Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Шноль, О функциях двух переменных, непрерывных
вдоль прямых линий, *Матем. заметки*, 1997, том 62, вы-
пуск 2, 306–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:07:58

УДК 517.51

О ФУНКЦИЯХ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕПРЕРЫВНЫХ ВДОЛЬ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Э.Э. Шноль

Изучаются множества J_a всех точек разрыва функции $f(x, y)$, имеющих величину $\geq a$ (в любой окрестности какой-либо точки J_a колебание функции $\geq a$). Рассматриваются два случая: 1) f непрерывна вдоль любой прямой; 2) f непрерывна вдоль прямых параллельных осям x и y . Указаны условия, которым должно удовлетворять множество J_a в случае 1). Показано, что (замкнутое) множество F может быть множеством J_a в случае 2) тогда и только тогда, когда проекции F на координатные оси нигде не плотны.

Библиография: 2 названия.

Введение. Общеизвестно, что функция двух переменных $f(x, y)$, непрерывная по x и по y (по каждой из переменных в отдельности), не обязана быть непрерывной по совокупности переменных. Более сильное требование – непрерывность вдоль каждой прямой – тоже не обеспечивает непрерывность $f(x, y)$. Легко построить примеры таких функций, имеющих изолированную точку разрыва, сходящуюся последовательность таких точек и даже несчетное множество точек разрыва – канторово множество, лежащее на отрезке (см. п. 3).

Однако, не удается построить такого рода функцию с “более массивным” множеством точек разрыва, имеющим положительную (плоскую) меру или хотя бы содержащим целые отрезки. Оказывается, это в самом деле невозможно: множество точек разрыва функции $f(x, y)$, непрерывной вдоль каждой прямой, должно быть “сильно разреженным”. В частности, оно не может содержать никакого отрезка (или дуги кривой) и обязано иметь плоскую меру 0. Доказательство соответствующей несложной теоремы – основная цель этой заметки. Попутно будет выяснено, каким может быть множество точек разрыва функции, непрерывной по каждой из переменных x и y .

1. Постановка задачи и результаты. Мы будем рассматривать ограниченные функции на квадрате $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Обозначим через C_l класс функций f таких, что ограничение $f(x, y)$ на любую прямую есть непрерывная функция на соответствующем отрезке. Через $J_a(f)$, или просто J_a , будем обозначать (замкнутое) множество точек разрыва функции f , имеющих величину разрыва $\geq a$ (в любой окрестности какой-либо точки J_a колебания функции $\geq a$). Полное множество точек разрыва $J(f)$ есть объединение счетного числа множеств J_{a_n} (скажем, для $a_n = 1/n$), и достаточно изучить природу J_a . Интересующий нас вопрос можно поставить так: каким может быть множество J_a для функции класса C_l ?

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы замкнутое множество F на плоскости могло быть множеством J_1 для некоторой функции класса C_1 , непрерывной вдоль каждой прямой, необходимо выполнение следующих условий:*

- а) *проекция F на любую прямую есть нигде не плотное множество;*
- б) *направления, в которых видны точки F из любой точки O , образуют нигде не плотное множество.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Множество $J(f)$ точек разрыва функции f класса C_1 не содержит никакого связного подмножества.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Множество $J(f)$ имеет плоскую (лебегову) меру, равную 0.*

В самом деле, в силу свойства б) множество J_1 , и любое J_a , не может иметь ни одной точки плотности, а в множествах положительной меры такие точки всегда есть и образуют подмножество полной меры (см. [1, с. 320]).

Заметим, что условие а) есть “предельный случай” (и, вероятно, следствие) условия б).

ПРИМЕР. Построим счетное множество точек F следующим образом. Включим в F точку O и, далее, на каждой окружности радиуса $1/n$ с центром O — n точек, делящих эту окружность на n равных частей. Такое множество обладает свойством а), как всякое счетное замкнутое множество. Однако, оно не обладает свойством б): лучи, проведенные из O во все остальные точки F , задают всюду плотное множество направлений (пересекают любую из окружностей во всюду плотном множестве точек).

Обозначим через C_{xy} класс функций $f(x, y)$, непрерывных по каждой из переменных x и y в отдельности.

ТЕОРЕМА 2. *Замкнутое множество F есть множество $J_1(f)$ для некоторой функции f из класса C_{xy} тогда и только тогда, когда проекции F на оси координат нигде не плотны.*

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in C_1$. Докажем выполнение условия а) для $J_1(f)$.

1) При каждом x функция $f(x, y)$ непрерывна по y . Пусть (при заданном x) $\delta_x(\varepsilon)$ — наибольшее из δ таких, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon$ при $|y_1 - y_2| \leq \delta$. Фиксируем $\varepsilon_* = 1/8$ и рассмотрим функцию $q(x) = \delta_x(\varepsilon_*)$. При $x_k \rightarrow c$ функции $\varphi_k(y) = f(x_k, y)$ сходятся (поточечно) к $f(c, y)$. Поэтому множество E_n тех x , для которых $q(x) \geq 1/n$, замкнуто. Отрезок $[0, 1]$ есть объединение E_n . Значит, все E_n не могут быть нигде не плотными: при $n \geq N$ E_n содержит интервал $|x - a| < \tau$.

2) В полосе $S: |x - a| < \tau$ нет точек множества F . В самом деле, пусть $|x_0 - a| < \tau$. На горизонтальной прямой $y = y_0$ выберем отрезок $T_1: |x - x_0| \leq \tau_1$, лежащий в S и такой, что на этом отрезке $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq 1/8$. В прямоугольнике $\{|x - x_0| \leq \tau_1, |y - y_0| \leq 1/N\}$ колебание $f(x, y)$ не превосходит $1/2$:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|.$$

Первое слагаемое не больше $1/8$ по выбору N и полосы S , второе — не больше $1/8$ по выбору T_1 . Таким образом, у точки (x_0, y_0) есть (прямоугольная) окрестность, в

которой колебание функции не больше $1/2$, $(x_0, y_0) \notin J_1$. Ввиду произвольности выбора точки (x_0, y_0) (в полосе S) получили, что в полосе S нет точек множества F .

3) В любом интервале оси x содержится интервал, принадлежащий некоторому E_n (с достаточно большим n), и значит, в соответствующей полосе S нет точек J_1 . Другими словами, проекция J_1 на ось x нигде не плотное множество. То же самое, разумеется, верно для оси y .

4) Вместо направлений x и y можно выбрать любую пару ортогональных (или просто несовпадающих) направлений: проекция J_1 на любую прямую – нигде не плотное множество.

Доказательство свойства б) мы лишь наметим. Оно только мелкими деталями отличается от приведенного выше.

5) Проведем через выбранную точку O все лучи $l(\alpha)$, где α – точка единичной окружности C , отвечающая направлению луча. Ограничение $f(x, y)$ на $l(\alpha)$ есть функция одного переменного, непрерывная по условию. Пусть $q(\alpha)$ – длина наибольшего отрезка, в котором (независимо от его расположения на луче $l(\alpha)$) колебание f не превосходит $1/8$. Пусть E_n – совокупность α , для которых $q(\alpha) \geq 1/n$, и на некоторой дуге $|\alpha - \alpha_0| < \tau$ E_n всюду плотно. Используя непрерывность f на прямых, пересекающих лучи, получим, что у каждой точки в секторе $|\alpha - \alpha_0| < \tau$, отличной от точки O , есть (четыреугольная) окрестность, в которой колебание f не больше $1/2$. Иными словами, в этом секторе нет точек J_1 . Перебирая все n , получим всюду плотное множество дуг окружности C , которым отвечают секторы без точек J_1 .

ПРИМЕЧАНИЕ. Пункты 1)–3) доказательства применимы к функциям, непрерывным лишь по двум направлениям. Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна по каждой из переменных x и y , то множество J_a ее точек разрыва величины $\geq a$ имеет нигде не плотные проекции на ось x и на ось y .

Ниже мы покажем, что это свойство является достаточным для того, чтобы замкнутое множество F было множеством J_a для такой функции.

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Одиночная точка разрыва функции $f \in C_l$, непрерывной вдоль каждой прямой.

Этот элементарный пример может служить “кирпичиком” для более сложных построений.

Зададим замкнутую кривую γ_1 в полярных координатах r, φ уравнением $r = h(\varphi)$. Пусть $h(\varphi)$ отлична от 0 только при $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ и γ_1 касается лучей $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$. Например, можно при $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ положить $h(\varphi) = a(\varphi - \varphi_0)(\varphi_1 - \varphi)$. Пусть γ_2 задается уравнением $r = 2h(\varphi)$. Определим функцию $g(r, \varphi)$ следующими условиями:

- 1) $g(0, \varphi) = 0$;
- 2) $g \equiv 0$ при $\varphi < \varphi_0$ или $\varphi > \varphi_1$;
- 3) при каждом $\varphi_* \in (\varphi_0, \varphi_1)$ функция $g(r, \varphi_*)$ монотонно возрастает от 0 до 1 ($g = 1$ при $r = h(\varphi_*)$), затем монотонно убывает до 0 ($g \equiv 0$ при $r \geq 2h(\varphi_*)$).

Например, при $r < 2h(\varphi)$ можно положить

$$g(r, \varphi) = q\left(\frac{r}{h(\varphi)}\right), \quad q(\xi) = \xi(2 - \xi),$$

где $g(r, \varphi)$ – непрерывная функция при $r \neq 0$. Функция $f(x, y) = g(r(x, y), \varphi(x, y))$ иско-мая; для нее $(0, 0)$ – точка разрыва величины 1: на γ_1 $f = 1$ везде, кроме точки $(0, 0)$. Вдоль прямых, проходящих через $(0, 0)$, f непрерывна по построению. На прямой, пересекающей γ_2 в точках, отличных от $(0, 0)$, непрерывность f очевидна. На прямых, не пересекающих кривую γ_2 , $f(x, y) \equiv 0$.

В дальнейшем будем называть область, ограниченную кривой γ_2 , *лепестком*, угол $\alpha = \varphi_1 - \varphi_0$ ($\alpha < \pi/2$) – *раствором лепестка*, а величину кривой γ_2 (диаметр) – *размером лепестка*. “Вершину” лепестка – особую точку кривых γ_k – будем перемещать на плоскости.

ПРИМЕР 2. Несчетное множество точек разрыва функции $f \in C_l$.

Пусть F – замкнутое нигде не плотное множество на отрезке $[0, 1]$ оси x . Положим $f(x, y) \equiv 0$ на оси абсцисс и вне последовательности лепестков, которая будет сейчас построена. Пусть P_n – левый конец n -го смежного интервала к F (при какой-то нумерации). Выберем P_n в качестве вершины лепестка, зададим его размер равным половине длины смежного интервала, зададим раствор α_n и положим при всех n $\varphi_0 = 0$ (так что кривые γ касаются оси x). Пусть с ростом n лепестки сужаются, т.е. $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Внутри каждого лепестка построим $f(x, y)$ по рецепту примера 1.

Каждая из точек P_n и, тем самым, каждая точка F есть точка разрыва f величины 1. Если прямая l не пересекает отрезок $[0, 1]$ оси x , то она может пересечь лишь конечное число лепестков, и, следовательно, f вдоль нее непрерывна. Прямая, проходящая через точку $(x_0, 0)$ отрезка $[0, 1]$ под углом β к положительной полуоси x ($-\pi/2 < \beta < \pi/2$), может пересечь лишь лепестки, для которых раствор $\alpha_n > |\beta|$ (и, возможно, еще один, если x_0 лежит в смежном интервале к F). Таких лепестков тоже конечное число. Таким образом, вдоль любой прямой $f(x, y)$ непрерывна.

ПРИМЕР 3. Разрывные функции, непрерывные по x и по y .

Пусть множество F на плоскости есть прямое произведение нигде не плотных множеств F_x и F_y ($(x, y) \in F$, если $x \in F_x$ и $y \in F_y$). Рассмотрим точки P , у которых обе координаты – концы смежных интервалов, и (как-то) занумеруем их. Точка P_n – вершина прямоугольника, внутренность которого есть пересечение полос $a < x < b$ и $c < y < d$, свободных от точек F . Построим в этом прямоугольнике лепесток с вершиной P_n , все остальные точки которого лежат строго внутри прямоугольника. Пусть его размер равен $1/n$ от величины меньшей стороны прямоугольника. Внутри каждого лепестка определим $f(x, y)$ по стандарту примера 1, вне их совокупности положим $f \equiv 0$. Любая горизонтальная или вертикальная прямая может пересечь (в точках, отличных от их вершин) лишь конечное число лепестков, и потому $f(x, y)$ непрерывна по x и по y . Множество F есть $J_1(f)$ для построенной функции f . Оно может иметь меру, сколь угодно близкую к 1. Совокупность J всех точек разрыва такой функции может, тем самым, иметь полную меру.

4. Доказательство теоремы 2. Необходимость была установлена выше (см. п. 2). Докажем достаточность.

1) Пусть задано замкнутое множество F , проекции которого на оси x и y – нигде не плотные замкнутые множества F_x и F_y (так что F – подмножество прямого произведения F_x и F_y).

Построим функцию $f(x, y)$, непрерывную (в отдельности) по x и y и имеющую во всех точках F разрывы величины 1.

Условимся называть *пиковой функцией*, или просто *пиком*, неотрицательную непрерывную функцию $P(x, y)$ с максимумом равным 1, равную 0 вне некоторого круга K . Будем называть *расстоянием пика до некоторой точки A* наибольшее расстояние точек K до A . Будем говорить, что *последовательность пиков сходится к A* , если расстояния пиков до точки A стремятся к 0. Назовем пики *раздельными*, или *непересекающимися*, если соответствующие круги не пересекаются.

Пусть $A_1, A_2, \dots$ – последовательность точек F , всюду плотная на F . Функцию f мы построим как сумму (бесконечного) числа раздельных пиков, накапливающихся к каждой из точек A_n .

2) Обозначим через (a_k, b_k) смежные интервалы к F_x и через (c_l, d_l) смежные интервалы к F_y . Пусть $\Pi_{kl} = \{a_k < x < b_k, c_l < y < d_l\}$. На первом шаге построим последовательность непересекающихся пиков, сходящуюся к точке A_1 ; пики расположим внутри (открытых) прямоугольников Π_{kl} . Такое построение возможно, так как в силу условий теоремы прямоугольники Π_{kl} (в конечном или бесконечном числе) пересекают любую окрестность произвольной точки F .

3) На m -м шаге построения для очередной точки A_m поступим аналогично (т.е. будем строить последовательность раздельных пиков, сходящуюся к точке A_m), но дополнительно потребуем, чтобы

- 1) все пики, “относящиеся” к A_m , были на расстоянии не более $1/m$ от A_m ;
- 2) вновь построенные пики не пересекались с пиками, построенными ранее для точек $A_1, \dots, A_{m-1}$.

4) Положим $f(x, y)$ равной сумме всех построенных пиков, т.е. совпадающей с каждой пиковой функцией $P(x, y)$ внутри ее круга K , и равной 0 вне всех кругов K . Каждый вертикальный отрезок $x = x_0$ с $x_0 \in F_x$ не пересекает ни одного круга K . Поэтому $f(x_0, y) \equiv 0$ при $x_0 \in F_x$.

$f(x, y)$ – искомая функция, т.е. $J_1(f) = F$. Проверим это.

5) f имеет все точки $Q \in F$ точками разрыва величины 1 по построению: $f(Q) = 0$, $f = 1$ в точках, сколь угодно близких к Q , и везде $0 \leq f \leq 1$.

6) Если $Q \notin F$, то Q отстоит от F на конечном расстоянии d . Поскольку все пики, кроме конечного числа, отстоят от F на расстоянии меньшем d , то в некоторой окрестности точки Q функция $f(x, y)$ есть сумма конечного числа пиков либо $f \equiv 0$. Поэтому f непрерывна в точке Q .

7) Функция $f(x, y)$ везде непрерывна по y . В самом деле, если точка $x_0 \notin F_x$, то f непрерывна во всех точках отрезка $x = x_0$ по совокупности переменных (см. 6)). Если же $x_0 \in F_x$, то $f(x_0, y) \equiv 0$ (см. 4)). Итак, $f(x_0, y)$ – непрерывная функция y при любом x_0 . Аналогично, $f(x, y_0)$ – непрерывная функция x при любом y_0 .

5. Заключение. В теореме 1 сформулированы жесткие условия, которым должно удовлетворять множество F , чтобы оно могло быть множеством точек разрыва функции $f \in C_1$ (непрерывной вдоль каждой прямой). Условию а) удовлетворяет сравнительно широкий класс множеств. В частности, к нему относятся все замкнутые множества, имеющие хаусдорфову размерность [2, с. 779] меньшую 1. Условию б) удовлетворяют

- 1) множество, лежащее на гладкой дуге и нигде не плотное на ней;

- 2) последовательность A_m , сходящаяся к точке O , и такая, что направления, в которых видны точки A_m из O , образуют нигде не плотное множество.

Разумеется, годится также объединение конечного числа множеств вида 1) или 2). Для таких множеств условие теоремы 1 является достаточным: любое из них есть $J_1(f)$ для $f \in C_l$. Являются ли условия теоремы 1 достаточными в общем случае, неизвестно.

На наш взгляд, выяснение этого вопроса неинтересно до тех пор, пока не построены менее очевидные примеры множеств, удовлетворяющих условию б).

История этой заметки такова. В 1945 году автор знакомился с теорией функций действительного переменного под руководством (вернувшегося с фронта) А. С. Кронрода. Его задачи имели обычно известные ответы; одно из исключений – вопрос о точках разрыва функции двух переменных, непрерывной вдоль каждой прямой. К тому, что было тогда обсуждено с Кронродом, добавлена только теорема 2. Эта заметка есть, таким образом, дань памяти об Александре Семеновиче Кронроде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виноградов И. М. (ред.) Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984.
[2] Виноградов И. М. (ред.) Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985.

Институт математических проблем биологии РАН,
г. Пущино

Поступило
14.04.95
Исправленный вариант
10.10.96