Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, Гладкая регуляризация плюрисубгармонических функций, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 2, 312–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:00:55

УДК 517.576

ГЛАДКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. С. Юлмухаметов

В статье рассматривается вопрос о приближении заданной плюрисубгармонической функции гладкими плюрисубгармоническими функциями. Предлагается новый конструктивный метод приближения, который позволяет получить более детальную информацию о приближающих функциях. Так, например, функцию $u \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n)$, имеющую конечный порядок роста, можно аппроксимировать гладкими функциями $v \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n)$ так, что разность $|v - u|$ имеет почти логарифмический рост (теорема 2). Или аппроксимировать так, что разность $|v - u|$ имеет степенной рост, но при этом возникают и степенные оценки на $|\text{grad } v|$ (теорема 3).

Библиография: 5 названий.

Введение. В данной работе рассматривается вопрос о приближении заданной плюрисубгармонической функции гладкими плюрисубгармоническими функциями. В локальных вопросах достаточно эффективно работает классический метод приближения функции $u \in \text{PSH}(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, с помощью функций

$$u_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon w) \beta(w) d\lambda(w),$$

где $\beta(w)$ – радиальная функция типа “шапочки” (см. [1, с. 51]). Однако, у этого метода имеются некоторые недостатки. В частности,

- 1) если $G \neq \mathbb{C}^n$, то функции $u_\varepsilon(z)$ плюрисубгармоничны в области меньшей, чем G ;
- 2) если $G = \mathbb{C}^n$, то асимптотическое поведение разности $u_\varepsilon(z) - u(z)$ по существу не зависит от ε .

А. Садуллаевым в [2] показана возможность приближения функций, плюрисубгармонических на многообразии Штейна, гладкими функциями, плюрисубгармоническими на том же многообразии. Здесь мы предлагаем новый более конструктивный метод приближения. Этот метод позволяет получить более детальную информацию о приближающих функциях. Так, например, функцию $u \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n)$, имеющую конечный порядок роста, можно аппроксимировать гладкими функциями $v \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n)$ так, что разность $|v - u|$ имеет почти логарифмический рост (теорема 2). Или аппроксимировать так, что разность $|v - u|$ имеет степенной рост, но при этом мы имеем степенные оценки и на $|\text{grad } v|$ (теорема 3).

1. Регуляризация плюрисубгармонических функций. Обозначим через $\beta(z)$ неотрицательную функцию класса $C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, равную 0 при $|z| > 1$, зависящую только от $|z|$ и удовлетворяющую условию

$$\int \beta(z) d\lambda(z) = 1,$$

где $d\lambda$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Через $d(z, G)$ обозначим расстояние от точки z до границы G .

В работе [3] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть в области $G \subset \mathbb{C}^n$ задана положительная функция $r(z) \in C^2(G)$. Для функции $u \in \text{PSH}(G)$ положим

$$\tilde{u}(z) = \int u(z - r(z)\zeta) \beta(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Тогда в области $G' = \{z \in G : r(z) < d(z, G)\}$ имеет место неравенство

$$L(\tilde{u}; z, a) \geq L(\ln r; z, a) \frac{c_n d_n}{r(z)^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, r(z)t) t \beta(t) dt,$$

где

$$L(v; z, a) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j,$$

и $d_n = 2n - 2$ при $n > 1$, $d_1 = 1$, c_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{C}^n$, μ_u – мера, ассоциированная по Руссу с функцией u , $\mu(z, t)$ обозначает μ -меру шара с центром в точке z радиуса t .

Леммой 1 мы воспользуемся для доказательства следующей леммы.

ЛЕММА 2. Возьмем строго выпуклую функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \infty.$$

Пусть $u \in \text{PSH}(G)$, причем $\mu_u(z, d(z, G)) = \infty$ для любого $z \in G$. Тогда уравнение

$$\frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, rt) t \beta(t) dt = \varphi'(-\ln r) \quad (1)$$

при каждом $z \in G$ имеет единственное решение $r = r(z) \in C^\infty(G)$. При этом, если функцию $\tilde{u}$ определить как в лемме 1, то $\tilde{u}(z) + \varphi(-\ln r(z)) \in \text{PSH}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\psi(z, r) = \frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, rt) t \beta(t) dt$$

возрастает по r , $r \in (0, d(z, G))$, до ∞ [4, с. 58]. По формуле Привалова эту функцию можно представить в виде

$$\psi(z, r) = \int u(w) \alpha\left(\frac{z-w}{r}\right) r^{-2n} d\lambda(w). \quad (2)$$

Поскольку функция $\varphi'(-\ln r)$ строго убывает от $+\infty$ до 0, то уравнение $\psi(z_0, r) - \varphi'(-\ln r) = 0$ при каждом $z \in G$ имеет единственное решение $r = r(z) > 0$. Из представления (2) следует, что функция $F(z, r) = \psi(z, r) - \varphi'(-\ln r)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(z_0, r_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+$, где $z_0 \in G$ и $r_0 = r(z_0)$. Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial r}(z_0, r_0) > 0,$$

то по теореме о неявной функции $r(z) \in C^\infty$.

Функция $\tilde{u} + \varphi(-\ln r)$ гладкая в G и

$$L(\varphi(-\ln r); z, a) = \varphi''(-\ln r) \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln r}{\partial z_i} a_i \right|^2 - \varphi'(-\ln r) L(\ln r; z, a).$$

Отсюда и из леммы 1 следует плюрисубгармоничность функции $\varphi(-\ln r) + \tilde{u}$.

ЛЕММА 3. В условиях леммы 2 в качестве функции φ возьмем функцию εe^{ax} . Решение уравнения (1) при фиксированном $a > 0$ обозначим через $r_\varepsilon(z)$. Тогда имеют место соотношения

1) при ε , убывающем до 0, функция $r_\varepsilon(z)$ убывает до

$$r^*(u, z) = \sup\{r : u(z) \text{ плюригармонична в шаре } D(z, r)\};$$

2) $\varphi(-\ln r_\varepsilon(z)) = \varepsilon r_\varepsilon(z)^{-a}$ убывает и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(-\ln r_\varepsilon(z)) = \frac{d_n}{a} \lambda(u, z),$$

где $\lambda(u, z)$ – число Лелона функции u в точке z :

$$\lambda(u, z) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu_u(z, \tau)}{\tau^{2n-2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (1) для определения $r(z)$ в этом случае имеет вид

$$\frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, rt) t \beta(t) dt = \frac{\varepsilon a}{r^a}. \quad (3)$$

Убывание $r_\varepsilon(z)$ при убывании ε вновь следует из того, что левая часть уравнения возрастает по r . Кроме того, очевидно,

$$\mu_u(z, r^*(u, z)) = 0, \quad \mu_u(z, t) > 0 \quad \text{при } t > r^*.$$

Поэтому $r_\varepsilon \rightarrow r^*$. По определению,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(-\ln r_\varepsilon(z)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon(z)^a} = \frac{c_n d_n}{a} \lim_{r \rightarrow r^*} \frac{1}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, rt) t \beta(t) dt \\ &= \frac{d_n}{a} \lambda(u, z). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $u \in \text{PSH}(G)$ и для любого $z \in G$ $\mu_u(z, d(z, G)) = \infty$. Тогда существует убывающая последовательность $u_m \in \text{PSH}(G) \cap C^\infty(G)$, стремящаяся к $u(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для последовательности $\varepsilon_m \rightarrow 0$ положим

$$u_m(z) = \tilde{u}_m(z) + \frac{\varepsilon_m}{r_m(z)^a},$$

где $r_m(z)$ определена из уравнения (3) при $\varepsilon = \varepsilon_m$ ($a > 0$ – некоторое фиксированное число) и

$$\tilde{u}_m(z) = \int u(z - r_m(z)\zeta) \beta(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Тогда по лемме 3 во всех точках z , в которых число Лелона $\lambda(u, z)$ равно 0, $u_m(z) \rightarrow u(z)$. Если же $\lambda(u, z) \neq 0$, то $u(z) = -\infty$, следовательно, $\tilde{u}_m(z) \rightarrow -\infty$, поэтому $u_m(z) \rightarrow -\infty = u(z)$. Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и $u \in \text{PSH}(G)$. Тогда существует убывающая последовательность функций $u_m \in \text{PSH}(G) \cap C^\infty(G)$, стремящаяся к $u(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства возьмем произвольную убывающую последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и функцию v , удовлетворяющую условиям леммы 4. Функция $u + \varepsilon_m v$ также удовлетворяет условиям леммы 4. Определим последовательность $r_m = r_m(z)$ из уравнения

$$\frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_{u+\varepsilon_m v}(z, rt) t \beta(t) dt = \frac{\varepsilon_m a}{r^a} \quad (4)$$

($a > 0$ – произвольное число). При $k \leq m$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_m a}{r_m^a} &= \frac{c_n d_n}{r_m^{2n-2}} \int_0^\infty (\mu_u + \varepsilon_m \mu_v)(z, r_m t) t \beta(t) dt \\ &\geq \frac{c_n d_n}{r_m^{2n-2}} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_k} \int_0^\infty (\mu_u + \varepsilon_k \mu_v)(z, r_m t) t \beta(t) dt \end{aligned}$$

или

$$\frac{\varepsilon_k a}{r_m^a} \geq \frac{c_n d_n}{r_m^{2n-2}} \int_0^\infty (\mu_u + \varepsilon_k \mu_v)(z, r_m t) t \beta(t) dt.$$

Таким образом, r_m не превосходит решений уравнений

$$\frac{\varepsilon_k a}{r^a} = \frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty (\mu_u + \varepsilon_k \mu_v)(z, rt) t \beta(t) dt$$

и

$$\frac{\varepsilon_k a}{r^a} = \frac{c_n d_n}{r^{2n-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, rt) t \beta(t) dt.$$

Значит, r_m — убывающая последовательность, причем

$$\lim_{m \rightarrow 0} r_m(z) \leq r^*(u, z).$$

Так как последовательность $\varepsilon_m v$ тоже убывающая, то из уравнения (4) следует, что $\varepsilon_m a r_m(z)^{-a}$ убывает, причем до $d_n a^{-1} \lambda(u, z)$. Теперь, полагая

$$u_m(z) = \int (u + \varepsilon_m v)(z - r_m(z)\zeta) \beta(\zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{\varepsilon_m}{r_m(z)^a},$$

получим требуемую последовательность. Теорема 1 доказана.

2. Асимптотическая регуляризация плюрисубгармонических функций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$u \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n), \quad u(0) = 0, \quad u(z) \leq \sigma(1 + |z|)^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (5)$$

Тогда для любой возрастающей от 0 до ∞ функции $\gamma(x)$, $x \in (0, +\infty)$, существует функция $v \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n) \cap C^\infty(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющая соотношению

$$0 \leq v(z) - u(z) \leq \gamma(|z| + 1) \ln(|z| + e), \quad z \in E.$$

Исключительное множество E может быть покрыто системой шаров $D(z_j, t_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \geq R} t_j^{2n-1} = O(R^{-N}) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию $\gamma_1 \in C^\infty(0, \infty)$, возрастающую от 0 до ∞ , и

$$\int_0^\infty \frac{\gamma_1(t)}{t} dt < \infty.$$

Определим функцию φ из условий: $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi'(x) = \gamma_1(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда φ удовлетворяет условиям леммы 2. Определим функцию $r = r(z)$ из уравнения (1) и положим

$$\tilde{u}(z) = \int u(z - r(z)\zeta) \beta(\zeta) d\lambda(\zeta), \quad v(z) = \tilde{u}(z) + \varphi(-\ln r(z)).$$

Тогда по лемме 2 $v \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n) \cap C^\infty(\mathbb{C}^n)$. По формуле Привалова имеем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(z) - u(z) &= c_n d_n \int_0^\infty \left(\int_0^{r(z)t} \frac{\mu_u(z, \tau)}{\tau^{2n-1}} d\tau \right) \beta(t) t^{2n-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left(c_n d_n \int_0^\infty \frac{\mu_u(z, rts)}{(rts)^{2n-2}} t^{2n-1} \beta(t) dt \right) ds.\end{aligned}$$

В силу монотонности функции $x^{-2n+2} \mu_u(z, x)$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем оценку

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{s} \left(c_n d_n \int_0^\infty \frac{\mu_u(z, rts)}{(rts)^{2n-2}} t^{2n-1} \beta(t) dt \right) ds \leq \varphi'(-\ln r(z)) \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Точку $z \in \mathbb{C}^n$ назовем *M-нормальной по мере μ* , если выполнено условие

$$\mu(z, t) \leq M t^{2n-1}, \quad 0 < t < |z|.$$

Если точка z *M-нормальна* по мере μ_u , то

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{s} \left(c_n d_n \int_0^\infty \frac{\mu_u(z, rts)}{(rts)^{2n-2}} t^{2n-1} \beta(t) dt \right) ds \leq d_n M r(z) \varepsilon. \quad (6)$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $r(z) \leq 2(1 + |z|)$. Отсюда, используя неравенство (6), получим оценку

$$\tilde{u}(z) - u(z) \leq 2M d_n \varepsilon (1 + |z|) + \varphi'(-\ln r(z)) \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Положим $\varepsilon = (2M d_n \varepsilon (1 + |z|))^{-1}$. Тогда имеем неравенство

$$v(z) - u(z) \leq 1 + \varphi'(-\ln r(z)) \ln(2M d_n (1 + |z|)) + \varphi(-\ln r(z)). \quad (7)$$

По определению функции φ имеем

$$\varphi(x) \leq \Gamma + \gamma_1(e^x)x, \quad x > 0,$$

где

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{\gamma_1(t)}{t} dt.$$

Поэтому из соотношения (7) вытекает оценка

$$v(z) - u(z) \leq 1 + \Gamma + \gamma_1\left(\frac{1}{r(z)}\right) \ln \frac{2M d_n (1 + |z|) e}{r(z)}, \quad (8)$$

верная в точках *M-нормальных* по мере μ_u .

Если точка z *M-нормальна* по мере μ_u , то левая часть уравнения (1) не превосходит $c_n d_n M r$, следовательно, $r(z)$ не меньше, чем решение уравнения

$$c_n d_n M r = \varphi'(-\ln r) \quad \text{или} \quad c_n d_n M r = \gamma_1\left(\frac{1}{r}\right).$$

Таким образом, либо $r \geq 1$, либо $r(z) \geq \gamma_1(1)/(Mc_n d_n)$. В любом случае

$$\frac{1}{r(z)} \leq \frac{Mc_n d_n}{\gamma_1(1)} + 1. \quad (9)$$

Следовательно, в M -нормальных точках имеем оценку

$$v(z) - u(z) \leq 1 + \Gamma + \gamma_1 \left(\frac{Mc_n d_n}{\gamma_1(1)} + 1 \right) \ln \left(2d_n M \left(\frac{Mc_n d_n}{\gamma_1(1)} + 1 \right) (1 + |z|) \right).$$

Выберем монотонную функцию $M = M(t)$, $t \in (0, \infty)$, $M(t)t^{-N} \rightarrow \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}$, и монотонную функцию γ_1 таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} (1 + \Gamma) + \gamma_1 \left(\frac{M(t)c_n d_n}{\gamma_1(1)} + 1 \right) \ln \left(2d_n M(t) \left(\frac{Mc_n d_n}{\gamma_1(1)} + 1 \right) (1 + t) \right) \\ \leq (\gamma(t) + 1) \ln(t + 1). \end{aligned} \quad (10)$$

Через E обозначим множество точек $z \in \mathbb{C}^n$, не являющихся $M(z)$ -нормальными по мере μ_u . Тогда из (9) и (10) следует, что вне множества E функция v удовлетворяет условиям (5). Нам остается оценить размеры множества E .

Каждая точка $z \in E$ является центром шара $D(z, t)$ так, что $\mu_u(z, t) > M(z)t^{2n-1}$. По лемме Хеймана [5] из этой системы можно выделить подсистему шаров $D(z_j, t_j)$, покрывающую множество E , причем каждая точка пространства попадает не более, чем в k_n шаров. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{|z_j| \geq R} t_j^{2n-1} &\leq \sum_{|z_j| \geq R} \mu_u(z_j, t_j) \frac{1}{M(|z_j|)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M(kR)} \left(\sum_{kR \leq |z_j| < (k+1)R} \mu_u(z_j, t_j) \right) \\ &\leq k_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M(kR)} \mu_u(0, 2(k+1)R). \end{aligned}$$

Учитывая, что в условиях теоремы $\mu_u(0, t) \leq \sigma(e(1+t))^{2n-2+\rho}$ и свойства функции $M(t)$, получим, что множество E удовлетворяет условиям теоремы. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено (5). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $N > \varepsilon$ существует функция $v \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n) \cap C^\infty(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющая условиям

$$|\text{grad } v(z)| \leq C_1(1 + |z|)^{(\rho N)/\varepsilon} \ln^n(e + |z|), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где постоянная C_1 зависит лишь от σ , ρ , и

$$0 \leq v(z) - u(z) \leq C_2(1 + |z|)^\varepsilon \ln(e + |z|), \quad z \notin E, \quad (11)$$

где C_2 зависит лишь от ε , N . Исключительное множество E может быть покрыто системой шаров $D(z_j, t_j)$ так, что

$$\sum_{R/2 \leq |z_j| < 2R} t_j^{2n-1} = O(R^{\rho+2n-2-N}).$$

В частности, если $N > \rho + 2n - 1$, то ряд $\sum t_j^{2n-1}$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем положительное число a и, положив $\varphi(x) = e^{ax}$, определим функцию $r = r(z)$ из уравнения (1). Далее определим функции $\tilde{u}$ и v , как в доказательстве теоремы 2. Поскольку в данном случае $\varphi'(x) = a\varphi(x)$, то в силу соотношения (8) в M -нормальных по мере μ_u точках z имеет место оценка

$$v(z) - u(z) \leq 2 + \frac{a}{r(z)^a} \ln(2d_n M e(1 + |z|)).$$

Заметим, что в M -нормальных точках левая часть (1) не превосходит $r M c_n d_n$, следовательно, $r(z)$ не меньше, чем $(M c_n d_n / a)^{-1/(a+1)}$. Полагая $M = (1 + |z|)^N$, $a = \varepsilon / (N - \varepsilon)$ и обозначая через E множество точек z , не являющихся $(1 + |z|)^N$ -нормальными по мере μ_u , получим, что вне множества E выполняется соотношение (11). Оценка исключительного множества E проводится так же, как в доказательстве теоремы 2. Оценим $|\operatorname{grad} v|$. Поскольку

$$\tilde{u}(z) = \int u(w) \beta \left(\frac{|z - w|}{r(z)} \right) r(z)^{-2n} d\lambda(w),$$

то, непосредственно вычисляя, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(z)}{\partial z_j} &= \int u(w) \beta' \left(\frac{|z - w|}{r(z)} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} |z - w| r(z)^{-2n-1} d\lambda(w) \\ &\quad - \int u(w) \alpha \left(\frac{|z - w|}{r(z)} \right) r(z)^{-2n-1} \frac{\partial r}{\partial z_j} d\lambda(w), \end{aligned}$$

где $\alpha(t) = \beta'(t)t + 2n\beta(t)$. В силу соотношения (2) отсюда получим

$$\frac{\partial v}{\partial z_j} = \int u(w) \beta' \left(\frac{|z - w|}{r(z)} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} |z - w| r(z)^{-2n-1} d\lambda(w).$$

Если через B_0 обозначим $\max |\beta'(t)|$, то

$$|\operatorname{grad} v| \leq B_0 n r(z)^{-2n-1} \int_{D(z, r(z))} |u(z)| d\lambda(z). \quad (12)$$

Для оценки интеграла (12) воспользуемся следующей теоремой 1 из работы [3].

ТЕОРЕМА А. Пусть выполнено (5). Тогда существуют постоянные A и B , зависящие лишь от σ и ρ , такие, что

$$\int_{D^p(z, R)} |u(w)| d\lambda(w) \leq A B^\rho (1 + T)^\rho R^{2n} \ln^n \frac{1 + T}{R_0} e,$$

где $T = |z| + R$, $R_0 = \min(1, R)$, $D^n(z, R)$ — поликруг $D(z, R) \times \cdots \times D(z, R)$.

По теореме А имеем оценку

$$|\operatorname{grad} v| \leq \frac{C(1 + |z|)^\rho \ln^n(|z| + e)}{r(z)}. \quad (13)$$

В силу монотонности функции $t^{-2n+2}\mu_u(z, t)$ в условиях теоремы А имеем

$$\frac{\mu_u(z, t)}{t^{2n-2}} \leq \frac{\mu_u(z, 1+|z|)}{(1+|z|)^{2n-2}} \leq C(\sigma, \rho)(1+|z|)^\rho, \quad 0 < t < 1+|z|.$$

Следовательно, по определению функции $r(z)$ выполнена оценка

$$\frac{1}{r(z)} \leq C(\sigma, \rho, a)(1+|z|)^{\rho/a}.$$

Подставив эту оценку в (13), получим требуемое неравенство.

Доказанная теорема 3 вместе с теоремой А позволяет получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено (5). Тогда для любого $\alpha > \frac{4}{5}\rho$ существует целая функция $f(z)$, которая удовлетворяет соотношению

$$|u(z) - \ln |f(z)|| \leq C(1+|z|)^\alpha, \quad z \notin E.$$

Исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $D(z_j, t_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \leq R} t_j^{2n-1} = o(R^{2n-1}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [2] Садуллаев А. Комплексная теория потенциала и ее применения. Дисс. . . к. ф.-м. н. Ташкент: ИМ АН УзССР, 1982.
- [3] Юлмухаметов Р. С. Асимптотика плюрисубгармонических функций. Препринт. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1987.
- [4] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
- [5] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Башкирский государственный университет

Поступило
05.09.95