Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, А. В. Синицын, Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений стационарной системы Власова–Максвелла, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 268–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:12:40

УДК 517.958+517.93

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ И НЕТРИВИАЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА

Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын

Получены достаточные условия существования точек бифуркации $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ системы Власова–Максвелла (ВМ), отвечающие функциям распределения вида

$$f_i(r, v) = \lambda \hat{f}_i(-\alpha_i v^2 + \varphi_i(r), v d_i + \psi_i(r)).$$

Предполагается, что на границе области $D \subset \mathbb{R}^3$ заданы значения скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля, $\rho|_{\partial D} = 0$, $j|_{\partial D} = 0$, где ρ – плотность заряда, j – плотность тока. Выведено и исследовано уравнение разветвления искомых решений. Построена асимптотика нетривиальных решений системы ВМ в окрестности точки бифуркации.

Библиография: 30 названий.

1. Введение. Рассмотрим многокомпонентную плазму, содержащую электроны и положительно заряженные ионы разных сортов, описываемые многочастичной функцией распределения $f_i = f_i(r, v, t)$, $i = 1, \dots, N$. Плазма находится в области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей. Частицы взаимодействуют между собой посредством самосогласованного силового поля, при этом пренебрегаются столкновения частиц между собой.

В нерелятивистском, электродинамическом случае плазма описывается следующей версией нерелятивистской системы Власова–Максвелла (ВМ)

$$\partial_t f_i + v \cdot \partial_r f_i + \frac{q_i}{m_i} \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right) \cdot \partial_v f_i = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t E - c \cdot \text{curl } B &= -j, & \text{div } E &= \rho, \\ \partial_t B + c \cdot \text{curl } E &= 0, & \text{div } B &= 0, \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad r \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

где

$$\rho(r, t) = 4\pi \sum_{i=1}^N q_i \int_{\mathbb{R}^3} f_i dv, \quad j(r, t) = 4\pi \sum_{i=1}^N q_i \int_{\mathbb{R}^3} f_i v dv$$

соответственно плотность заряда и тока, а $E(r, t)$, $B(r, t)$ есть электрическое и магнитное поле. Система (1.1), (1.2) может дополняться краевыми условиями на электромагнитное поле или краевыми условиями на потенциалы этого поля, например, (2.19).

Заряженные частицы движутся в электромагнитном поле по траекториям, определяемым характеристиками уравнения Власова (1.1)

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \frac{q_i}{m_i} \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right). \quad (1.3)$$

Вопросы, связанные с существованием решений соответствующей задачи Коши в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, асимптотическим поведением решений и их зависимостью от физических параметров и начальных значений, широко освещены в литературе (см., например, [1]–[5]). С другой стороны, авторам известно только несколько строгих результатов по изучению системы (1.1), (1.2) в ограниченных областях с краевыми условиями, полученных совсем недавно [6], [7].

В прикладных задачах часто пренебрегают влиянием магнитного поля и рассматривают предельную систему Власова–Пуассона (ВП), в которой потенциал электрического поля $U(r, t)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = \rho, \quad E = -\partial_r U, \quad t \geq 0, \quad r \in D, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

В общем случае функции распределения могут быть представлены в виде

$$f_i = f_i(H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{il}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

где H_{il} есть первые интегралы (1.1). Реально нелегко выбрать структуру функций распределения вида (1.4), которая связана с самосогласованным электромагнитным полем и позволяет провести редукцию системы ВМ к более простой. В модельных задачах часто ограничиваются интегралами энергии типа

$$H_i = -c_i v^2 \pm U(r, t), \quad r \in D, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

В действительности, мы можем отыскивать функции распределения более общего вида, не ограничиваясь только квадратичными членами по скоростям в (1.4):

$$H_{il} = v_{il} + (v, d_{il}) + (A_{il}v, v) + \sum_{m+k+j=3} a_{mkj}^{il} v_1^m v_2^k v_3^j, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)$, $(A_{il}v, v)$ есть квадратичные формы, а последующие слагаемые более высокого порядка. При этом матрицы A_{il} и коэффициенты a_{mkj}^{il} следует отыскивать из системы ВМ таким образом, чтобы H_{il} в выражении (1.4) были первыми интегралами характеристической системы (1.3). Заметим, что в работах [8], [9] предпринята попытка классификации различных классов стационарных и нестационарных решений систем ВМ и ВП для функций распределения вида (1.4).

В данной работе мы рассмотрим стационарные состояния плазмы, описываемые кинетическими уравнениями ВМ, и их зависимость от параметров. Наибольший интерес здесь связан с краевой задачей для стационарной системы ВМ. Отметим последние важные результаты в этой области [10]–[14].

В данной работе мы ограничимся распределениями специального вида

$$\begin{aligned} f_i(r, v) &= \lambda \widehat{f}_i(-\alpha_i v^2 + \varphi_i(r), v \cdot d_i + \psi_i(r)) \triangleq \lambda \widehat{f}_i(\mathbf{R}, \mathbf{G}), \\ \varphi_i: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \in D \subseteq \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \\ \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+ &\triangleq [0, \infty), \quad d_i \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где функции φ_i, ψ_i , порождающие соответствующее электромагнитное поле (E, B) , подлежат определению. Мы интересуемся зависимостью искомых функций φ_i, ψ_i в распределениях (1.5) от параметра λ . Параметр λ может быть как безразмерным, когда размерные параметры задачи α_i и d_i в (1.5) не зависят от λ , так и связанным с $\alpha_i = \alpha_i(\lambda)$, $d_i = d_i(\lambda)$. Например, функция распределения вида

$$f(r, v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(\frac{-m|v|^2}{2kT} + d \cdot v + \varphi(r) \right)$$

дает зависимость $\alpha = \alpha(\lambda)$, где $\lambda = (m/(2\pi kT))^{3/2}$, $\alpha = -m/(2kT)$, k – постоянная Больцмана, T – температура электронов. В этом случае параметр λ имеет размерность температуры.

Пусть φ_i^0, ψ_i^0 – постоянные такие, что соответствующие плотность заряда ρ и плотность тока j , индуцируемые в среде распределениями f_i при $\varphi_i = \varphi_i^0, \psi_i = \psi_i^0$, равны 0. Тогда

$$\sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} q_k \widehat{f}_k dv = 0, \quad \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} q_k v \widehat{f}_k dv = 0$$

при $\varphi_i = \varphi_i^0, \psi_i = \psi_i^0, k = 1, \dots, N$. Пусть $d_i = \sigma_i d_1, i = 1, \dots, n$, σ_i – константа. Вектор $d_i \in \mathbb{R}^3$ и параметр $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ характеризуют хаотические тепловые движения частиц сорта i . Мы рассматриваем случай, когда d_i и α_i различны, т.е. неизотермическую плазму как наиболее часто встречающуюся в приложениях. Тогда система ВМ при любом λ имеет тривиальное решение

$$f_i^0 = \lambda \widehat{f}_i(-\alpha_i v^2 + \varphi_i^0, v \cdot d_i + \psi_i^0), \quad E^0 = 0, \quad B^0 = \beta d_1, \quad \beta = \text{const}.$$

Наша цель – построить нетривиальные решения стационарной системы ВМ. В работе получены условия существования точек $\lambda^* \in \mathbb{R}^+$ (точек бифуркации), в окрестности которых у системы ВМ появляются нетривиальные решения в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Для этих решений $\rho|_D \neq 0, j|_D \neq 0$, но $\rho|_{\partial D} = 0$ и $j|_{\partial D} = 0$. Предполагается, что на границе области заданы значения скалярного и векторного потенциалов искомого электромагнитного поля. Выведено уравнение разветвления [15], [16]. Показано, что в достаточно общем случае, когда $f_i = f_i(a(-\alpha_i v^2 + \varphi_i) + b(v \cdot d_i + \psi_i))$, a, b – константы, уравнение разветвления потенциально. На этой основе построена асимптотика нетривиальных ветвей решений в окрестности точки бифуркации.

Отметим, что задача о точках бифуркации в теории бесстолкновительной плазмы без учета магнитного поля изучалась в работах [17]–[19]. Задача о точках бифуркации в общей системе ВМ, по-видимому, ранее не рассматривалась.

В п. 2 рассматривается редукция стационарной системы ВМ к квазилинейным эллиптическим уравнениям типа Гемгольца (2.21). Искомые электромагнитное поле и функция распределения определяются через решение этих уравнений. При дополнительном ограничении вида

$$\int_D \int_{\mathbb{R}^3} f_i dv dr = N_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

уравнения ВМ сведены к системе нелинейных эллиптических интегродифференциальных уравнений (2.24).

В п. 3 поставлена краевая задача и задача о точках бифуркации системы (2.21), изучен спектр задачи для линеаризованной системы (3.2).

В п. 4 построено уравнение разветвления.

В п. 5 на основе анализа уравнения разветвления (5.1) получена теорема существования точек бифуркации и построена асимптотика нетривиальных ветвей искомых решений системы ВМ.

2. Разрешающая квазилинейная система эллиптических уравнений типа Гемгольца. Рассмотрим стационарную систему ВМ

$$v \cdot \partial_r f_i + \frac{q_i}{m_i} \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right) \cdot \partial_v f_i = 0, \quad r \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{curl} E = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} f_k(r, v) dv, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{curl} B = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} v f_k(r, v) dv \quad (2.5)$$

в случае распределения вида (1.5). Выведем систему уравнений для определения функций φ_i, ψ_i в распределении (1.5).

Будем предполагать, что выполнено условие

- i) в распределении (1.5) $\hat{f}_i(\mathbf{R}, \mathbf{G})$ – фиксированные дифференцируемые функции; α_i, d_i – свободные параметры, $|d_i| \neq 0$; $\varphi_i = c_{1i} + l_i \varphi(r)$, $\psi_i = c_{2i} + k_i \psi(r)$, c_{1i}, c_{2i} – константы; параметры l_i, k_i связаны соотношениями

$$l_i = \frac{m_1}{\alpha_1 q_1} \frac{\alpha_i q_i}{m_i}, \quad k_i \frac{q_1}{m_1} d_1 = \frac{q_i}{m_i} d_i$$

и интегралы

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_i dv, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_i v dv$$

сходятся при всех φ_i, ψ_i .

Подставляя (1.5) в (2.1) и приравнявая нулю коэффициенты при $\widehat{f}_i/\partial \mathbf{R}$ и $\partial \widehat{f}_i/\partial \mathbf{G}$, получим

$$E(r) = \frac{m_i}{2\alpha_i q_i} \partial_r \varphi_i, \quad (2.6)$$

$$B(r) \times d_i = -\frac{mc}{q_i} \partial_r \psi_i, \quad (2.7)$$

$$(E(r), d_i) = 0.$$

Здесь φ_i, ψ_i – произвольные пока функции, удовлетворяющие условиям

$$(\partial_r \varphi_i, d_i) = 0, \quad (\partial_r \psi_i, d_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

и, далее, $d_1 \triangleq d, \alpha_1 \triangleq \alpha, q_1 \triangleq q, m_1 \triangleq m$.

Соответствующие ограничения на функции φ_i, ψ_i будут введены при постановке краевой задачи в $D \subset \mathbb{R}^3$. Связь функций φ_i, ψ_i с потенциалами электромагнитного поля U, A приводится ниже.

Вектор B имеет вид

$$B(r) = \frac{\omega_i(r)}{d_i^2} d_i - [d_i \times \partial_r \psi_i] \frac{m_i c}{q_i d_i^2}, \quad (2.9)$$

где $\omega_i = (B, d_i)$ есть функция, подлежащая определению. Неизвестные векторы $\partial_r \varphi_i, \partial_r \psi_i$ линейно зависимы в силу (2.6), (2.7). Поэтому мы отыскиваем φ_i, ψ_i в виде

$$\varphi_i = c_{1i} + l_i \varphi, \quad \psi_i = c_{2i} + k_i \psi, \quad c_{1i}, c_{2i}, l_i, k_i \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

В силу (2.6), (2.7) параметры l_i, k_i в условии i) связаны соотношениями

$$l_i = \frac{m}{\alpha q} \frac{\alpha_i q_i}{m_i}, \quad k_i \frac{q}{m} d = \frac{q_i}{m_i} d_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.11)$$

где $l_1 = k_1 = 1$.

Из (2.4) с учетом (2.6) получим систему

$$\Delta \varphi_i = \frac{8\pi \alpha_i q_i}{m_i} \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} f_k(r, v) dv. \quad (2.12)$$

Так как $\operatorname{div}[d_i \times \partial_r \psi_i] = 0$, подставляя (2.9) в (2.3), имеем

$$(\partial_r \omega_i(r), d_i) = 0. \quad (2.13)$$

Далее, из (2.5) с учетом (2.9) получим систему линейных алгебраических уравнений для $\partial_r \omega_i$

$$\partial_r \omega_i \times d_i = \frac{m_i c}{q_i} d_i \Delta \psi_i + \frac{4\pi}{c} d_i^2 \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} v f_k dv. \quad (2.14)$$

Для существования решения системы (2.14) в силу теоремы Фредгольма [15] необходимо и достаточно, чтобы ψ_i удовлетворяли системе

$$\Delta\psi_i = -\frac{4\pi q}{m_i c^2} \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} (v, d_i) f_k dv. \quad (2.15)$$

При этом вектор $C_i(r)d_i + d_i \times J(r)$ есть общее решение (2.14), где

$$J \triangleq \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} v f_k dv,$$

а C_i – произвольная функция. Ввиду условия (2.13) $C_i = 0$ и $\partial_r \omega_i = d_i \times J(r)$. В силу потенциальности вектора $d_i \times J(r)$, учитывая соотношения (2.10), (2.11), получим равенства

$$\frac{d_i}{d_i^2} \omega_i = \frac{d}{d^2} \left(\beta + \int_0^1 (d \times J(tr), r) dt \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad \beta = \text{const}.$$

Система (2.12), (2.15) для определения функций φ, ψ принимает вид

$$\Delta\varphi = \mu \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} f_k dv, \quad \Delta\psi = \nu \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} (v, d) f_k dv, \quad (2.16)$$

где $\mu = 8\pi\alpha q/m$, $\nu = -4\pi q/(mc^2)$. Введем в рассмотрение скалярный $U(r)$ и векторный $A(r)$ потенциалы

$$E = -\partial_r U, \quad B = \text{curl } A,$$

связанные с функциями φ, ψ формулами

$$U = -\frac{m}{2\alpha q} \varphi, \quad A = \frac{mc}{qd^2} \psi d + A_1(r), \quad (A_1, d) = 0, \quad (2.17)$$

и удовлетворяющие граничным условиям (2.19).

Рассмотрим систему (2.16) в области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂D с краевыми условиями

$$\varphi|_{\partial D} = -\frac{2\alpha q}{m} u_{01}, \quad \psi|_{\partial D} = \frac{q}{mc} u_{02} \quad (2.18)$$

на подпространстве (2.8). Тогда в силу (2.17) потенциалы U, A удовлетворяют условиям

$$U|_{\partial D} = u_{01}, \quad (A, d)|_{\partial D} = u_{02}. \quad (2.19)$$

Из изложенного вытекает

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция распределения f_i имеет вид (1.5) и выполнено условие i). Пусть вектор-функция (φ, ψ) есть решение системы уравнений (2.16), (2.18) на подпространстве (2.8). Тогда система ВМ имеет решение

$$E = \frac{m}{2\alpha q} \partial_r \varphi, \quad B = \frac{d}{d^2} \left(\beta + \int_0^1 (d \times J(tr), r) dt \right) - [d \times \partial_r \psi] \frac{mc}{qd^2}, \quad (2.20)$$

где

$$J \triangleq \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^N q_k \int_{\mathbb{R}^3} v f_k dv, \quad \beta = \text{const}.$$

Этому решению отвечают потенциалы (2.17) с условиями (2.19) и $(\partial_r U, d) = 0$, $(\partial_r A, d) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Понятие решение системы ВМ здесь означает, что f_i постоянна вдоль характеристик уравнения Власова (2.1), а (E, B) есть решение системы Максвелла (2.2)–(2.5) с условиями (2.19).

Введем обозначения

$$j_i = \int_{\mathbb{R}^3} v f_i dv, \quad \rho_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i dv, \quad i = 1, \dots, N,$$

и условие

ii) существуют векторы $\beta_i \in \mathbb{R}^3$ такие, что $j_i = \beta_i \rho_i$, $i = 1, \dots, N$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие i) и в $\mathbb{R}^3$ найдется вектор $\beta = \beta(d, \alpha, \varphi, \psi)$ такой, что функция $f(-\alpha(v + \beta)^2 + \varphi, d(v + \beta) + \psi)$ четная по каждой из координат вектора $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)$. Тогда $j = \beta \cdot \rho$, где

$$j \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} v f dv, \quad \rho \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} f dv.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменой переменных $v = \beta + u$ в интеграле $\int_{\mathbb{R}^3} v f dv$ получим

$$j \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} v f dv = \int_{\mathbb{R}^3} (\beta + u) f(-\alpha(\beta + u)^2 + \varphi, d(\beta + u) + \psi) du = \beta \rho + J,$$

где

$$J = (J_1, J_2, J_3)', \quad J_i = \int_{\mathbb{R}^3} u_i f(-\alpha(\beta + u)^2 + \varphi, d(\beta + u) + \psi) du.$$

В силу условия i) интегралы j и ρ сходятся. Поэтому сходятся и интегралы J_i . На основании известного определения несобственного кратного интеграла [20, с. 218]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \int_{-N}^N u_1 f(-\alpha(\beta + u)^2 + \varphi, d(\beta + u) + \psi) du_1 du_2 du_3 = J_1.$$

Так как при всех N

$$\int_{-N}^N u_1 f(-\alpha(\beta + u)^2 + \varphi, d(\beta + u) + \psi) du_1 = 0$$

в силу нечетности подынтегрального выражения по u_1 , то $J_1 = 0$. Аналогичным образом с использованием теоремы Фубини устанавливаются равенства $J_2 = J_3 = 0$.

ПРИМЕР. На основании леммы 1 условие ii) будет выполнено для распределения вида

$$f_i = f_i(a(-\alpha_i v^2 + \varphi_i) + b((d_i, v) + \psi_i)) \quad \text{при} \quad \beta_i = \frac{b}{2\alpha_i a} d_i, \quad a, b = \text{const}.$$

Если выполнено условие ii), то система (2.16) преобразуется к виду

$$\Delta\varphi = \lambda\mu \sum_{i=1}^N q_i A_i, \quad \Delta\psi = \lambda\nu \sum_{i=1}^N q_i(\beta_i, d) A_i, \quad (2.21)$$

где

$$A_i(l_i\varphi, k_i\psi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}_i dv. \quad (2.22)$$

Если

$$\beta_i = \frac{b}{2\alpha_i a} d_i,$$

то

$$(\beta_i, d) = \frac{b}{a} \frac{d^2}{2\alpha} \frac{k_i}{l_i}$$

ввиду тождеств

$$\frac{(d_i, d)}{\alpha_i} = \frac{d^2}{\alpha} \frac{k_i}{l_i}.$$

Квазилинейная система типа Гемгольца (2.21) является основной в данной работе. В случае нормированных функций распределения эта система допускает следующее обобщение. Пусть

$$\int_D \int_{\mathbb{R}^3} f_i dv dr = N_i,$$

где

$$f_i = f_{1i}(\varphi, \psi, v) + f_{2i}(\varphi, \psi) \cdot M(v), \quad (2.23)$$

и сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^3} M(v) dv,$$

тогда справедливо интегральное тождество

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_i dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{1i}(\varphi, \psi, v) dv + f_{2i}(\varphi, \psi) \left(N_i - \int_D \int_{\mathbb{R}^3} f_{1i} dv dr \right) / \int_D f_{2i} dr.$$

Поэтому в случае нормированных функций распределений f_i для определения функций φ, ψ в распределении f_i получим систему квазилинейных интегродифференциальных уравнений типа Гемгольца

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \lambda\mu \sum_{i=1}^N q_i \tilde{A}_i, & \Delta\psi &= \lambda\nu \sum_{i=1}^N q_i(\beta_i, d) \tilde{A}_i, \\ \tilde{A}_i &= \int_{\mathbb{R}^3} f_{1i} dv + \lambda f_{2i} \left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \int_D \int_{\mathbb{R}^3} f_{1i} dv dr \right) / \int_D f_{2i} dr, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $\lambda = \|N\|$, $N \triangleq (N_1, \dots, N_n)$, $\xi_i = N_i / \|N\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция распределения вида (2.23), по-видимому, может оказаться полезной при исследовании стационарных решений уравнения Больцмана, так как позволяет упростить интеграл столкновений за счет разделения переменных по r и v . Если дополнительно нормировать функцию f_{1i}

$$\int_D \int_{\mathbb{R}^3} f_{1i} dv dr = K_i,$$

то мы можем рассматривать функции распределения с различным числом частиц N_i и K_i .

3. Постановка краевой задачи и задачи о точке бифуркации. Для простоты рассуждений, далее, будем считать вспомогательный вектор d направленным вдоль оси Z . Тогда $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей ∂D класса $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, и выполнены условия i), ii) и

iii) потенциалы U , A электромагнитного поля (E, B) удовлетворяют условиям (2.19), где u_{01}, u_{02} – константы,

$$\sum_{k=1}^N q_k A_k(l_k \varphi^0, k_k \psi^0) = 0, \quad \sum_{k=1}^N q_k(\beta_k, d) A_k(l_k \varphi^0, k_k \psi^0) = 0$$

при

$$\varphi^0 = -\frac{2\alpha q}{m} u_{01}, \quad \psi^0 = \frac{q}{mc} u_{02}, \quad N \geq 3.$$

Тогда система (2.21) с граничными условиями

$$\varphi|_{\partial D} = \varphi^0, \quad \psi|_{\partial D} = \psi^0 \quad (3.1)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$ имеет тривиальное решение $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$. По теореме 1 стационарная система ВМ для всех λ имеет тривиальное решение

$$E^0 = \frac{m}{2\alpha q} \partial_r \varphi^0 = 0, \quad r \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad B^0 = \beta d_1, \\ f_i^0 = \lambda \hat{f}_i(-\alpha_i v^2 + c_{1i} + l_i \varphi^0, (v, d_i) + c_{2i} + k_i \psi^0)$$

с граничными условиями (2.19).

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора

$$A(x, y) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \left((x - x^0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^i A(x^0, y^0)$$

и выделяя линейные члены, запишем систему (2.21) в операторном виде

$$(L_0 - \lambda L_1)u - \lambda r(u) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь

$$L_0 = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}, \quad u = (\varphi - \varphi^0, \psi - \psi^0)',$$

$$L_1 = \sum_{s=1}^N q_s \begin{bmatrix} \mu l_s \frac{\partial A_s}{\partial x} & \mu k_s \frac{\partial A_s}{\partial y} \\ \nu l_s(\beta_s, d) \frac{\partial A_s}{\partial x} & \nu k_s(\beta_s, d) \frac{\partial A_s}{\partial y} \end{bmatrix}_{x=l_s \varphi^0, y=k_s \psi^0} \triangleq \begin{bmatrix} \mu T_1 & \mu T_2 \\ \nu T_3 & \nu T_4 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$r(u) = \sum_{i \geq l} \sum_{s=1}^N \varrho_{is}(u) b_s, \quad (3.4)$$

где

$$\varrho_{is}(u) \triangleq \frac{q_s}{i!} \left(l_s u_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_s u_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^i A_s(l_s \varphi^0, k_s \psi^0)$$

— i -однородные формы по u ,

$$\left. \frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} A_s(x, y) \right|_{x=l_s \varphi^0, y=k_s \psi^0} = 0 \quad \text{при } 2 \leq i_1 + i_2 \leq l-1, \quad s = 1, \dots, N,$$

$$b_s \triangleq (\mu, \nu(\beta_s, d))'.$$

Задачу о существовании точки бифуркации λ^0 для (2.21), (3.1) можно трактовать как задачу о точке бифуркации операторного уравнения (3.2).

Введем банаховы пространства $C^{2,\alpha}(\overline{D})$ и $C^{0,\alpha}(\overline{D})$ соответственно с нормами $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ и $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ и $W^{2,2}(D)$, которое является обычным L^2 -соболевским пространством в D .

Введем банахово пространство E векторов $u \triangleq (u_1, u_2)'$, где $u_i \in L_2(D)$, L_2 — вещественное гильбертово пространство с внутренним произведением $(\cdot, \cdot)$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{L_2(D)}$. В качестве области $D(L_0)$ выберем множество векторов $u \triangleq (u_1, u_2)'$ с $u_i \in \dot{W}^{2,2}(D)$. Здесь $\dot{W}^{2,2}(D)$ означает $W^{2,2}$ -функции со следом 0 на ∂D .

Тогда $L_0: D \subset E \rightarrow E$ — линейный самосопряженный оператор. В силу вложения

$$W^{2,2}(D) \subset C^{0,\alpha}(\overline{D}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.5)$$

оператор $r: W^{2,2} \subset E \rightarrow E$ аналитический в окрестности нуля. Ввиду вложения (3.5) любое решение уравнения (3.2) из $D(L_0)$ будет гёльдеровским. Более того, так как коэффициенты системы (3.2) постоянны, вектор $r(u)$ аналитический, $\partial D \in C^{2,\alpha}$, и на основании известных результатов теории регулярности слабых решений эллиптических уравнений [21] искомые обобщенные решения уравнения (3.2) из $\dot{W}^{2,2}(D)$ принадлежат $C^{2,\alpha}(\overline{D})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [15]. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации задачи* (2.21), (3.1), если в любой окрестности точки $(\varphi^0, \psi^0, \lambda^0)$ найдется точка (φ, ψ, λ) , удовлетворяющая системе (2.21), (3.1), такая, что

$$\|\varphi - \varphi^0\|_{\dot{W}^{2,2}} + \|\psi - \psi^0\|_{\dot{W}^{2,2}} > 0.$$

Здесь $\|\cdot\|_{W^{2,2}}^\circ$ есть норма в пространстве $W^{2,2}(D)$. В силу теоремы 1 о редукции системы ВМ точки бифуркации задачи (2.21), (3.1) назовем *точками бифуркации стационарной системы* ВМ. Оператор $L_1 \in L(E \rightarrow E)$ ограниченный линейный.

При сформулированных условиях для L_0 и L_1 все особые точки оператора

$$L(\lambda) \triangleq L_0 - \lambda L_1$$

фредгольмовы. Если $N(L(\lambda_0)) = \{0\}$, то на основании теоремы о неявном операторе [15] для любого $\delta > 0$ найдется окрестность S точки λ_0 такая, что при всех $\lambda \in S$ в шаре $\|u\|_E < \delta$ существует лишь тривиальное решение $u = 0$, и λ_0 не будет точкой бифуркации. Поэтому для вычисления точек бифуркации необходимо (но не достаточно) найти такие значения λ_0 , для которых $N(L_0 - \lambda_0 L_1) \neq \{0\}$. Матрицу, порождающую оператор L_1 , обозначим через Ξ .

Точки бифуркации нелинейного уравнения (3.2) могут встретиться только среди точек спектра линеаризованной системы

$$(L_0 - \lambda L_1)u = 0. \quad (3.6)$$

Для исследования спектральной задачи (3.6) при физически приемлемых значениях параметров предварительно определим собственные числа и векторы матрицы Ξ в (3.3). Для этого нам потребуется ряд вспомогательных предложений.

Введем условия

- iii) $T_1 < 0$;
- iv) $T_1 T_4 - T_2 T_3 > 0$.

ЛЕММА 2. Если

$$\left. \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x} \right|_{x=l_k \varphi^0} > 0,$$

то iv) выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всегда можно считать, что $q \triangleq q_1 < 0$, $q_i > 0$, $i = 2, \dots, N$, $\text{sign } q_i l_i = \text{sign } q$. По условию леммы

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x} dv > 0.$$

Поэтому $T_1 < 0$.

Введем матрицу $\Theta = \|\Theta_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n} \neq [0]$, где $\Theta_{ij} = q_i q_j (l_j k_i - k_j l_i)(\beta_i - \beta_j, d)$.

ЛЕММА 3. Если

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = \frac{\partial A_i}{\partial y}, \quad i = 1, \dots, N, \quad N \geq 3,$$

причем $\partial A_i / \partial x > 0$ и матрица Θ неотрицательна, то выполнены условия iv) и v).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любых $\partial A_i / \partial x$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} T_1 T_4 - T_2 T_3 &= \sum l_i a_i \sum k_i(\beta_i, d) a_i - \sum k_i a_i \sum l_i(\beta_i, d) a_i \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j (l_i k_i - k_j l_i)(\beta_i - \beta_j, d), \quad \text{где } a_i \triangleq q_i \frac{\partial A_i}{\partial x}. \end{aligned}$$

С учетом этого тождества для положительности выражения $T_1 T_4 - T_2 T_3$ достаточно, чтобы

$$\Theta_{ij} = q_i q_j (l_j k_i - k_j l_i)(\beta_i - \beta_j, d) \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad N \geq 3. \quad (3.7)$$

Так как матрица Θ неотрицательна, то (3.7) выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\beta_i = d_i / (2\alpha_i)$, то

$$(\beta_i, d) = \frac{d^2}{2\alpha} \frac{k_i}{l_i} \quad (3.8)$$

и

$$\Theta_{ij} = \frac{d^2}{2\alpha} \frac{q_i q_j}{l_i l_j} (l_j k_i - l_i k_j)^2 > 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

так как $\text{sign}(q_i / l_i) = \text{sign } q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $N = 2$ и $\beta_i = d_i / (2\alpha_i)$, то в силу условия iii) и равенств (3.8) имеет место альтернатива: или в условии iii) $A_1 = A_2 = 0$, или $k_i = l_i$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия iv), v). Тогда матрица Ξ в (3.3) имеет два однократных собственных числа

$$\chi_+ = \mu T_1 + o(1), \quad \chi_- = \eta \frac{T_1 T_4 - T_2 T_3}{T_1} \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \eta = \frac{4\pi|q|}{m} > 0,$$

при $\varepsilon \triangleq 1/c^2 \rightarrow 0$.

Собственному числу χ_- отвечают собственные векторы

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_2/T_1 \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon), \quad \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon)$$

матриц Ξ и Ξ' соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{bmatrix} \mu T_1 - \chi & \mu T_2 \\ +\varepsilon \eta T_3 & +\varepsilon \eta T_4 - \chi \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\chi^2 - \chi(\mu T_1 + \varepsilon \eta T_4) + \varepsilon \eta \mu (T_1 T_4 - T_2 T_3) = 0.$$

Так как

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mu T_1 + \varepsilon \eta T_4 \pm \sqrt{(\mu T_1 + \varepsilon \eta T_4)^2 - 4\varepsilon \eta \mu (T_1 T_4 - T_2 T_3)} \right),$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\chi_+ &= \mu T_1 + O(1), \\ \chi_- &= \varepsilon \eta \frac{T_1 T_4 - T_2 T_3}{T_1} + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Так как $\mu < 0$ и $T_1 < 0$, то $\chi_+ > 0$. Аналогично проверяется, что $\chi_- < 0$ в силу $\eta > 0$, $T_1 T_4 - T_2 T_3 > 0$, $T_1 < 0$.

Решая однородные системы

$$(\Xi - \chi_-)c = 0, \quad (\Xi' - \chi_-)c^* = 0,$$

найдем искомые собственные векторы, отвечающие собственному числу χ_- .

ПРИМЕР. Пусть $f_i = f_i(a(-\alpha_i v^2 + \varphi_i) + b((d_i, v) + \psi_i))$, $i = 1, \dots, N$, тогда в (2.22) $A_i = A_i(al_i \varphi + bk_i \psi)$, и система (2.21) будет потенциальной:

$$\Delta \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial V / \partial \varphi \\ \partial V / \partial \psi \end{bmatrix},$$

где

$$V = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{l_k} \int_0^{al_k \varphi + bk_k \psi} A_k(s) ds, \quad a_1 = \frac{\mu}{a}, \quad a_2 = \frac{\nu d^2}{2\alpha b}.$$

При этом в силу леммы 1 выполняется условие ii) для

$$\beta_i = \frac{b}{a} \frac{d_i}{2\alpha_i}.$$

Если $A'_k(s) > 0$, то в силу леммы 3 выполнены условия iv), v).

Перейдем к вычислению точки бифуркации λ_0 . Полагая в (3.2) $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, рассмотрим систему

$$(L_0 - (\lambda_0 + \varepsilon)L_1)u - (\lambda_0 + \varepsilon)r(u) = 0 \quad (3.9)$$

в окрестности точки λ_0 . Пусть $T_2 \neq 0$ и $T_3 \neq 0$ или $T_2 = T_3 = 0$. С целью симметризации системы при $T_2 \neq 0$ и $T_3 \neq 0$, умножив обе части уравнения (3.9) на матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \tilde{a} \triangleq \frac{\mu T_2}{\nu T_3} \neq 0,$$

запишем (3.9) в виде

$$Bu = \varepsilon B_1 u + (\lambda_0 + \varepsilon)\mathcal{R}(u). \quad (3.10)$$

Здесь

$$B = M(L_0 - \lambda_0 L_1), \quad \mathcal{R}(u) \triangleq Mr(u) \triangleq (r_1(u), r_2(u)),$$

$B_1 \in L(E \rightarrow E)$ – самосопряженный оператор, так как он порождается симметрической матрицей $B_1 = ML_1$, $B: D(L_0) \subset E \rightarrow E$ – самосопряженный фредгольмов оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $A_s = A_s(al_s\varphi + bk_s\psi)$, то

$$\frac{\partial A_s}{\partial y} = A'_s b, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = A'_s a, \quad \tilde{a} = \frac{\mu b}{\nu} \frac{d^2}{2\alpha} a, \quad \beta_s = \frac{b}{a} \frac{d_s}{2\alpha_s}.$$

В разложении (3.4)

$$\varrho_{is} = \frac{q_s}{i!} A_s^{(i)}(al_s\varphi^0 + bk_s\psi^0)(al_s u_1 + bk_s u_2)^i.$$

Поэтому в этом случае $\partial r_1/\partial u_2 = \partial r_2/\partial u_1$, матрица $\mathcal{R}_u(u)$ будет симметрической для любого u , а оператор $\mathcal{R}_u: E \rightarrow E$ самосопряженным для любого u .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $T_2 = T_3 = 0$, то можно положить $\tilde{a} = 1$. Если $T_2 = 0$, $T_3 \neq 0$ или $T_3 = 0$, $T_2 \neq 0$, то задача не симметризуется, и вывод уравнения разветвления в п. 3 следует проделать непосредственно для уравнения (3.9).

Введем условие

vi) пусть μ – собственное число задачи Дирихле

$$-\Delta e = \mu e, \quad e|_{\partial D} = 0,$$

а $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис в подпространстве собственных функций.

Обозначим через $c_- = (c_1, c_2)'$ – собственный вектор матрицы L_1 , отвечающий собственному числу $\chi_- < 0$.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие vi), $\lambda_0 = -\mu/\chi_-$. Тогда $\dim N(B) = n$, а система $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, где $\mathbf{e}_i = c_- e_i$, образует базис в подпространстве $N(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем матрицу $\mathcal{U}$, столбцы которой являются собственными векторами матрицы L_1 , отвечающими собственным числам χ_- , χ_+ . Тогда

$$\mathcal{U}^{-1} L_1 \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \chi_- & 0 \\ 0 & \chi_+ \end{pmatrix}, \quad L_0 \mathcal{U} = \mathcal{U} L_0$$

и уравнение $Bu = 0$ заменой $u = \mathcal{U}U$ приводится к виду

$$M[L_0 \mathcal{U}U - \lambda_0 L_1 \mathcal{U}U] = M[\mathcal{U}(L_0 U - \lambda_0 \mathcal{U}^{-1} L_1 \mathcal{U}U)] = 0.$$

Откуда следует, что линеаризованная система (3.6) расщепляется на два линейных эллиптических уравнения

$$\Delta U_1 - \lambda_0 \chi_- U_1 = 0, \quad U_1|_{\partial D} = 0, \quad (3.11)$$

$$\Delta U_2 - \lambda_0 \chi_+ U_2 = 0, \quad U_2|_{\partial D} = 0, \quad (3.12)$$

где $\lambda_0 \chi_- = -\mu$, $\lambda_0 \chi_+ > 0$. По условию vi) $\mu \in \sigma(-\Delta)$. Поэтому

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i = \text{const}, \quad U_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \mathcal{U}U = \begin{vmatrix} c_{1-} & c_{1+} \\ c_{2-} & c_{2+} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1-} \\ c_{2-} \end{vmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

ЛЕММА 6. Оператор B не имеет B_1 -присоединенных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L_1 c_- = \chi_- c_-$, то имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \langle B_1 \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle &= \left\langle \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{vmatrix} L_1 c_- e_i, c_- e_k \right\rangle = \chi_- \left\langle \begin{vmatrix} c_{1-} \\ \tilde{a} c_{2-} \end{vmatrix} e_i, \begin{vmatrix} c_{1-} \\ c_{2-} \end{vmatrix} e_k \right\rangle \\ &= \chi_- (c_{1-}^2 + \tilde{a} c_{2-}^2) \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поэтому $\det \|\langle B_1 \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle\|_{i,k=1}^n = \chi_-^n (c_{1-}^2 + \tilde{a} c_{2-}^2)^n \neq 0$, так как

$$\chi_- \neq 0, \quad c_{1-}^2 + \tilde{a} c_{2-}^2 \approx -2\alpha \frac{T_2}{T_3} c^2,$$

и, следовательно, согласно определению обобщенных жордановых цепочек (см., например, [16]) оператор B не имеет B_1 -присоединенных элементов.

Не ограничивая общности, будем считать собственный вектор c_- матрицы L_1 , выбранным так, что $\chi_- (c_{1-}^2 + \tilde{a} c_{2-}^2) = 1$. Тогда система векторов $\{B_1 \mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ будет биортонормальна к $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$. В связи с этим на основании леммы Шмидта [16] оператор

$$\check{B} = B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \gamma_i,$$

где $\gamma_i \triangleq B_1 \mathbf{e}_i$, имеет ограниченный обратный $\Gamma \in L(E \rightarrow E)$. При этом

$$\Gamma = \Gamma^*, \quad \Gamma \gamma_i = \mathbf{e}_i. \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. На основании доказательства леммы 5 для построения оператора Γ можно использовать формулу

$$\Gamma = U \begin{vmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{vmatrix} U^{-1} M^{-1},$$

где

$$\Gamma_1 = \int_D G_1(x, s) [\cdot] ds, \quad \Gamma_2 = \int_D G_2(x, s) [\cdot] ds,$$

$G_1(x, s)$ – модифицированная функция Грина задачи Дирихле (3.11), а $G_2(x, s)$ – функция Грина задачи Дирихле (3.12).

4. Вывод уравнения разветвления. Перепишем уравнение (3.10) в виде системы

$$(\check{B} - \varepsilon B_1)u = (\lambda_0 + \varepsilon)\mathcal{R}(u) + \sum_i \xi_i \gamma_i, \quad (4.1)$$

$$\xi_i = \langle u, \gamma_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Из (4.1) по теореме об обратном операторе имеем

$$u = (\lambda_0 + \varepsilon)(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \mathcal{R}(u) + \frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{e}_i. \quad (4.3)$$

При этом в силу (4.2) с учетом (3.13) должны выполняться равенства

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\xi_i + \frac{\lambda_0 + \varepsilon}{1-\varepsilon}\langle \mathcal{R}(u), \mathbf{e}_i \rangle = 0, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{R}(u) = \mathcal{R}_1(u) + \mathcal{R}_{l+1}(u) + \dots$. Уравнение (4.3) при достаточно малых ε , $|\xi|$ на основании теоремы о неявном операторе имеет единственное решение

$$u = u_1(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) + (\lambda_0 + \varepsilon)(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \{u_l(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) + u_{l+1}(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) + \dots\}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) &= \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{e}_i, \quad u_l(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) = \mathcal{R}_l(u_1(\xi \mathbf{e}, \varepsilon)), \\ u_{l+1}(\xi \mathbf{e}, \varepsilon) &= \mathcal{R}_{l+1}(u_1(\xi \mathbf{e}, \varepsilon)) \\ &+ \begin{cases} 0, & l > 2, \\ \Gamma \mathcal{R}'_2(u_1(\xi \mathbf{e}, \varepsilon))(\lambda_0 + \varepsilon)(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma u_2(\xi \mathbf{e}, \varepsilon), & l = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

и т.д.

Подставляя решение (4.5) в (4.2), получим искомую систему разветвления

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\xi + \mathbf{L}(\xi, \varepsilon) = 0, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^n)$,

$$\begin{aligned} L^i &= \frac{\lambda_0 + \varepsilon}{(1-\varepsilon)^{l+1}} \left[\left\langle \mathcal{R}_l(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_i \right\rangle + \frac{1}{1-\varepsilon} \langle \mathcal{R}_{l+1}(\xi \mathbf{e}, \mathbf{e}_i) \rangle \right] \\ &+ \begin{cases} 0, & l > 2, \\ \frac{\lambda_0 + \varepsilon}{(1-\varepsilon)^4} \langle \mathcal{R}'_2(\xi \mathbf{e})(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \mathcal{R}_2(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_i \rangle, & l = 2, \end{cases} + r_i(\xi, \varepsilon), \\ r_i &= o(|\xi|^{l+1}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{L}(\xi, \varepsilon) = \text{grad } U(\xi, \varepsilon)$, то уравнение разветвления (4.6) назовем *потенциальным*. В потенциальном случае матрица $\mathbf{L}_\xi(\xi, \varepsilon)$ окажется симметрической. Пусть в (3.9) $f_i = f_i(a l_i \varphi + b k_i \psi)$, $i = 1, \dots, N$. Тогда на основании замечания 5 матрица $\mathcal{R}_u(u)$ будет симметрической для любого u .

Покажем, что уравнение разветвления (4.6) потенциальное, если матрица $\mathcal{R}_u(u)$ симметрическая для любого u . Действительно, на основании (4.4)

$$L^i(\xi, \varepsilon) = \frac{\lambda_0 + \varepsilon}{(1-\varepsilon)} \langle \mathcal{R}(u)(\xi \mathbf{e}, \varepsilon), \mathbf{e}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $u(\xi \mathbf{e}, \varepsilon)$ определяется рядом (4.5).

Поэтому векторное поле $\mathbf{L}(\xi, \varepsilon)$ потенциально тогда и только тогда, когда матрица

$$\left\| \left\langle \mathcal{R}_u \frac{\partial u(\eta, \varepsilon)}{\partial \eta} \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle \right\|_{i,j=1}^n \quad (\eta \triangleq \xi \mathbf{e}) \quad (4.7)$$

симметрическая.

На основании (4.3) и теоремы об обратном операторе в достаточно малой окрестности точки $\xi = 0, \varepsilon = 0$ справедливо операторное тождество

$$\frac{\partial u(\eta, \varepsilon)}{\partial \eta} = [I - (\lambda_0 + \varepsilon)(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \mathcal{R}_u(u(\eta, \varepsilon))]^{-1} \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Так как $B_1, \Gamma, \mathcal{R}_u$ – самосопряженные операторы, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^* = [I - (\lambda_0 + \varepsilon) \mathcal{R}_u \Gamma (I - \varepsilon B_1 \Gamma)^{-1}] \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Поэтому

$$\left[\mathcal{R}_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^* = [I - (\lambda_0 + \varepsilon) \mathcal{R}_u \Gamma (I - \varepsilon B_1 \Gamma)^{-1}]^{-1} \mathcal{R}_u \frac{1}{1 - \varepsilon} = \mathcal{R}_u \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

ввиду операторного тождества

$$[I - (\lambda_0 + \varepsilon) \mathcal{R}_u \Gamma (I - \varepsilon B_1 \Gamma)^{-1}]^{-1} \mathcal{R}_u = \mathcal{R}_u [I - (\lambda_0 + \varepsilon)(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \mathcal{R}_u]^{-1}.$$

Итак, в матрице (4.7) оператор

$$\mathcal{R}_u \frac{\partial u}{\partial \eta} : E \rightarrow E$$

является самосопряженным. Поэтому матрица (4.7) симметрическая и $L(\xi, \varepsilon) = \text{grad} U(\xi, \varepsilon)$. Из сказанного вытекает

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия i)–vi), $\lambda_0 = -\mu/\chi_-$. Тогда уравнение (3.9) имеет столько решений $u \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, сколько малых решений $\xi \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет система разветвления (4.6).

Если в системе (2.21) $A_i = A_i(a l_i \varphi + b k_i \psi)$, $i = 1, \dots, N$, a, b – константы, то система разветвления потенциальная, т.е. $L(\xi, \varepsilon) = \nabla_\xi U(\xi, \varepsilon)$, $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, где

$$U(\xi, \varepsilon) = -\frac{\lambda_0 + \varepsilon}{(l+1)(1-\varepsilon)^{l+1}} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{R}_l(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_i \rangle \xi_i - \frac{\lambda_0 + \varepsilon}{(l+2)(1-\varepsilon)^{l+2}} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{R}_{l+1}(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_i \rangle \xi_i - \begin{cases} 0, & l > 2, \\ \frac{(\lambda_0 + \varepsilon)}{(1-\varepsilon)^4} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{R}'_2(\xi \mathbf{e})(I - \varepsilon \Gamma B_1)^{-1} \Gamma \mathcal{R}_2(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_i \rangle \xi_i, & l = 2, \end{cases} + o(|\xi|^{l+1}). \quad (4.8)$$

5. Теорема существования точек бифуркации и построение асимптотических решений. Система разветвления (4.6) есть искомая система разветвления Ляпунова–Шмидта [15], [16] в задаче о точке бифуркации краевой задачи (2.21), (3.1). Далее нам понадобятся сведения о вещественных решениях и структуре системы разветвления

$$L(\xi, \varepsilon) \triangleq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \xi + L_l(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^l) = 0. \quad (5.1)$$

Эти результаты из [22]–[24] мы сформулируем в виде двух лемм.

ЛЕММА 8. Пусть

- 1) n нечетно, или
- 2) l четно и $\sum_{j=1}^n |L_l^j(\xi, 0)| \neq 0$ при $\xi \neq 0$, или
- 3) $L(\xi, \varepsilon) = \nabla W(\xi, \varepsilon)$.

Тогда в любой окрестности точки $\xi = 0$, $\varepsilon = 0$ найдется пара (ξ^*, ε^*) , $\xi^* \neq 0$, удовлетворяющая системе (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $\xi = 0$ является неизоллированной особой точкой векторного поля $L(\xi, 0)$, то в любой окрестности точки $\xi = 0$, $\varepsilon = 0$ найдется пара $(\xi^*, 0)$, где $\xi^* \neq 0$, удовлетворяющая (5.1), и лемма справедлива.

Пусть $\xi = 0$ – изолированная точка векторного поля $L(\xi, 0)$. Рассмотрим три случая.

- 1) Пусть n нечетно. Возьмем окрестность $|\xi| \leq r$, $|\varepsilon| \leq \varrho$ и введем векторное поле

$$\Phi(\xi, t) = \frac{(2t-1)\varrho}{1-(2t-1)\varrho} \xi + L(\xi, (2t-1)\varrho).$$

Если $\Phi(\xi, t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, $|\xi| = r$, то определена степень отображения [25]

$$J_t = J\left(\frac{\Phi}{\|\Phi\|}, S(0, r)\right)$$

границы сферы $|\xi| = r$ в единичную сферу, и при этом J_t – одно и то же целое число для каждого $t \in [0, 1]$. Но $J_0 = (-1)^n$, $J_1 = 1^n$. Следовательно, $J_t \neq \text{const}$. Поэтому для всех $r > 0$, $\varrho > 0$ найдутся $t^* \in [0, 1]$ и ξ^* , $|\xi^*| = r$, такие, что $\Phi(\xi^*, t^*) = 0$. Соответствующая пара $(\xi^*, (2t^* - 1)\varrho)$ удовлетворяет системе (5.1).

- 2) Пусть l четно и

$$\sum_{j=1}^n |L_l^j(\xi, 0)| \neq 0.$$

В этом случае поле $L(\xi, \varepsilon)$ на сфере $S(0, r)$ при $|\varepsilon| < \delta$, где δ достаточно мало, гомотопно полю $L_l(\xi, 0)$. Следовательно,

$$J\left(\frac{L(\xi, \varepsilon)}{\|L\|}, S(0, r)\right) = J\left(\frac{L_l(\xi, 0)}{\|L_l\|}, S(0, r)\right)$$

– четное число, так как l четное.

Зафиксируем $\varepsilon^* \in (-\delta, \delta)$. Введем γ_0 – индекс Кронекера [26] изолированной особой точки $\xi = 0$ поля $L(\xi, \varepsilon^*)$, $\gamma_0 = (\text{sign } \varepsilon^*)^n$.

По теореме Кронекера [26]

$$J\left(\frac{L(\xi, \varepsilon^*)}{\|L\|}, S(0, r)\right) = \sum_i \gamma_i. \quad (5.2)$$

Так как в равенстве (5.2) слева четное число, а γ_0 нечетно, то в шаре $S(0, r)$, кроме точки $\xi = 0$, есть другая особая точка $\xi^* \neq 0$ поля $L(\xi, \varepsilon^*)$. Пара (ξ^*, ε^*) удовлетворяет системе (5.1).

3) Пусть $L(\xi, \varepsilon) = \text{grad } W(\xi, \varepsilon)$, где

$$W(\xi, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \sum_i \xi_i^2 + U(\xi, \varepsilon), \quad |\xi| < \delta, \quad \delta > 0.$$

Если точка $\xi = 0$ является неизолитованной критической точкой потенциала $W(\xi, 0)$ (потенциала $W(\xi, \varepsilon)$ при $0 < |\varepsilon| < \delta$), то лемма справедлива. Пусть точка $\xi = 0$ – изолированная критическая точка потенциала $W(\xi, 0)$ и потенциала $W(\xi, \varepsilon)$ при $0 < |\varepsilon| < \delta$. Тогда определены индексы Морса–Конли [27] критической точки $\xi = 0$ потенциала $W(\xi, 0)$ и потенциала $W(\xi, \varepsilon)$ при $0 < |\varepsilon| < \delta$, где δ достаточно мало. На основании свойства гомотопической инвариантности индекса Морса–Конли [27, теорема 1.4, с. 67] эти индексы равны. Но при $0 < |\varepsilon| < \delta$ точка $\xi = 0$ является невырожденной критической точкой, так как

$$\det \left\| \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} W(\xi, \varepsilon) \right\|_{\xi=0} = \frac{\varepsilon^n}{(1-\varepsilon)^n} \neq 0.$$

Поэтому индекс Морса–Конли равен числу отрицательных собственных чисел соответствующего гессиана

$$\left\| \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \delta_{ik} \right\|_{i,k=1,\dots,n}.$$

Но тогда при $\varepsilon > 0$ этот индекс равен 0, а при $\varepsilon < 0$ он равен n . Поэтому точка $\xi = 0$ не может быть изолированной критической точкой потенциалов $W(\xi, 0)$ и $W(\xi, \varepsilon)$ при $0 < |\varepsilon| < \delta$. Следовательно, $\xi = 0$ есть точка бифуркации системы разветвления $L(\xi, \varepsilon) = 0$.

ЛЕММА 9. 1) Пусть l чётно, система

$$\xi + L_l(\xi, 0) = 0 \tag{5.3}$$

имеет простое вещественное решение $\xi^0 \neq 0$, тогда в окрестности точки $\varepsilon = 0$ система (5.1) имеет вещественное решение

$$\xi = (\xi^0 + o(1))\varepsilon^{1/(l-1)}. \tag{5.4}$$

2) Пусть l нечётно, система (5.3) или система

$$-\xi + L_l(\xi, 0) = 0 \tag{5.5}$$

имеет простое вещественное решение $\xi^0 \neq 0$, тогда в полукрестности $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$) существуют два решения вида

$$\xi = (\pm \xi^0 + o(1))|\varepsilon|^{1/(l-1)}. \tag{5.6}$$

3) Пусть $L_l(\xi, 0) = \text{grad } U(\xi)$, ξ^0 – изолированный экстремум функции $U(\xi)$ на сфере $|\xi| = 1$, $U(\xi^0) \neq 0$, тогда существует решение

$$\xi = (c + o(1))|\varepsilon|^{1/(l-1)}, \tag{5.7}$$

где

$$c = \begin{cases} \left(\frac{\text{sign } \varepsilon}{(l+1)U(\xi^0)} \right)^{1/(l-1)} \xi^0, & l \text{ чётно,} \\ \pm \left| \frac{1}{(l+1)U(\xi^0)} \right|^{1/(l-1)} \xi^0, & \varepsilon U(\xi^0) > 0, l \text{ нечётно.} \end{cases} \tag{5.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1), 2) Будем искать решения уравнения (5.3) в виде $\xi = \eta(\varepsilon) \times \varepsilon^{1/(l-1)}$. Для определения $\eta(0)$ получим две системы: одну – при $\varepsilon > 0$, другую – при $\varepsilon < 0$, т.е. системы (5.3), (5.5). Если l четно, то замена $\xi = -\xi$ преобразует уравнение (5.3) в (5.5). Если l нечетно, эта замена не меняет уравнений. Поэтому в случае простых вещественных решений ξ^0 существование решений (5.4), (5.6) следует из теоремы о неявной функции.

3) Пусть $L_l(\xi, 0) = \text{grad } U(\xi)$. Тогда решение (5.7) будем искать в виде

$$\xi = \left(\frac{\varepsilon}{2q} \right)^{1/(l-1)} \varepsilon,$$

где $|\eta| = 1$, $q(\varepsilon)$ – скалярный параметр, удовлетворяющий при нечетном l условию $\varepsilon q(0) > 0$. Для определения q и η получим систему

$$2q\eta + L_l(\eta, 0) + \Theta(\eta, q, \varepsilon) = 0, \quad |\eta| = 1,$$

$\|\Theta\| = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому $2q(0)\eta(0) + L_l(\eta(0), 0) = 0$, $|\eta(0)| = 1$.

Так как по условию ξ^0 – изолированный экстремум функции $U(\xi)$ на сфере $|\xi| = 1$, $U(\xi^0) \neq 0$, то положим

$$q(0) = (l+1)U(\xi^0), \quad \eta(0) = \xi^0.$$

Рассмотрим возмущенное векторное поле

$$\Phi_\varepsilon(\eta, q) = \left\{ 2q\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \Theta_i, |\eta| = 1 \right\}.$$

Пусть S – сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в точке $(q(0), \eta^0)$ радиуса $\varrho > 0$. Введем степень отображения [28]:

$$J\left(\frac{\Phi_\varepsilon}{\|\Phi_\varepsilon\|}, S\right) = \begin{cases} +1, & \text{если } (q(0), \xi^0) - \text{точка минимума для } q(0)|\xi|^2 + U(\xi, 0), \\ (-1)^{n+1}, & \text{если } (q(0), \xi^0) - \text{точка максимума для } q(0)|\xi|^2 + U(\xi, 0). \end{cases}$$

Так как эта степень отлична от 0, то при $|\varepsilon| < \delta$, δ достаточно мало, векторное поле $\Phi_\varepsilon(\eta, q) = 0$ имеет особую точку в окрестности точки $(q(0), \xi^0)$.

С помощью лемм 7–9 теперь можно доказать следующие результаты о точке бифуркации задачи (2.21), (3.1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия i)–vi), где $\lambda_0 = -\mu/\chi_-$, и одно из трех предположений:

1) n нечетно;

2) l четно, $\sum_{i=1}^n |\langle \mathcal{R}_l(\xi \mathbf{e}, \mathbf{e}_i) \rangle| \neq 0$ при $\xi \neq 0$;

3) $f_i = f_i(a(-\alpha_i v^2 + \varphi_i) + b(v \cdot d_i + \psi_i))$, $i = 1, \dots, N$, a, b – константы.

Тогда λ_0 – точка бифуркации краевой задачи (2.21), (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий 1)–3) теоремы 2 выполнены условия лемм 7, 8 для уравнения разветвления (4.6) краевой задачи (2.21), (3.1). Формула (4.5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между искомыми решениями краевой задачи и малыми решениями уравнения разветвления (4.6). Поэтому справедливость теоремы 2 вытекает из этих лемм.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют условиям (2.19) и выполнены условия теоремы 2. Тогда λ_0 – точка бифуркации системы ВМ (2.1)–(2.5).

ПРИМЕР. Пусть в системе ВМ функции распределения имеют вид [29]

$$f_i = \lambda \exp(-\alpha_i v^2 + (d_i, v) + \gamma_i + l_i \varphi(r) + k_i \psi(r)),$$

причем

$$\sum_{i=1}^N q_i \alpha_i^{-3/2} \exp\left(\gamma_i + \frac{d_i^2}{4\alpha_i}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^N q_i \alpha_i^{-3/2} \exp\left(\gamma_i + \frac{d_i^2}{4\alpha_i}\right) \frac{k_i}{l_i} = 0.$$

Тогда условия i), ii) при $\beta_i = d_i/(2\alpha_i)$ и условия 1)–3) теоремы 2 будут выполнены. При этом уравнение разветвления (4.6) оказывается потенциальным. Если μ – собственное число задачи Дирихле vi), то на основании следствия 1 $\lambda_0 = -\mu/\chi_-$ есть точка бифуркации системы ВМ с условиями (2.19), где $u_{10} = u_{20} = 0$. При этом

$$\begin{aligned} T_1 &\triangleq \sum a_i l_i, \quad T_2 \triangleq \sum a_i k_i, \quad T_3 \triangleq \sum a_i l_i, \quad T_4 = \sum a_i \frac{k_i^2}{l_i}, \\ a_i &\triangleq q_i \left(\frac{\pi}{\alpha_i}\right)^{3/2} \exp\left(\gamma_i + \frac{d_i^2}{4\alpha_i}\right), \\ \chi_- &= \frac{1}{2} \left(\nu T_4 - \mu T_1 - \sqrt{(\nu T_4 - \mu T_1)^2 + 4\mu\nu[T_1 T_4 - T_2 T_3]} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия i)–vi), где $\lambda_0 = -\mu/\chi_-$, и условия одного из трех утверждений леммы 9.

Если выполнено 1), то краевая задача (3.9) имеет решение

$$u = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^0 \mathbf{e}_i + o(1) \right) (\lambda - \lambda_0)^{1/(l-1)}.$$

Если выполнено 2), то существуют два решения

$$u_{\pm} = \left(\pm \sum_{i=1}^n \xi_i^0 \mathbf{e}_i + o(1) \right) |\lambda - \lambda_0|^{1/(l-1)},$$

определенных в полукрестности $\lambda > \lambda_0$ ($\lambda < \lambda_0$), если ξ^0 удовлетворяет системе (5.3) (ξ^0 удовлетворяет системе (5.5)).

Если выполнено 3), то

$$u = \left(\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i + o(1) \right) |\lambda - \lambda_0|^{1/(l-1)}, \quad (5.9)$$

где вектор c определяется по формуле (5.8).

Доказательство вытекает из лемм 7, 9 и формулы (4.5).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют условиям (2.19) и выполнены условия теоремы 3. Тогда система ВМ (2.1)–(2.5) с условиями (2.19) имеет решение (1.5), (2.20), где

$$\varphi = -\frac{2\alpha q}{m}u_{01} + u_1(r, \lambda), \quad \psi = \frac{q}{mc}u_{02} + u_2(r, \lambda), \quad (5.10)$$

функции $u_1, u_2 \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ определены в теореме 3.

Рассмотрим подробнее функции распределения вида

$$f_i = f_i(a(-\alpha_i v^2 + c_{1i} + l_i \varphi) + b(v \cdot d_i + c_{2i} + k_i \psi)), \quad (5.11)$$

где l_i, k_i связаны линейными соотношениями (2.11), сходятся интегралы

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_i dv = A_i(al_i \varphi + bk_i \psi),$$

причем $\partial A_i(s)/\partial s < 0$ для всех s . В этом случае на основании лемм 2, 3 условия i)–v) и условия теоремы 3 будут выполнены, значит уравнение разветвления (4.6) согласно лемме 7 оказывается потенциальным. В теореме 3 имеет место случай 3). Поэтому вид функций $u_1(r, \lambda)$, $u_2(r, \lambda)$ в (5.10) может быть уточнен, а именно, в случае распределения (5.11) вектор $u = (u_1, u_2)$ в формуле (5.10) можно вычислить по формулам (5.9), (5.8). Если при этом окажется, что в формуле (5.8) вектор c отвечает неизолированному экстремуму соответствующего потенциала, то часть его координат может остаться произвольными точками некоторой сферы $S \subset \mathbb{R}^k$, где $k \leq n$ (см. [22], [23], [30]). Тогда задача (3.9) будет иметь решение, зависящее от свободных параметров. Такой случай возможен, если область D симметричная и задача (3.9) обладает сферической симметрией. При этом свободные параметры, остающиеся в решении, имеют групповой смысл.

Покажем, что именно такая ситуация возникает в нашей задаче в случае кругового цилиндра. Введем условие

vii) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, матрица $\mathcal{R}'(u)$ симметрическая для любого u .

Перейдем в системе (3.9) к полярной системе координат $x_1 = \rho \cos \Theta$, $x_2 = \rho \sin \Theta$, тогда

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}, \quad u|_{\rho=1} = 0.$$

Условие vi) конкретизируется. В этом условии $\mu \in \{\mu_{\sigma}^{(s)}\}$, $s = 0, 1, \dots$, $\sigma = 1, 2, \dots$, где $\mu_{\sigma}^{(s)}$ – нули функции Бесселя $J_s(\mu)$. Если $\mu = \mu_{\sigma_0}^{(s_0)^2}$, $s_0 \geq 1$, то $\dim N(B) = 2$, векторы

$$c - J_{s_0}(\mu_{\sigma_0}^{(s_0)})\rho \cos s_0 \Theta, \quad c - J_{s_0}(\mu_{\sigma_0}^{(s_0)})\rho \sin s_0 \Theta$$

составят базис в подпространстве $N(B)$. Система разветвления (4.6) ввиду леммы 7 будет потенциальной в целом. Более того, уравнение разветвления (4.6) допускает группу $O(2)$ и в силу [30, теорема 1] имеет вид

$$\xi_i |\xi|^{-1} L(|\xi|, \varepsilon) = 0, \quad (5.12)$$

где в аналитическом случае

$$L(|\xi|, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i+1}(\varepsilon) |\xi|^{2i+1}, \quad L_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Отметим, что в этом случае на основании нечетности $L(|\xi|, \varepsilon)$ по ξ в левых частях уравнения разветвления (4.6) формы (5.10) четного порядка по ξ должны отсутствовать.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Потенциал уравнения разветвления U в (4.8) ввиду (5.12) имеет вид

$$U = - \int_0^{|\xi|} L(s, \varepsilon) ds + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}.$$

Поэтому

$$U|_{|\xi|=1} = - \int_0^1 L(s, \varepsilon) ds + \frac{1}{2(1-\varepsilon)}.$$

Пусть в (5.12)

$$L_{2i+1}(\varepsilon) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad L_{2m+1}(\varepsilon) \neq 0.$$

Полагая $\xi_1 = r \cos \alpha$, $\xi_2 = r \sin \alpha$, сведем систему (5.12) к одному уравнению

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + L_{2m+1}(\varepsilon) r^{2m} + O(r^{2m+2}) = 0. \quad (5.13)$$

Отметим, что для всех ξ

$$L_{2m+1}(0) = \lambda_0 \langle \mathcal{R}_{2m+1}(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_j \rangle \xi_j^{-1} |\xi|^{-2m}, \quad j = 1, 2,$$

если $\mathcal{R}_2 u = \dots = \mathcal{R}_{2m} u \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если $\mathcal{R}_2(u) \neq 0$, то для всех ξ

$$L_3(0) = \lambda_0 \xi_j^{-1} |\xi|^{-2} \langle \mathcal{R}_3(\xi \mathbf{e}) + \mathcal{R}_2'(\xi \mathbf{e}) \Gamma \mathcal{R}_2(\xi \mathbf{e}), \mathbf{e}_j \rangle, \quad j = 1, 2.$$

Из уравнения (5.13) найдем два решения

$$r_{1,2} = \pm \sqrt[2m]{\frac{-\varepsilon}{L_{2m+1}(0)}} + O(|\varepsilon|^{1/2m}),$$

которые будут вещественными при $\varepsilon L_{2m+1}(0) < 0$. Этим решениям отвечают соответственно два решения

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix} = \left(\pm \sqrt[2m]{\frac{-\varepsilon}{L_{2m+1}(0)}} + O(|\varepsilon|^{1/2}) \right) \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

уравнения разветвления, где параметр $\alpha \in \mathbb{R}^1$, отвечающий группе $O(2)$, остается произвольным. Подставляя (5.14) в (4.5), а вектор (4.5) в (5.10), получим два решения

$$\begin{vmatrix} \varphi^\pm \\ \psi^\pm \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\alpha q}{m} u_{01} \\ \frac{q}{mc} u_{02} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} -T_2/T_1 \\ 1 \end{bmatrix} J_{s_0}(\mu_{s_0}^{(s_0)} \rho) \cos s_0(\Theta - \alpha) \sqrt[2m]{-\frac{\lambda - \lambda_0}{L_{2m+1}(0)}} \\ + o(|\lambda - \lambda_0|^{1/(2m)}).$$

Этим решениям при $(\lambda - \lambda_0)L_{2m+1}(0) < 0$ отвечают два вещественных решения $f_i^\pm, E^\pm, B^\pm$ стационарной системы ВМ (2.1)–(2.5) с краевыми условиями (2.19), определяемые по формулам (1.5), (2.20).

В заключение отметим, что вместо условия iii) можно потребовать

iii') потенциалы U, A электромагнитного поля (E, B) удовлетворяют условиям (2.19), и при этом

$$\sum_{i=1}^N q_i A_i(l_i \varphi^0, k_i \psi^0) = 0, \quad \sum_{i=1}^N q_i(\beta_i, d) A_i(l_i \varphi^0, k_i \psi^0) = 0,$$

где φ^0, ψ^0 – гармонические функции с граничными условиями

$$\varphi^0|_{\partial D} = -\frac{2\alpha q}{m} u_{01}(r), \quad \psi^0|_{\partial D} = \frac{q}{mc} u_{02}(r).$$

Если при этом функции распределения имеют вид $\hat{f}_i = f_i(a(-\alpha v^2 + \varphi_i) + b(v \cdot d_i + \psi_i))$, то результаты получаются аналогичными и в случае непостоянных значений u_{01}, u_{02} .

Изложенную методику можно применить для построения нетривиальных решений интегродифференциальной системы (2.24). Поэтому аналогичные результаты имеют место и в задаче о точках бифуркации системы ВМ с нормированными функциями распределения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Glassey R., Strauss W. Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities // Arch. Rational Mech. Anal. 1986. V. 92. P. 59–90.
- [2] Schaeffer J. The classical limit of the relativistic Vlasov–Maxwell system // Comm. Math. Phys. 1986. V. 104. P. 403–421.
- [3] Glassey R., Strauss W. Absence of shocks in an initially dilute collisionless plasma // Comm. Math. Phys. 1987. V. 113. P. 191–208.
- [4] Glassey R., Schaeffer J. Global existence for the relativistic Vlasov–Maxwell system with nearly neutral initial data // Comm. Math. Phys. 1988. V. 119. P. 353–384.
- [5] Rein G. Generic global solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics // Comm. Math. Phys. 1990. V. 135. P. 41–78.
- [6] Guo Y. Global weak solutions of the Vlasov–Maxwell system with boundary conditions // Comm. Math. Phys. 1993. V. 154. P. 245–263.
- [7] Abdallah N. B. Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system // Math. Methods Appl. Sci. 1994. V. 17. P. 451–476.
- [8] Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и краевая задача // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.
- [9] Dolbeault J. Classification des solutions stationnaires axisymétriques régulières du système de Vlasov–Maxwell // Math. Probl. Mech. 1995 (to appear).
- [10] Greengard C., Raviart P. A. A boundary-value problem for the stationary Vlasov–Poisson equations. The plane diode // Comm. Pure Appl. Math. 1990. V. 43. P. 473–507.
- [11] Gogny D., Lions P. L. Sur les états d'équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas // Math. Model. Numer. Anal. 1989. V. 23. № 1. P. 137–153.
- [12] Degond P. The Child–Langmuir flow in the kinetic theory of charged particles. Part 1. Electron flows in vacuum. Prépubl. Mathématiques pour l'Industrie et la Physique C.N.R.S. UFR MIG. France: Univ. Paul Sabatier, 1994.

- [13] Weckler J. The Vlasov–Poisson system on a bounded domain // Abstracts of International Conf. “Nonlinear Equations in Many-Particle Systems”. Oberwolfach: Mathematisches Forschungsinstitut, 1993. P. 12.
- [14] Маслов В. П. Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+^{k/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi) d\xi$ // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 41–50.
- [15] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [16] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1986.
- [17] Holloway J. P., Dorning J. J. Nonlinear but small amplitude longitudinal plasma waves // Oper. Theory Adv. Appl. 1991. V. 51. P. 155–179.
- [18] Holloway J. P. Longitudinal travelling waves bifurcating from Vlasov plasma equilibria. Ph. D. Dissertation in Engineering Physics. Charlottesville: Univ. of Virginia, 1989.
- [19] Hesse M., Schindler K. Bifurcation of current sheets in plasmas // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 8. P. 2484–2492.
- [20] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981.
- [21] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и нелинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
- [22] Треногин В. А., Сидоров Н. А. Исследование точек бифуркации и непрерывных ветвей решений нелинейных уравнений // Дифференциальные и интегральные уравнения. № 1. Иркутск: ИГУ, 1972. С. 216–248.
- [23] Markov Y., Rudykh G., Sidorov N., Sinitsyn A., Tolstonogov D. Steady-state solutions of the Vlasov–Maxwell system and their stability // Acta Appl. Math. 1992. V. 28. P. 253–293.
- [24] Сидоров Н. А., Треногин В. А. Точки и поверхности бифуркации нелинейных операторов с потенциальными системами разветвления. Препринт. Иркутск: ИрВЦ СО АН СССР, 1991.
- [25] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- [26] Kronecker L. Über Systeme von Functionen mehrerer Variablen // Monatsberichte de l’Academie. Berlin, 1869. P. 159–198.
- [27] Conley C. C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. V. 38. Washington: Conf. Board Math. Sci., 1978.
- [28] Rothe E. Type numbers and critical points // Math. Nachr. 1950–1951. V. 4. P. 12–27.
- [29] Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: ИГУ, 1982.
- [30] Логинов Б. В., Сидоров Н. А. Групповая симметрия разветвляющихся уравнений Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке ветвления // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 681–691.

Иркутский государственный университет

Иркутский ВЦ СО РАН

E-mail: avsin@icc.ccsoan.irkutsk.su, sid@math.isu.runnet.ru

Поступило

08.09.95