов уравнения некоторыми гладкими выражениями (вместо использования методов негладкой оптимизации, основанных на обобщении производных [5], [7]). Это и соответствует методу аппроксимационного штрафа, в котором уравнение состояния и дополнительное условие учитываются с помощью соответствующих штрафов, а все негладкие члены подлежат аппроксимации.

Основные трудности предлагаемого подхода естественно связаны с обоснованием сходимости метода штрафа. Прежде всего, возникает вопрос, о какой сходимости может идти речь, если в задаче не предполагается существование оптимального управления? Мы можем лишь попытаться приблизиться к нижней грани функционала на совокупности заданных ограничений, что соответствует общей концепции расширения экстремальных задач (см. [3]–[5]). Особую важность здесь приобретает определение понятия приближенного решения. Идея ослабления требований, предъявляемых к решению экстремальной задачи, высказывалась еще Д. Гильбертом. Различные формы приближенного решения задачи явно или неявно присутствуют в методах расширения и приближенных методах решения экстремальных задач (см., в частности, [3]–[6], [15], [16]).

Вводимое ниже приближенное решение задачи является обобщением аналогичного понятия, определенного в [17] для исследования одной конкретной задачи. Последовательность $\{w_n\} = \{v_n, y_n\}$ пространства U назовем *слабой минимизирующей последовательностью* для задачи P , если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для любой окрестности O нуля в слабой топологии этого пространства существуют допустимая пара w' и номер $n(\varepsilon, \delta, O)$ такие, что справедливы соотношения

$$v_n \in V_\partial, \quad w_n \in w' + O, \quad |L(y_n)| \leq \delta, \quad I(w_n) \leq \inf I(W_\partial) + \varepsilon \quad \text{для всех } n > n(\varepsilon, \delta, O).$$

Если известна слабая минимизирующая последовательность, то, выбирая номер n достаточно большим, можно обеспечить сколь угодно высокую степень близости величины w_n к множеству допустимых пар системы (1) (эта точка попадает в сколь угодно малую окрестность некоторой допустимой пары), выполнение дополнительного условия для y_n с произвольной степенью точности, а также высокую близость значения $I(w_n)$ к нижней грани этого функционала на заданном множестве. Соответствующую пару w_n назовем *слабым приближенным решением* задачи P . Дадим способ ее построения с помощью некоторого метода аппроксимации.

2. Метод аппроксимационного штрафа. Определим функционал

$$I_n(v, y) = J_n(y) + K(v) + \frac{1}{\varepsilon_n} R(A_n y - Bv - f) + \frac{1}{\varepsilon_n} G(L_n(y)) + \varepsilon_n S(y),$$

где для любого номера n $\varepsilon_n > 0$, J_n – непрерывный ограниченный снизу коэрцитивный функционал на Y , L_n – непрерывный функционал на Y , S – слабо полунепрерывный снизу ограниченный снизу коэрцитивный функционал на пространстве Z , R – неотрицательный слабо полунепрерывный снизу коэрцитивный функционал на рефлексивном банаховом пространстве T , вложенном компактно в Y , обращающийся в нуль исключительно на нулевом элементе пространства, $A_n: Y \rightarrow Z$ – непрерывный оператор, G – неотрицательная полунепрерывная снизу коэрцитивная функция, обращающаяся в нуль исключительно в нуле. Последнее слагаемое в определенном функционале напоминает стабилизатор в методе Тихонова. Однако обычно регуляризация функционала осуществляется с целью преодоления трудностей, обусловленной некорректностью задачи в смысле Тихонова [15]. В данном случае этот прием позволяет получить дополнительную априорную оценку для состояния системы, используемую в дальнейшем для обоснования предельных переходов. Предполагается, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $J_n(y) \rightarrow J(y)$, $A_n y \rightarrow Ay$, $L_n(y) \rightarrow L(y)$ равномерно по $y \in Y$. Ставится следующая регуляризованная задача.

ЗАДАЧА P_n . Минимизировать функционал I_n на множестве U_∂ .

ТЕОРЕМА 1. *Задача P_n разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности снизу функционала I_n на множестве U_∂ существует его нижняя грань на этом множестве. Пусть последовательность $\{v_k, y_k\}$ допустимых пар является минимизирующей для задачи P_n , т.е. справедливы включения $(v_k, y_k) \in U_\partial$ и сходимость $I_n(v_k, y_k) \rightarrow \inf I_n(U_\partial)$. Тогда в силу коэрцитивности рассматриваемых функционалов последовательность $\{v_k, y_k, r_k, g_k\}$ ограничена в пространстве $V \times T \times Z \times \mathbb{R}$, где

$$r_k = A_n y_k - Bv_k - f, \quad g_k = L_n(y_k). \quad (2)$$

После выделения подпоследовательностей имеем слабую сходимость $v_k \rightarrow v$ в V , $y_k \rightarrow y$ в T , $r_k \rightarrow r$ в Z , $g_k \rightarrow g$. В силу слабой замкнутости множества V_∂ заключаем, что $v \in V_\partial$, а значит, $(v, y) \in U_\partial$. Учитывая компактность вложения пространства T в Y , установим, что $y_k \rightarrow y$ сильно в Y , откуда следует, что для любого номера n имеет место сходимость $A_n y_k \rightarrow A_n y$ в Z , $L_n(y_k) \rightarrow L_n(y)$, $J_n(y_k) \rightarrow J_n(y)$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенствах (2), установим, что $r = A_n y - Bv - f$, $g = L_n(y)$. Учитывая свойства рассматриваемых функционалов, имеем соотношения

$$\begin{aligned} K(v) &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} K(v_k), & R(r) &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} R(r_k), \\ G(L_n(y)) &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} G(L_n(y_k)), & S(y) &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} S(y_k). \end{aligned}$$

В результате установим справедливость неравенства

$$I_n(v, y) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} I_n(v_k, y_k).$$

Отсюда следует, что пара (v, y) действительно является решением задачи P_n . Теорема доказана.

Установим сходимость метода регуляризации. Предположим, что скорость сходимости последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ниже, чем у $\{A_n\}$ и $\{L_n\}$ в том смысле, что выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \sup_{y \in Y} R[(A_n y - Ay)] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \sup_{y \in Y} G[(L_n(y) - L(y))] = 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. *Последовательность $\{w_n\} = \{v_n, y_n\}$ решений задачи P_n является слабой минимизирующей последовательностью для задачи P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности снизу функционала I на множестве W_∂ существует его нижняя грань на этом множестве. Тогда для произвольного числа $\delta > 0$ найдется такая точка $w = (v, y)$ из множества W_∂ , что выполняется неравенство $I(w) \leq \inf I(W_\partial) + \delta$. В результате установим соотношение

$$\begin{aligned} I_n(w_n) &= \min I_n(U_\partial) \leq I_n(w) \\ &= J_n(y) + K(v) + \varepsilon_n S(y) + \frac{1}{\varepsilon_n} R(A_n y - Ay) + \frac{1}{\varepsilon_n} G(L_n(y) - L(y)) \\ &\leq J(y) + K(v) + \varepsilon_n S(y) + |J_n(y) - J(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_n} \sup_{y \in Y} R(A_n y - Ay) + \frac{1}{\varepsilon_n} G \sup_{y \in Y} (L_n(y) - L(y)). \end{aligned}$$

Учитывая условия (3), после перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ приходим к неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(w_n) \leq I(w) \leq \inf I(W_\partial) + \delta,$$

откуда в силу произвольности δ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(w_n) \leq \inf I(W_\partial). \quad (4)$$

Таким образом, числовая последовательность $\{I_n(w_n)\}$ ограничена. Тогда последовательность пар $\{w_n\}$ ограничена в пространстве $V \times T$ и справедливы равенства

$$A_n y_n = B v_n + f + r_n, \quad L_n(y_n) = g_n, \quad (5)$$

где $R(r_n) \leq c\varepsilon_n$, $G(g_n) \leq c\varepsilon_n$, а через c , здесь и далее, обозначены различные положительные константы. В силу коэрцитивности функционалов отсюда следует ограниченность последовательностей $\{r_n\}$ и $\{g_n\}$ в пространствах Z и $\mathbb{R}$ соответственно. Выделяя подпоследовательности, при $n \rightarrow \infty$ получаем сходимость $v_n \rightarrow v'$ слабо в V , $y_n \rightarrow y'$ слабо в T , $r_n \rightarrow r$ в Z , $g_n \rightarrow g$, $R(r_n) \rightarrow 0$, $G(g_n) \rightarrow 0$. Тогда получаем $Bv_n \rightarrow Bv'$ слабо в Z и $y_n \rightarrow y'$ сильно в Y , откуда следует, что $Ay_n \rightarrow Ay'$ в Z и $L(y_n) \rightarrow L(y')$. Учитывая полунепрерывность снизу R и G , заключаем, что

$$R(r) \leq \liminf R(r_n), \quad G(g) \leq \liminf G(g_n),$$

а значит, $R(r) \leq 0$, $G(g) \leq 0$. Поскольку R и G не отрицательны, установим равенства $R(r) = 0$, $G(g) = 0$. Однако их нулевые значения возможны исключительно для нулевых значений аргументов, т.е. $r = 0$, $g = 0$. Справедливы неравенства

$$\|A_n y_n - Ay'\|_Z \leq \|A_n y_n - Ay_n\|_Z + \|Ay_n - Ay'\|_Z \leq \sup_{y \in Y} \|A_n y - Ay\|_Z + \|Ay_n - Ay'\|_Z.$$

Отсюда следует, что $A_n y_n \rightarrow Ay'$ сильно в Z . Аналогичным образом устанавливается сходимость $L_n(y_n) \rightarrow L(y')$. Переходя к пределу в равенствах (5), установим, что $Ay' = Bv' + f$, $L(y') = 0$, а значит, справедливо включение $(v', y') \in W_\partial$.

Из определения функционала I_n следует соотношение

$$I(w_n) = J(y_n) + K(v_n) \leq J(y_n) - J_n(y_n) + I_n(w_n).$$

В результате получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(w_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} |J_n(y) - J(y)| + \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(w_n).$$

Учитывая сходимость функционалов J_n и соотношение (4), приходим к неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(w_n) \leq \inf I(W_\partial).$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого положительного числа ε номер n можно выбрать столь большим, чтобы значение функционала $I(w_n)$ превосходило его нижнюю грань на множестве W_∂ не более чем на ε . Теорема доказана.

На основе полученных результатов получаем алгоритм нахождения приближенного (в указанном смысле) решения исходной оптимизационной задачи. Для этого достаточно решить в соответствии с классическими методами минимизации функционалов (разрешимую) регуляризованную задачу. Согласно теореме 2 при достаточно больших значениях n величина w_n оказывается слабым приближенным решением задачи P_n . Предположим, что все рассматриваемые операторы и функционалы являются дифференцируемыми по Фреше. Тогда необходимые условия экстремума для задачи P_n дает следующее утверждение, в котором через $\langle a, b \rangle$ обозначено значение линейного непрерывного функционала a в точке b .

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы пара (v_n, y_n) была решением задачи P_n , необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$J'_n(y_n) + A'_n(y_n)^* p_n + L'_n(y_n)^* q_n + \varepsilon_n S'_n(y_n) = 0, \quad (6)$$

$$\langle K'_n(v_n) - B^* p_n, z - v_n \rangle \geq 0 \quad \forall z \in V_\partial, \quad (7)$$

где p_n и q_n удовлетворяют равенствам

$$R'(A_n y_n - B v_n - f) = \varepsilon_n p_n, \quad (8)$$

$$G'(L_n y_n) = \varepsilon_n q_n. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции в банаховых пространствах, находим частные производные $I_{nv}(w_n)$ и $I_{ny}(w_n)$ функционала I_n в точке $w_n = (v_n, y_n)$ из соотношений

$$\langle I_{nv}(w_n), h \rangle = \langle K'_n(v_n), h \rangle + (\varepsilon_n)^{-1} \langle R'(A_n y_n - B v_n - f), B h \rangle \quad \forall h \in V,$$

$$\begin{aligned} \langle I_{ny}(w_n), h \rangle &= \langle J'_n(y_n), h \rangle + (\varepsilon_n)^{-1} \langle R'(A_n y_n - B v_n - f), A'_n(y_n) h \rangle \\ &\quad + (\varepsilon_n)^{-1} \langle G'(L_n y_n), L'_n(y_n) h \rangle + \varepsilon_n \langle S'_n(y_n), h \rangle \quad \forall h \in Y. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$p_n = (\varepsilon_n)^{-1} R'(A_n y_n - B v_n - f), \quad q_n = (\varepsilon_n)^{-1} G'(L_n y_n),$$

установим справедливость соотношений (8) и (9). При этом производные от функционала I_n будут определены по формулам

$$I_{nv}(w_n) = K'_n(v_n) - B^* p_n, \quad I_{ny}(w_n) = J'_n(y_n) + A'_n(y_n)^* p_n + L'_n(y_n)^* q_n + \varepsilon_n S'_n(y_n).$$

Тогда согласно теореме 1.3 (см. [12, с. 18]) необходимым условием минимума функционала I_n на множестве U_∂ в точке w_n будут равенство (6) и вариационное неравенство (7). Теорема доказана.

Отметим, что использованный в [1] метод штрафа является исключительно средством построения необходимых условий оптимальности для исходной задачи. В данном же случае он применяется непосредственно для нахождения приближенного решения данной задачи, а условия оптимальности для нее вообще не получаются. При отсутствии разрешимости задачи эти условия не имеют смысла в принципе.

Проиллюстрируем эффективность метода аппроксимационного штрафа для задачи оптимального управления системой, описываемой нелинейным уравнением эллиптического типа в отсутствии результатов об однозначной разрешимости соответствующего уравнения состояния и экстремальной задачи при наличии негладких членов в уравнении, изопериметрическом условии и критерии оптимальности.

3. Пример. Пусть задана открытая ограниченная область Ω пространства $\mathbb{R}^n$. В соответствии с теоремой Соболева имеют место непрерывные вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $L_{q'}(\Omega) \subset H_0^{-1}(\Omega)$, где q таково, что $1/2 - 1/n = 1/q$ при $n > 2$ и q произвольно при $n = 2$; $1/q + 1/q' = 1$. Рассматривается уравнение

$$\Delta y + a(y) = v + f \quad (10)$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле), где v – управление, f – известная функция из пространства $H_0^{-1}(\Omega)$, a – заданная функция одной переменной. Управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества V_∂ пространства $V = L_q(\Omega)$. Предполагается, что функция a непрерывна и удовлетворяет неравенству $|a(y)| \leq c|y|^{q-1}$ для всех y . Тогда, пользуясь теоремой Красносельского (см. [18, с. 312]), установим, что оператор Немыцкого $a: L_q(\Omega) \rightarrow L_{q'}(\Omega)$ является непрерывным. Если бы на функцию a были наложены стандартные ограничения монотонности и коэрцитивности, то с помощью теории монотонных операторов (см., например, [19, с. 184]), можно было бы показать, что для любого управления задача Дирихле для уравнения (10) имеет единственное решение в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Однако в данном случае мы не имеем этого результата. Более того, по крайней мере, для некоторых значений функции a однозначная разрешимость для уравнения (1) не имеет места (см., например, [1, с. 262]), что, впрочем, не является препятствием для постановки и исследования оптимизационных задач. Зададим пространства $Y = H_0^1(\Omega)$, $Z = H^{-1}(\Omega)$ с соответствующим пространством $U = V \times Y$ и множеством $U_\partial = V_\partial \times Y$. Тогда, определив оператор $A: Y \rightarrow Z$ с помощью равенства $Ay = \Delta y + a(y)$ и выбирая в качестве линейного оператора $B: V \rightarrow Z$ вложение пространства $V = L_2(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, представляем уравнение (10) в виде (1). Отметим, что введенные операторы непрерывны.

Задается функционал

$$L(y) = \int_{\Omega} l[x; y(x)] dx,$$

где l есть функция Каратеодори. Как и в общем случае, предполагается, что множество $W_\partial = \{(v, y) \in W \mid L(y) = 0\}$ (с конкретным множеством W допустимых пар системы) не пусто. Рассматривается функционал

$$I(v, y) = \int_{\Omega} b[x; y(x), \nabla y(x)] dx + \frac{\gamma}{2} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где b есть функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющая неравенству $b(x; y, z) \geq c|z|^2$ п.в. на Ω для всех $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$. Для его представления в стандартном виде достаточно определить функционалы J и K , выбирая в качестве $J(y)$ и $K(v)$ соответственно, первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства. Ставится следующая оптимизационная задача.

ЗАДАЧА Q. Найти такую допустимую пару (v, y) , которая минимизирует функционал I на множестве W_∂ .

При дополнительных ограничениях на функции l и b можно установить разрешимость задачи Q.

ТЕОРЕМА 4. При выполнении неравенства

$$|l(x, y)| \leq l_0(x) + cy^2, \quad l_0 \in L_1(\Omega),$$

и выпуклости функции $b(x; y, \cdot)$ почти для всех $x \in \Omega$ и $y \in \mathbb{R}$ задача Q разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{w_k\} = \{v_k, y_k\}$ допустимых пар является минимизирующей, т.е. справедливы включение $w_k \in W_\partial$, равенство

$$\Delta y_k + a(y_k) = v_k + f \quad (11)$$

и сходимость $I(w_k) \rightarrow \inf I(W)$. Из определения функционала I следует ограниченность последовательности $\{w_k\}$ в пространстве U . Тогда после выделения подпоследовательностей имеем сходимость $w_k \rightarrow w = (v, y)$ слабо в U , причем $w \in U_\partial$. В силу ограниченности последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $L_q(\Omega)$ последовательность $\{a(y_k)\}$ ограничена в пространстве $L_{q'}(\Omega)$, откуда следует, что $a(y_k) \rightarrow a$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. Поскольку функции $f_k = v_k + f - a(y_k)$ равномерно ограничены в пространстве $L_{q'}(\Omega)$ решение y_k однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta y_k = f_k$ ограничено в пространстве $W_{q'}^2(\Omega)$. Применяя теорему Реллиха–Кондрашова, после выделения подпоследовательности получаем сходимость $y_k \rightarrow y$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п.в. на Ω , а значит, $a(y_k) \rightarrow a(y)$ п.в. на Ω . Пользуясь леммой 1.3 (см. [19, с. 25]), установим, что $a = a(y)$. Учитывая непрерывность функционала L , в результате перехода к пределу в равенстве $L(y_k) = 0$, получаем, что $L(y) = 0$. Переходя к пределу в равенстве (11), заключаем, что $w \in W_\partial$. Из теоремы о полунепрерывности снизу интегрального функционала (см., [5, с. 242, теорема 2.1]) следует неравенство

$$I(w) \leq \liminf I(w_k).$$

Тогда пара w является решением задачи Q . Теорема доказана.

Отметим, что в описанной общей схеме исследования разрешимость оптимизационной задачи не требуется. Таким образом, для получения дальнейших результатов справедливость условий теоремы 4 не обязательна. Вопросы оптимального управления системами, описываемыми нелинейными уравнениями эллиптического типа с однозначно разрешимыми уравнениями состояния, рассматриваются, например, в [20]–[22]. Распространение этих результатов на задачу Q не представляется возможным, поскольку в процессе варьирования управления не гарантировано получение допустимой пары. В работах [1], [2], посвященных решению сингулярных бесконечномерных разрешимых оптимизационных задач, рассматриваются исключительно гладкие операторы. Описанные там подходы можно было бы использовать в сочетании с известными методами негладкой оптимизации (см., например, [5], [7]), если бы негладкие члены входили в критерий оптимальности, а не в уравнение состояния. Задачи оптимального управления для нелинейных сингулярных уравнений с дополнительными ограничениями в отсутствии гладкости и разрешимости экстремальной задачи, по-видимому, еще не рассматривались.

В соответствии с описанной ранее методикой осуществляется гладкая аппроксимация функций a , l и b . Рассмотрим семейства функций $\{a_n\}$, $\{l_n\}$, $\{b_n\}$ соответственно одной,

двух и $n + 2$ переменных таких, что для любого номера n функции $a_n, l_n(x; \cdot), b_n(x; \cdot)$ непрерывно дифференцируемы и имеют место неравенства

$$|a_n(y)| \leq c|y|^{q-1}; \quad l_n(x; y) \leq l_0(x); \\ c|z|^2 \leq b_n(x; y, z) \leq b_0(x), \quad x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где функция b_0 интегрируема. Пусть, кроме того, имеет место сходимость $a_n(y) \rightarrow a(y)$, $l_n(x; y) \rightarrow l(x; y)$, $b_n(x; y, z) \rightarrow b(x; y, z)$ почти для всех $x \in \Omega$ равномерно по $\forall y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$. Зададим операторы $A_n: Y \rightarrow Z$ и функционалы L_n, J_n на Y с помощью равенств

$$A_n y = \Delta y + a_n(y), \quad L_n(y) = \int_{\Omega} l_n[x; y(x)] dx, \quad J_n(y) = \int_{\Omega} b_n[x; y(x), \nabla y(x)] dx.$$

Определим гильбертово пространство

$$T = H_0^1(\Omega) \cap \{y \mid \Delta y \in L_2(\Omega)\}$$

с нормой $\|y\|_T = \|\Delta y\|_{L_2(\Omega)}$. Введем функционалы

$$R(z) = \frac{1}{q'} \|z\|_Z^{q'} \quad \forall z \in Z, \quad S(y) = \frac{1}{2} \|y\|_T^2 \quad \forall y \in T.$$

В результате определенный ранее функционал I_n принимает вид

$$I_n(v, y) = I(v, y) + \frac{1}{q'\varepsilon_n} \|\Delta y + g_n(y) - v - f\|_Z^{q'} + \frac{1}{2\varepsilon_n} \left| \int_{\Omega} l_n[x; y(x)] dx \right|^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|y\|_T^2,$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассматривается следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА Q_n . Найти такую пару, которая минимизирует функционал I_n на множестве U_{∂} .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого номера n задача Q_n разрешима.

Действительно, при сделанных предположениях оператор A_n оказывается непрерывным. Если имеет место сходимость $y_k \rightarrow y$ в Y , то после выделения подпоследовательности установим, что $y_k \rightarrow y$ и $\nabla y_k \rightarrow \nabla y$ п.в. на Ω . Отсюда следует, что $l_n(x; y_k(x)) \rightarrow l_n(x; y(x))$ и $b_n(x; y_k(x), \nabla y_k(x)) \rightarrow b_n(x; y(x), \nabla y(x))$ почти для всех x из Ω . Учитывая имеющиеся оценки сверху функций l_n и b_n ограниченными функциями, с помощью теоремы Лебега о мажорированной сходимости получаем, что $L_n(y_k) \rightarrow L_n(y)$, $J_n(y_k) \rightarrow J_n(y)$. Следовательно, функционалы L_n и J_n непрерывны. Ограниченность снизу и коэрцитивность функционала J_n вытекает из соответствующих свойств функции b_n . Желаемые свойства K , S , R и G выполняются, поскольку все они являются степенями от некоторых норм. Компактность вложения пространства T в Y следует из теоремы Реллиха–Кондрашова. Равномерная сходимость последовательностей $\{A_n\}, \{J_n\}, \{L_n\}$ следует из сходимости соответствующих функциональных последовательностей. Тем самым, выполняются все условия теоремы 1, откуда следует разрешимость задачи Q_n .

Для доказательства сходимости метода аппроксимационного штрафа достаточно обеспечить справедливость условий (3). Применительно к задаче Q_n они имеют следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \sup_{y \in \mathbb{R}} |a_n(y) - a(y)|^{q'} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \int_{\Omega} \sup_{y \in \mathbb{R}} |l_n(x; y) - l(x; y)| dx = 0.$$

Тогда из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Последовательность решений задачи Q_n является слабой минимизирующей последовательностью для задачи Q .

Для получения необходимых условий оптимальности достаточно обеспечить дифференцируемость соответствующих операторов и функционалов. Предположим, что для любых $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$ и п.в. на Ω справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |a_{ny}(y)| &\leq c|y|^{q-2}, & |l_{ny}(x; y)| &\leq \varphi_1(x) + c|y|^{q-1}, \\ |F_n(x; y, z)| &\leq \varphi_2(x) + c(|y|^q + |z|^2), & |F_{ny}(x; y, z)| &\leq \varphi_3(x) + c(|y|^{q/q'} + |z|^{2/q'}), \\ |F_{nz}(x; y, z)| &\leq \varphi_4(x) + c(|y|^{q/2} + |z|), \end{aligned}$$

где $\varphi_1 \in L_{q/(q-1)}(\Omega)$, $\varphi_2 \in L_1(\Omega)$, $\varphi_3 \in L_{q'}(\Omega)$, $\varphi_4 \in L_2(\Omega)$; а через $a_{ny}(y)$, $l_{ny}(x; y)$, $F_{ny}(x; y, z)$, $F_{nz}(x; y, z)$ обозначены соответствующие производные от функций a_n , $l_n(x; \cdot)$, $F(x; \cdot, z)$, $F(x; x, \cdot)$. Тогда операторы Немыцкого $a_n(\cdot): L_q(\Omega) \rightarrow L_{q'}(\Omega)$ и $l_n(\cdot): L_q(\Omega) \rightarrow L_1(\Omega)$ оказываются дифференцируемыми по Фреше, причем справедливы равенства (см. [18, с. 312])

$$a'_n(y)h(x) = a_{ny}(y(x))h(x), \quad l'_n(y)h(x) = l_{ny}(x; y(x))h(x) \quad \forall y \in L_q(\Omega).$$

Отсюда следует дифференцируемость операторов A_n и функционалов L_n в пространстве Y , причем справедливы равенства

$$A'_n(y)h = \Delta h + a_{ny}(y)h, \quad L'_n(y)h = \int_{\Omega} l_{ny}(x; y(x))h(x) dx \quad \forall h \in Y.$$

Аналогично устанавливается дифференцируемость функционалов J_n , причем

$$J'_n(y)h = \int_{\Omega} [b_{ny}(x; y(x), \nabla y(x))h(x) + b_{n\nabla y}(x; y(x), \nabla y(x))\nabla h(x)] dx \quad \forall h \in Y.$$

Теперь для получения необходимых условий экстремума можно воспользоваться теоремой 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Решение (v_n, y_n) задачи Q_n характеризуется формулой

$$v_n = \Pi\left(\frac{p_n}{\gamma}\right) \quad (12)$$

и уравнениями

$$\Delta y_n + a_n(y_n) - v_n - f = (\varepsilon_n)^{q-1}|p_n|^{q-2}p_n, \quad (13)$$

$$\Delta p_n + a_{ny}(y_n)p_n = b_{ny}(x; y_n, \nabla y_n) - \operatorname{div} b_{n\nabla y}(x; y_n, \nabla y_n) + \varepsilon_n \Delta^2 y_n + q_n l_{ny}(x; y_n) \quad (14)$$

с однородными граничными условиями, где Π есть проектор на множество V_{∂} , причем имеет место равенство

$$\int_{\Omega} l_n(x; y_n(x)) dx = \varepsilon_n q_n. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал I_n в точке $w_n = (v_n, y_n)$ обладает частными производными $I_{nv}(w_n)$ и $I_{ny}(w_n)$, определяемыми равенствами

$$\begin{aligned} I_{nv}(w_n)h &= \int_{\Omega} (\gamma v_n - p_n)h \, dx \quad \forall h \in V, \\ I_{ny}(w_n)h &= \int_{\Omega} \{b_{ny}(x; y_n, \nabla y_n)h + b_{n\nabla y}(x; y_n, \nabla y_n)\nabla h + \varepsilon_n \Delta y_n \Delta h \\ &\quad - [\Delta h + a_{ny}(y_n)h]p_n + q_n k_{ny}(x; y_n)h\} \, dx \quad \forall h \in Y, \end{aligned}$$

где

$$p_n = \frac{1}{\varepsilon_n} |\Delta y_n + a_n(y_n) - v_n - f|^{q'-2} [\Delta y_n + a_n(y_n) - v_n - f], \quad q_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{\Omega} l_n(x; y_n(x)) \, dx.$$

Последние два равенства дают условия (13) и (15), соответствующие соотношениям (8) и (9). Условие (6) равенства нулю производной $I_{ny}(w_n)$ в силу формулы Грина дает уравнение (14). Вариационное неравенство (7) в данном случае имеет вид

$$\int_{\Omega} (\gamma v_n - p_n)(h - v_n) \, dx \geq 0 \quad \forall h \in V_{\partial}.$$

С помощью свойства проектора на выпуклое подмножество гильбертова пространства оно приводится к равенству (12). Теорема доказана.

Согласно последнему утверждению решение аппроксимационной задачи сводится к рассмотрению однородной задачи Дирихле для системы нелинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} \Delta y_n + a_n(y_n) = \Pi\left(\frac{p_n}{\gamma}\right) + f + (\varepsilon_n)^{q-1} |p_n|^{q-2} p_n, \\ \Delta p_n + a_{ny}(y_n)p_n = b_{ny}(x; y_n, \nabla y_n) - \operatorname{div} b_{n\nabla y}(x; y_n, \nabla y_n) \\ \quad + \varepsilon_n \Delta^2 y_n + q_n l_{ny}(x; y_n) \end{cases}$$

и соотношения (15), связывающих неизвестные функции y_n, p_n с параметром q_n . Эта задача, в принципе, может быть решена итерационно. Затем определяется функция v_n по формуле (12). В соответствии со следствием 2 при достаточно больших номерах n пара (v_n, y_n) с желаемой степенью точности будет удовлетворять уравнению (10), а значение функционала I на ней оказывается сколь угодно близким к его минимуму на множестве W_{∂} . Таким образом, мы получаем приближенное решение задачи Q в определенном ранее смысле. Отметим, что соотношения (13) и (15) представляют собой приближенную форму уравнения состояния и изопериметрического условия.

Аналогичные результаты можно получить и для других уравнений с негладкими нелинейностями в условиях различных форм сингулярности уравнений и экстремальных задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
- [2] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
- [3] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
- [4] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Мир, 1977.
- [5] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1978.
- [6] Сумин В. И. О расширении оптимизационных задач, связанных с функциональными уравнениями в пространствах существенно ограниченных функций // Матем. модел. и оптим. управл. 1998. № 1. С. 126–133.
- [7] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [8] Дубовицкий А. Д., Милютин А. А. Необходимые условия слабого экстремума. М.: Наука, 1971.
- [9] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [10] Якубович В. А. К абстрактной теории оптимального управления // Сиб. матем. ж. 1977. Т. 18. № 3. С. 685–707.
- [11] Neustadt L. W. An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems // SIAM J. Control. 1966. № 4. P. 505–527; 1967. № 1. P. 90–137.
- [12] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- [13] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
- [14] Серовайский С. Я. Оптимальное управление для уравнений эллиптического типа с негладкой нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1420–1424.
- [15] Ekeland I. The ε -variational principle revisited // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1446. P. 1–15.
- [16] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
- [17] Серовайский С. Я. Приближенное решение оптимизационных задач для сингулярных бесконечномерных систем // Сиб. матем. ж. 2003. Т. 44. № 3. С. 660–673.
- [18] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М., 1972.
- [19] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [20] Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1988.
- [21] Райтум У. Е. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига: Зинатне, 1989.
- [22] Серовайский С. Я. Градиентные методы в задаче оптимального управления нелинейной эллиптической системой // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 5. С. 1154–1166.