Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Арабаджян, О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 323–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 08:30:02

УДК 517

О КОНСЕРВАТИВНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ

Л. Г. Арабаджян

Работа посвящена вопросам разрешимости интегрального уравнения

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty T_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)f(t)dt,$$

$x \in \mathbb{R}$, где f – искомая функция из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, а g, T_1, T_2 – данные функции, удовлетворяющие условиям:

$$g \in L_1(\mathbb{R}), \quad 0 \leq T_j \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^\infty T_j(t)dt = 1, \quad j = 1, 2.$$

Наибольшее внимание уделено вопросам нетривиальной разрешимости однородного уравнения

$$s(x) = \int_0^\infty T_1(x-t)s(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)s(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Библиография: 11 названий.

Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости интегрального уравнения

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty T_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где f – искомая функция из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, а g, T_1, T_2 – данные функции, удовлетворяющие условиям

$$g \in L_1(\mathbb{R}), \quad (2)$$

$$0 \leq T_j \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mu_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^\infty T_j(t)dt = 1, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

и соответствующего однородного уравнения

$$s(x) = \int_0^\infty T_1(x-t)s(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)s(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Излучения и ядра, удовлетворяющие условиям (3), и соответствующие интегральные операторы и уравнения будем называть *консервативными*.

1. Однородное уравнение. Рассмотрим консервативное уравнение (4), (3). Введем функции $s^\pm(x) = s(\pm x)$, $x > 0$. Тогда это уравнение можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} s^+(x) &= \int_0^\infty K_1(x-t)s^+(t)dt + \int_0^\infty K_1^0(x+t)s^-(t)dt, \\ s^-(x) &= \int_0^\infty K_2^0(x+t)s^+(t)dt + \int_0^\infty K_2(x-t)s^-(t)dt, \end{aligned} \quad x > 0, \quad (5)$$

где через K_j и K_j^0 , $j = 1, 2$, обозначены функции

$$\begin{aligned} K_1(x) &= T_1(x), \quad K_2(x) = T_2(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ K_1^0(x) &= T_2(x), \quad K_2^0(x) = T_1(-x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, \infty). \end{aligned}$$

Пусть E^+ – одно из функциональных пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $p \geq 1$, $M(\mathbb{R}^+)$, $C(\mathbb{R}^+)$. Введем в рассмотрение классы Ω и Ω^0 следующих интегральных операторов, действующих в E^+ : $\mathcal{K} \in \Omega$ и $\mathcal{K}^0 \in \Omega^0$, если

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}f)(x) &= \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad K \in L_1(\mathbb{R}), \\ (\mathcal{K}^0f)(x) &= \int_0^\infty K^0(x+t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad K^0 \in L_1(\mathbb{R}^+), \end{aligned}$$

а также подклассы $\Omega^\pm$ класса Ω : $\mathcal{K}^\pm \in \Omega^\pm$, если

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^+f)(x) &= \int_0^x K^+(x-t)f(t)dt, \\ (\mathcal{K}^-f)(x) &= \int_x^\infty K^-(t-x)f(t)dt, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad K^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Рассмотрим операторные матрицы $\widetilde{\mathcal{J}}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}$ вида

$$\widetilde{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_1^0 \\ \mathcal{K}_2^0 & \mathcal{K}_2 \end{bmatrix},$$

где I – единичный оператор в E^+ , а $\mathcal{K}_j \in \Omega$, $\mathcal{K}_j^0 \in \Omega^0$, $j = 1, 2$. В работах [1], [2] изучены вопросы разложения (факторизации) оператора $\widetilde{\mathcal{J}} - \widetilde{\mathcal{K}}$ в виде произведения матричных операторов с компонентами из $\Omega^\pm$ и Ω^0 .

Пусть функции $V_j^\pm$ и U_j^0 являются соответственными ядрами интегральных операторов $\mathcal{V}_j^\pm$ и $\mathcal{U}_j^0$ ($j = 1, 2$), а $\widetilde{\mathcal{V}}^\pm$ и $\widetilde{\mathcal{U}}^0$ – операторные матрицы вида

$$\widetilde{\mathcal{V}}^\pm = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1^\pm & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_2^\pm \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{U}}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_1^0 \\ \mathcal{U}_2^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно результатам указанных работ искомые ядра $V_j^\pm$ и U_j^0 компонент в разложении

$$\widetilde{\mathcal{J}} - \widetilde{\mathcal{K}} = (\widetilde{\mathcal{J}} - \widetilde{\mathcal{V}}^- - \widetilde{\mathcal{U}}^0)(\widetilde{\mathcal{J}} - \widetilde{\mathcal{V}}^+) \quad (6)$$

должны быть определены из нелинейных уравнений Енгибаряна

$$V_j^\pm(x) = K_j^\pm(\pm x) + \int_0^\infty V_j^\mp(t) V_j^\pm(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

и ассоциируемых с ними линейных уравнений

$$U_j^0(x) = K_j^0(x) + \int_0^\infty V_{3-j}^+(t) U_j^0(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Вопросы разрешимости системы (7) при $j = 1, 2$ всесторонне изучены в работах [3], [4]. Они разрешимы, в частности, в консервативном случае

$$0 \leq K_j \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^\infty K_j(t) dt = 1, \quad j = 1, 2,$$

причем в этом случае их решения (V_j^+, V_j^-) обладают свойствами:

$$0 \leq V_j^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \gamma_j^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty V_j^\pm(t) dt \leq 1, \\ (1 - \gamma_j^-)(1 - \gamma_j^+) = 0, \quad j = 1, 2.$$

В симметрическом случае $K_1(-x) = K_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ (или $K_2(-x) = K_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$), имеют место равенства $\gamma_1^\pm = 1$ (или соответственно $\gamma_2^\pm = 1$). В случае конечности интегралов

$$\nu_j^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t K_j(\pm t) dt$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \nu_j > 0 &\iff \gamma_j^+ = 1, \quad \gamma_j^- < 1; \\ \nu_j < 0 &\iff \gamma_j^+ < 1, \quad \gamma_j^- = 1; \\ \nu_j = 0 &\iff \gamma_j^\pm = 1, \end{aligned}$$

где

$$\nu_j \stackrel{\text{def}}{=} \nu_j^+ - \nu_j^- = \int_{-\infty}^\infty t K_j(t) dt, \quad j = 1 \text{ либо } j = 2$$

(см. [4], [5]).

Подставляя найденные из (7) функции $V_j^\pm$, $j = 1, 2$, в уравнения (8), относительно U_j^0 получаем линейные интегральные уравнения с ядрами V_j^+ , причем либо $\gamma_j^+ < 1$, либо $\gamma_j^+ = 1$. Разрешимость в $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ последних уравнений доказана в [4] (см. также [3], [5]).

Учитывая связь между функциями K_j и T_j из (7) и (8), получаем системы

$$V_1^\pm(x) = T_1(\pm x) + \int_0^\infty V_1^\mp(t) V_1^\pm(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

$$V_2^\pm(x) = T_2(\mp x) + \int_0^\infty V_2^\mp(t) V_2^\pm(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (10)$$

а также уравнения

$$U_1^0(x) = T_2(x) + \int_0^\infty V_2^+(t) U_1^0(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

$$U_2^0(x) = T_1(-x) + \int_0^\infty V_1^+(t) U_2^0(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (12)$$

Сравнивая второе уравнение системы (10) с уравнением (11), находим решение последнего уравнения: $U_1^0(x) \equiv V_2^-(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Оно, очевидно, единственно в классе $L_1(\mathbb{R}^+)$, если $\gamma_1^+ < 1$. В случае $\gamma_1^+ = 1$ единственность указанного решения следует из результатов работ [1], [4] (см., например, [4, лемма 3.3]). Аналогично получаем единственное решение $U_2^0(x) \equiv V_1^-(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, уравнения (12).

Итак, использование факторизации (6) дает возможность сводить изучение системы (5) и, следовательно, уравнения (4) к изучению следующих двух систем интегральных уравнений более простой структуры

$$\begin{aligned} \varphi^+(x) &= \int_x^\infty V_1^-(t-x) \varphi^+(t) dt + \int_0^\infty V_2^-(t+x) \varphi^-(t) dt, \\ \varphi^-(x) &= \int_0^\infty V_1^-(t+x) \varphi^+(t) dt + \int_x^\infty V_2^-(t-x) \varphi^-(t) dt, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} s^+(x) &= \varphi^+(x) + \int_0^x V_1^+(x-t) s^+(t) dt, \\ s^-(x) &= \varphi^-(x) + \int_0^x V_2^+(x-t) s^-(t) dt, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (14)$$

где функции $V_j^\pm$, $j = 1, 2$, определяются из систем (9) и (10) соответственно.

Учитывая связь между функциями K_j и T_j для консервативных ядер T_j , удовлетворяющих одному из дополнительных условий:

$$\text{а) } T_j(-x) = T_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2;$$

$$\text{б) } \omega_j^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t T_j(t) dt < +\infty, \quad \omega_j = \omega_j^+ - \omega_j^- = \int_{-\infty}^\infty t T_j(t) dt, \quad \omega_1 \leq 0, \quad \omega_2 \geq 0,$$

получаем $\gamma_j^- = 1$, $\gamma_j^+ \leq 1$, $j = 1, 2$. Оказывается, что при выполнении равенств $\gamma_j^- = 1$, $j = 1, 2$ (в частности, при условии а) или б)), система (13) обладает решением, явно и просто выраженным через ядра V_j^- , $j = 1, 2$. А именно, непосредственной подстановкой в систему (13) проверяется, что пара функций

$$\varphi^+(x) = c \int_x^\infty V_2^-(t) dt, \quad \varphi^-(x) = c \int_x^\infty V_1^-(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad c = \text{const},$$

удовлетворяет ей. В случае нормировки $\varphi^+(0) = \varphi^-(0) = 1$ имеем

$$\varphi^+(x) = \int_x^\infty V_2^-(t) dt, \quad \varphi^-(x) = \int_x^\infty V_1^-(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Это решение системы (13) подставляем в (14) и решаем эту систему уравнений, которая в рассматриваемом случае распадается на отдельные уравнения (о разрешимости уравнений и систем уравнений восстановления см., например, [4]–[6]). В результате последовательного решения систем (13) и (14) получаем пару функций (s^+, s^-) , определяемых на $\mathbb{R}^+$, которые в совокупности дают решение s уравнения (4). Таким путем получаем достаточное условие для нетривиальной разрешимости однородного консервативного уравнения (4), (3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть в однородном уравнении (4) ядра T_j ($j = 1, 2$) удовлетворяют условиям консервативности (3) и одному из вышеуказанных условий а) или б). Тогда это уравнение обладает нетривиальным, неотрицательным решением s из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Если в условиях а) и б) имеют место строгие неравенства, то указанное решение s суммируемо и ограничено на всей оси $\mathbb{R}$: $s \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в уравнении (4) $T_1 = T_2$ на $\mathbb{R}$, то

$$V_2^-(x) = V_1^+(x), \quad V_1^-(x) = V_2^+(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В этом случае система (14) имеет вид

$$\begin{aligned} s^+(x) &= \int_x^\infty V_1^+(t) dt + \int_0^x V_1^+(x-t)s^+(t) dt, \\ s^-(x) &= \int_x^\infty V_2^+(t) dt + \int_0^x V_2^+(x-t)s^-(t) dt, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Решением последней системы является пара функций $s^\pm(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^+$. Поэтому функция $s(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, будет решением уравнения (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях теоремы $\omega_1 < 0$, $\omega_2 = 0$, то $s^+ \in M(\mathbb{R}^+)$. При дополнительном условии

$$\int_0^\infty t^2 T_2(-t) dt < +\infty$$

функция s^+ принадлежит классу $M(\mathbb{R}^+) \cap L_1(\mathbb{R}^+)$. Аналогичные утверждения справедливы в случае $\omega_1 = 0$, $\omega_2 < 0$ и

$$\int_0^\infty t^2 T_1(-t) dt < +\infty.$$

2. Неоднородное консервативное уравнение. Применение факторизации (6) к неоднородному уравнению (1) порождает следующие две системы интегральных уравнений, последовательное решение которых дает решение f исходного уравнения (1):

$$\begin{aligned}\psi^+(x) &= g^+(x) + \int_x^\infty V_1^-(t-x)\psi^+(t) dt + \int_0^\infty V_2^-(t+x)\psi^-(t) dt, \\ \psi^-(x) &= g^-(x) + \int_0^\infty V_1^-(t+x)\psi^+(t) dt + \int_x^\infty V_2^-(t-x)\psi^-(t) dt,\end{aligned}\quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned}f^+(x) &= \psi^+(x) + \int_0^x V_1^+(x-t)f^+(t) dt, \\ f^-(x) &= \psi^-(x) + \int_0^x V_2^+(x-t)f^-(t) dt,\end{aligned}\quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

(Здесь $f^\pm(x) = f(\pm x)$, $g^\pm(x) = g(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.) Вначале изучим вопросы разрешимости системы (15).

Рассмотрим итерации

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^+(x) &= g^+(x) + \int_x^\infty V_1^-(t-x)\psi_n^+(t) dt + \int_0^\infty V_2^-(t+x)\psi_n^-(t) dt, \\ \psi_{n+1}^-(x) &= g^-(x) + \int_0^\infty V_1^-(t+x)\psi_n^+(t) dt + \int_x^\infty V_2^-(t-x)\psi_n^-(t) dt, \\ \psi_0^\pm(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (17)$$

Предположим, что функция g суммируема на $\mathbb{R}$ и, для определенности, предположим, что $g \geq 0$. Тогда $0 \leq g^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \psi_n^\pm \uparrow$ по n на $\mathbb{R}^+$, $\psi_n^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Интегрируя равенства (16) от 0 до ∞ , получаем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_{n+1}^+(x) dx &= \int_0^\infty g(x) dx + \int_0^\infty V_1^-(t) dt \int_t^\infty \psi_n^+(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty V_2^-(t) dt \int_0^t \psi_n^-(x) dx, \\ \int_0^\infty \psi_{n+1}^-(x) dx &= \int_0^\infty g^+(x) dx + \int_0^\infty V_1^-(t) dt \int_0^t \psi_n^+(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty V_2^-(t) dt \int_t^\infty \psi_n^-(x) dx,\end{aligned}$$

сложение которых дает

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \psi_{n+1}^+(x) dx + \int_0^\infty \psi_{n+1}^-(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(x) dx + \gamma_1^- \int_0^\infty \psi_n^+(x) dx + \gamma_2^- \int_0^\infty \psi_n^-(x) dx,\end{aligned}\quad (18)$$

где

$$\gamma_j^- = \int_0^\infty V_j^-(t) dt, \quad j = 1, 2.$$

ЛЕММА 1. Если в системе (15) $0 \leq g^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и $\gamma_j^- < 1$, $j = 1, 2$, то эта система обладает единственным в $L_1(\mathbb{R}^+) \times L_1(\mathbb{R}^+)$ решением (ψ^+, ψ^-) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma^- = \max(\gamma_1^-, \gamma_2^-)$. Соотношения (18) позволяют индукцией по n доказать справедливость оценок

$$\int_0^\infty \psi_n^\pm(x) dx \leq (1 - \gamma^-)^{-1} \int_{-\infty}^\infty g(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу теоремы Леви (см., например, [7, с. 303]) в этом случае существуют функции $\psi^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что $\psi_n^\pm \rightarrow \psi^\pm$ почти везде на $\mathbb{R}^+$. Совершая в (17) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, в силу теоремы Лебега получаем равенства (15) относительно предельных функций $\psi^\pm$.

Отметим также, что для найденных функций $\psi^\pm$ справедливы оценки

$$\|\psi^\pm\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} \leq (1 - \gamma^-)^{-1} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

ЛЕММА 2. Пусть в системе (15) $0 \leq g^\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и $\gamma_1^- < 1$, $j = 1, 2$. Тогда эта система имеет решение (ψ^+, ψ^-) , причем $\psi^+ \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\psi^- \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Если же $\gamma_1^- = 1$ и $\gamma_2^- < 1$, то $\psi^- \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\psi^+ \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лишь первую часть леммы.

Как было отмечено выше, при $g^\pm \geq 0$ итерации $\psi_n^\pm$ монотонно возрастают по n на $\mathbb{R}^+$. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ из соотношений (18) следует

$$\int_0^\infty \psi_{n+1}^+(t) dt \leq \int_{-\infty}^\infty g(t) dt + \gamma_1^- \int_0^\infty \psi_n^+(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

На основании этих соотношений индукцией по n доказываем справедливость оценок

$$\|\psi_n^+\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} \leq (1 - \gamma^-)^{-1} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно теореме Леви существует функция ψ^+ , являющаяся пределом почти везде на $\mathbb{R}^+$ итераций ψ_n^+ :

$$0 \leq \tilde{\psi}^+ \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \psi_n^+ \rightarrow \tilde{\psi}^+, \quad \psi_n^+ \leq \tilde{\psi}^+ \text{ п.в. на } \mathbb{R}^+.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$0 \leq \int_0^\infty V_1^-(t+x) \tilde{\psi}^+(t) dt \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Теперь рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\tilde{\psi}^-(x) = \left[g(x) + \int_0^\infty V_1^-(t+x) \tilde{\psi}^+(t) dt \right] + \int_x^\infty V_2^-(t+x) \tilde{\psi}^-(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

относительно искомой функции $\tilde{\psi}^-$. (Здесь через $\tilde{\psi}^+$ обозначен предел почти всюду на $\mathbb{R}^+$ итераций ψ_n^+ .) В силу результатов работ [4], [5] это уравнение обладает неотрицательным решением $\tilde{\psi}^-$ из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$, причем

$$\int_0^x \tilde{\psi}^-(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Более того, итерации

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n+1}^-(x) &= \left[g^-(x) + \int_0^\infty V_1^-(t+x) \tilde{\psi}^+(t) dt \right] + \int_x^\infty V_2^-(t-x) \tilde{\psi}_n^-(t) dt, \\ \tilde{\psi}_0^-(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

монотонно возрастают почти везде на $\mathbb{R}^+$ к функции $\tilde{\psi}^-$. Так что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{\psi}_n^\pm \leq \psi^\pm$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Поэтому существует пара (ψ^+, ψ^-) , для которой при $n \rightarrow \infty$ $\psi_n^\pm \uparrow \psi^\pm$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Очевидно, что почти всюду на $\mathbb{R}^+$, $\psi^+ = \tilde{\psi}^+$, $\psi^- \leq \tilde{\psi}^-$, причем $\psi^+ \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\psi^- \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ и

$$\int_0^x \psi^-(t) dt = o(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Совершая в соотношениях (17) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем равенства (15) относительно найденных предельных функций $\psi^\pm$. (О законности предельного перехода см., например, доказательство леммы 1 из [5].)

На основании лемм 1 и 2 и результатов работ [4], [5] получаем следующую теорему о разрешимости уравнения (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (1) выполняются условия (2) и (3). Пусть, кроме того, существуют $\omega_j^\pm$, $j = 1, 2$, и имеет место одно из следующих условий:

- а') $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$;
- б') $\omega_1 > 0$, $\omega_2 \geq 0$;
- в') $\omega_1 \leq 0$, $\omega_2 < 0$.

Тогда это уравнение обладает локально интегрируемым на $\mathbb{R}$ решением f .

Из теоремы 2 как частный случай получаем условия разрешимости неоднородного консервативного уравнения типа свертки на полной оси (см. [8], [9], а также теорему Карлина [10]). Действительно, в случае $T_1 = T_2 = T$ из теоремы 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ. Если в уравнении

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^\infty T(x-t)f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

ядро T удовлетворяет условиям консервативности (3), причем

$$\omega = \int_{-\infty}^\infty tT(t) dt \neq 0,$$

а $g \in L_1(\mathbb{R})$, то это уравнение обладает решением f из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно подробно изучить асимптотическое поведение построенного посредством факторизации (6) решения f уравнения (1)–(3) в $\pm\infty$ в зависимости от знаков величин ω_j , $j = 1, 2$, как это сделано для уравнений Винера–Хопфа в работах [4], [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы 2 остается в силе, если условия б') и в') заменить условиями

$$\text{б'')} \quad \omega_1 > 0, T_2(-x) = T_2(x), x \in \mathbb{R}, \text{ и}$$

$$\text{в'')} \quad \omega_2 > 0, T_1(-x) = T_1(x), x \in \mathbb{R},$$

соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На основании результатов работы [11] теорему 2 можно доказать и в том случае, когда одна или несколько из величин $\omega_j^\pm$, $j = 1, 2$, бесконечны, соответствующим образом изменив остальные условия.

В заключение автор выражает благодарность профессору Н.Б. Енгибаряну за обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1442–1452.
- [2] Арутюнян А. А. О факторизации одного интегрального оператора // Дифференциальные и интегральные уравнения. Ереван, 1979. С. 43–48.
- [3] Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97. № 5. С. 35–58.
- [4] Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–244.
- [5] Арабаджян Л. Г. О консервативном уравнении Винера–Хопфа // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1981. Т. 16. № 1. С. 65–80.
- [6] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
- [7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
- [8] Арабаджян Л. Г. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9.
- [9] Karlin S. On the renewal equation // Pacific J. Math. 1955. V. 5. № 2. P. 229–257.
- [10] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [11] Арабаджян Л. Г. О факторизации консервативных интегральных операторов Винера–Хопфа // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 3–10.

Бюраканская астрофизическая обсерватория НАН Армении

Поступило
14.12.95