Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Арестов, В. Ю. Раевская, Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 332–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 04:50:04

УДК 517.518.86

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ

В. В. Арестов, В. Ю. Раевская

Пусть $\mathcal{P}_n^0(h)$ есть множество алгебраических многочленов порядка n с действительными коэффициентами с нулевым средним значением (с весом h) на отрезке $[-1, 1]$: $\int_{-1}^1 h(x)p_n(x) dx = 0$; здесь h – функция, суммируемая, неотрицательная, отличная от нуля на множестве положительной меры на $[-1, 1]$. Изучается задача о наименьшем возможном значении $i_n(h) = \inf\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n^0(h)\}$ меры $\mu(p_n) = \text{mes}\{x \in [-1, 1] : p_n(x) \geq 0\}$ множества точек отрезка, в которых многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n^0(h)$ является неотрицательным. В работе найдено точное значение величины $i_n(h)$ при определенных ограничениях на вес h . Этим ограничениям удовлетворяет, в частности, вес Якоби $h^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ при условии $-1 < \alpha, \beta \leq 0$.

Библиография: 9 названий.

0. Введение. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов порядка n с действительными коэффициентами, а $\mathcal{P}_n^0 = \mathcal{P}_n^0(h)$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n$ с нулевым средним веса h значением на отрезке $I = [-1, 1]$:

$$\mathcal{P}_n^0(h) = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \int_{-1}^1 h(x)p_n(x) dx = 0 \right\};$$

здесь h – суммируемая и неотрицательная на I функция, отличная от 0 на множестве положительной меры из I . Для многочлена p_n введем множество $E(p_n) = \{x \in I : p_n(x) \geq 0\}$ точек отрезка $I = [-1, 1]$, в которых многочлен p_n неотрицательный, и рассмотрим меру Лебега

$$\mu(p_n) = \text{mes } E(p_n) = \text{mes}\{x \in I : p_n(x) \geq 0\} \quad (1)$$

этого множества. При каждом натуральном n определим величину

$$i_n = i_n(h) = \inf\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n^0(h)\}. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России, грант J1T100.

В данной работе будет найдено точное значение величины (2) при определенных ограничениях на вес h . Для веса $h \equiv 1$ задачу (2) изучал А. Г. Бабенко и показал [1, теорема 1.2], что

$$\frac{1}{\sqrt{2}n^2} \leq i_n(1) \leq \frac{12}{n^2}.$$

Оценку сверху он получил с помощью многочлена

$$R_{2k-1}(x) = \frac{P_k^2(x)}{x - x_k}, \quad (3)$$

где P_k – многочлен Лежандра порядка k , а x_k – его наибольший нуль. Как сказано в работе А. Г. Бабенко [1, с. 28], конструкция многочлена (3) заимствована им из работы С. Н. Бернштейна [2, с. 201], где, в частности, отмечено, что многочлен (3) имеет нулевое среднее значение на $[-1, 1]$. Ниже мы покажем, что и в более общей ситуации экстремальный многочлен задачи (2) имеет аналогичный вид.

Ранее Бабенко [3] вычислил аналог

$$i_n^* = \min_{t_n \in \mathcal{T}_n^0} \text{mes}\{x \in [0, 2\pi] : t_n(x) \geq 0\} \quad (4)$$

величины $i_n(1)$ во множестве $\mathcal{T}_n^0$ тригонометрических полиномов t_n порядка n с нулевым средним значением на периоде:

$$\int_0^{2\pi} t_n(x) dx = 0;$$

именно, он показал, что

$$i_n^* = \frac{2\pi}{n+1}.$$

Последняя задача возникла в работе Л. В. Тайкова [4] при исследовании точной константы в неравенстве между нормами тригонометрического полинома в пространствах $C[0, 2\pi]$ и $L(0, 2\pi)$. Как видно из работы Бабенко [5], подобные задачи естественным образом появляются при доказательстве точных неравенств Джексона для наилучших среднеквадратических приближений периодических функций тригонометрическими полиномами. Задачи, близкие (2), (4), возникают также в других разделах математики и, в частности, при получении оценок плотности упаковок множеств (см. работы [6], [7] и приведенную там библиографию).

1. Вспомогательные утверждения. Нетрудно убедиться, что экстремальный многочлен задачи (2), на котором достигается нижняя грань, существует. Действительно, у многочленов

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (5)$$

из множества $\mathcal{P}_n^0$ коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ можно выбирать произвольно, после чего коэффициент a_0 однозначно определяется из условия ортогональности

$$\int_{-1}^1 h(x) p_n(x) dx = 0.$$

Функция (1) однородна по коэффициентам многочлена p_n (точнее, она не изменяется при умножении многочлена на положительную константу), поэтому в (2) можно ограничиться многочленами (5) из $\mathcal{P}_n^0$ с условием

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = 1. \quad (6)$$

Таким образом, задача (2) является задачей минимизации непрерывной функции коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ многочлена (5) на компактном множестве (6), и следовательно, нижняя грань в (2) достигается, т.е. в (2) существует экстремальный многочлен.

ЛЕММА 1. Если для многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^0$ множество

$$e(p_n) = \{x \in I : p_n(x) > 0\}$$

несвязно, то p_n не является экстремальным, т.е. $\mu(p_n) > i_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p_n есть многочлен из множества $\mathcal{P}_n^0$, для которого множество $e(p_n) = \{x \in I : p_n(x) > 0\}$ несвязно. Докажем, что тогда $\mu(p_n) > i_n$. Множество $e(p_n)$ есть объединение двух или более непересекающихся промежутков. Отсюда следует, что p_n можно представить в виде

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)p_{n-2}(x),$$

где $x_1 \leq x_2$ — нули многочлена p_n из интервала $(-1, 1)$, а p_{n-2} — многочлен порядка $n-2$ такой, что существуют действительные числа a, b со свойствами $-1 \leq a < x_1 \leq x_2 < b \leq 1$ и $p_{n-2}(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$ (при этом, возможно, что $x_1 = x_2$ есть кратный корень p_n).

Для вещественных чисел ε, δ определим многочлен

$$p_n^{\varepsilon, \delta}(x) = (x - (x_1 + \varepsilon))(x - (x_2 + \delta))p_{n-2}(x).$$

Потребуем, чтобы он принадлежал множеству $\mathcal{P}_n^0(h)$; это налагает на ε и δ условие

$$\varepsilon \int_{-1}^1 h(x)(x - x_2)p_{n-2}(x) dx + \delta \int_{-1}^1 h(x)(x - x_1)p_{n-2}(x) dx - \varepsilon\delta \int_{-1}^1 h(x)p_{n-2}(x) dx = 0.$$

Обозначим коэффициенты при ε, δ и $-\varepsilon\delta$ последнего соотношения через A, B и C соответственно; в результате оно примет вид

$$\varepsilon A + \delta B + \varepsilon\delta C = 0. \quad (7)$$

В зависимости от коэффициентов A, B, C уравнение (7) задает в плоскости ε, δ гиперболу ($ABC \neq 0$), пару прямых ($C \neq 0, AB = 0$), одну прямую ($C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$) или всю плоскость ($A^2 + B^2 + C^2 = 0$). Ясно, что точка $(0, 0)$ принадлежит кривой, заданной уравнением (7). Убедимся, что при определенных условиях на коэффициенты A, B, C (т.е. на многочлен p_n) в любой окрестности точки $(0, 0)$ в плоскости ε, δ найдется точка, принадлежащая кривой и удовлетворяющая условию $\delta > \varepsilon$. Очевидно, что в случае $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ и в случае $C \neq 0, AB = 0$ такая точка найдется. В случае $C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ для существования такой точки необходимо и достаточно, чтобы

прямая (7) не совпадала с прямой $\varepsilon = \delta$, т.е. чтобы $A + B \neq 0$. Условие $A + B \neq 0$ обеспечивает существование нужной точки и в случае $ABC \neq 0$, ибо если $A + B \neq 0$, то касательная к гиперболе (7) в точке $(0, 0)$ не совпадает с прямой $\varepsilon = \delta$. Таким образом, если многочлен p_n таков, что $A + B \neq 0$, то найдется пара чисел ε и δ , удовлетворяющая условиям $\varepsilon < \delta$, (7) и условию $a < x_1 + \varepsilon < x_2 + \delta < b$. Тогда имеем $p_n^{\varepsilon, \delta} \in \mathcal{P}_n^0(h)$, $\mu(p_n^{\varepsilon, \delta}) = \mu(p_n) + \varepsilon - \delta$, а следовательно, $\mu(p_n^{\varepsilon, \delta}) < \mu(p_n)$ и тем более $\mu(p_n) > i_n$.

Предположим теперь, что $A + B = 0$. Это условие означает, что для многочлена p_n (а точнее, для многочлена p_{n-2}) имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 h(x)(x - x_2)p_{n-2}(x) dx + \int_{-1}^1 h(x)(x - x_1)p_{n-2}(x) dx = 0.$$

или, что то же самое, равенство

$$\int_{-1}^1 h(x) \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) p_{n-2}(x) dx = 0.$$

Введем многочлен

$$p_n^c(x) = p_2(x)p_{n-2}(x),$$

где

$$p_2(x) = p_2^c(x) = (x - x_1)(x - x_2) + c \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right),$$

а c – вещественный параметр. При любом значении параметра c многочлен p_n^c принадлежит множеству $\mathcal{P}_n^0(h)$. Дискриминант D многочлена p_2^c есть неотрицательное вещественное число, а именно, $4D = c^2 + (x_2 - x_1)^2$. Следовательно, p_2^c имеет два вещественных корня x_1^c и x_2^c , расстояние между которыми равно $\sqrt{c^2 + (x_2 - x_1)^2}$. Эти корни непрерывно зависят от параметра c и при $c = 0$ совпадают с точками x_1, x_2 . Поэтому для достаточно малых (отличных от нуля) значений c корни x_1^c и x_2^c будут лежать на интервале (a, b) . При таком предположении имеем

$$\mu(p_n) - \mu(p_n^c) = \sqrt{c^2 + (x_2 - x_1)^2} - (x_2 - x_1) > 0,$$

а значит, $\mu(p_n) > \mu(p_n^c)$. Лемма доказана полностью.

Согласно только что доказанной лемме в (2) можно ограничиться многочленами $p_n \in \mathcal{P}_n^0(h)$, для которых множество $e(p_n) = \{x \in [-1, 1] : p_n(x) > 0\}$ есть (один) промежуток; обозначим совокупность многочленов с таким свойством через $\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_n^*(h)$. Таким образом, справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *При любом натуральном n для произвольного суммируемого неотрицательного веса h имеет место равенство*

$$i_n(h) = \min\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n^*(h)\}.$$

Обозначим, далее, через $\mathcal{P}_n^1 = \mathcal{P}_n^1(h)$ множество многочленов $p_n \in \mathcal{P}_n^0(h)$, имеющих ровно одну переменную знака на интервале $(-1, 1)$. Для каждого натурального n определим величину

$$j_n = j_n(h) = \inf\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n^1(h)\}, \quad (8)$$

которая, как будет показано ниже, при определенных ограничениях на вес h совпадает с (2). Значение величины (8) и соответствующий экстремальный многочлен зависят, в частности, от четности параметра n .

Пусть U_k, V_k, W_k – многочлены k -й степени, $k \geq 1$, отличные от тождественного нуля (например, с единичным старшим коэффициентом), ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ всем многочленам степени меньшей k , соответственно с весами

$$h(x), \quad h(x)(1+x), \quad h(x)(1-x),$$

и пусть $-1 < u_1 < \dots < u_k < 1$, $-1 < v_1 < \dots < v_k < 1$, $-1 < w_1 < \dots < w_k < 1$ – нули этих многочленов.

ЛЕММА 2. Если число n нечетное, $n = 2k - 1$, $k \geq 1$, то

$$j_n(h) = \min\{1 - u_k, 1 + u_1\}, \quad (9)$$

и в зависимости от того, какая из двух величин в (9) является наименьшей, экстремальным в (8) будет соответственно один из многочленов

$$\frac{U_k^2(x)}{x - u_k}, \quad \frac{U_k^2(x)}{u_1 - x}. \quad (10)$$

Если число n четное, $n = 2k$, $k \geq 1$, то

$$j_n(h) = \min\{1 - v_k, 1 + w_1\}, \quad (11)$$

и в зависимости от того, какая из двух величин в (11) является наименьшей, экстремальным в (8) будет соответственно один из многочленов

$$\frac{(1+x)V_k^2(x)}{x - v_k}, \quad \frac{(1-x)W_k^2(x)}{w_1 - x}. \quad (12)$$

После того, как эта заметка была подготовлена к печати, вышли работы [6], [7]. Из результатов этих работ можно получить утверждения леммы 2. Однако, авторы сочли полезным привести независимое доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Вначале исследуем случай нечетного $n = 2k - 1$, $k \geq 1$. Для многочленов $p_n \in \mathcal{P}_n$ справедлива квадратурная формула типа Гаусса (см., например, [8, гл. 7, с. 95–101])

$$\int_{-1}^1 h(x)p_n(x)dx = \sum_{m=1}^k A_m p_n(u_m), \quad (13)$$

в которой $\{u_m\}_{m=1}^k$ – нули многочлена U_k , а $\{A_m\}_{m=1}^k$ – некоторые положительные коэффициенты (веса). В частности, для многочленов $p_n \in \mathcal{P}_n^0$ имеем

$$\sum_{m=1}^k A_m p_n(u_m) = \int_{-1}^1 h(x)p_n(x)dx = 0. \quad (14)$$

Если многочлен p_n не есть тождественный нуль, то все узлы u_m одновременно не могут лежать на интервале знакопостоянства p_n , ибо из (14) в силу положительности весов A_m следовало бы, что каждая из точек u_m является кратным нулем p_n , и значит, этот многочлен должен иметь порядок, не меньший $2k$, хотя в данном случае $n = 2k - 1$. Пусть к тому же многочлен p_n принадлежит $\mathcal{P}_n^1$ и x^* – точка перемены знака p_n . Тогда, если правее точки x^* этот многочлен неотрицательный (а следовательно, левее точки x^* он неположительный), то из только что проведенных рассуждений следует, что не может выполняться неравенство $x^* > u_k$, и значит, $x^* \leq u_k$, а потому $\mu(p_n) \geq 1 - u_k$. Если же многочлен p_n является неотрицательным левее точки x^* , то $x^* \geq u_1$ и $\mu(p_n) \geq 1 + u_1$. Таким образом, для любого многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^1$ имеет место неравенство

$$\mu(p_n) \geq \min\{1 - u_k, 1 + u_1\}. \quad (15)$$

Оба многочлена (10) имеют порядок $n = 2k - 1$ и обнуляют правую, а значит, и левую части (13), т.е. принадлежат множеству $\mathcal{P}_n^0$. Очевидно, что на одном из этих многочленов неравенство (15) обращается в равенство (в соответствии с тем, какая из величин правой части (15) является наименьшей). Из приведенных рассуждений нетрудно получить, что указанные многочлены с точностью до положительного коэффициента являются единственными экстремальными. Тем самым, утверждение леммы при $n = 2k - 1$ доказано.

Пусть теперь число n четное, $n = 2k$, $k \geq 1$. Воспользуемся квадратурной формулой Гаусса с одним наперед заданным узлом $v_0 = -1$ [8, гл. 9, с. 161–180]

$$\int_{-1}^1 h(x)p_n(x) dx = A_0 p_n(-1) + \sum_{m=1}^k A_m p_n(v_m)$$

и аналогичной формулой с фиксированным узлом $w_{m+1} = 1$

$$\int_{-1}^1 h(x)p_n(x) dx = B_{m+1} p_n(1) + \sum_{m=1}^k B_m p_n(w_m),$$

являющимися точными на полиномах p_n порядка n . В этих формулах $\{v_m\}_{m=1}^k$ – нули многочлена V_k , $\{w_m\}_{m=1}^k$ – нули многочлена W_k , а $\{A_m\}_{m=0}^k$ и $\{B_m\}_{m=1}^{k+1}$ – некоторые положительные веса. Для многочленов $p_n \in \mathcal{P}_n^0$ как следствие будем иметь

$$A_0 p_n(-1) + \sum_{m=1}^k A_m p_n(v_m) = 0, \quad (16)$$

$$B_{m+1} p_n(1) + \sum_{m=1}^k B_m p_n(w_m) = 0. \quad (17)$$

Пусть, в частности, многочлен p_n принадлежит множеству $\mathcal{P}_n^1$ и x^* – точка перемены знака p_n . Тогда если p_n неотрицательный правее точки x^* , то, как и выше, из соотношения (16) делаем вывод, что $x^* \leq v_k$ и $\mu(p_n) \geq 1 - v_k$. Если же p_n неотрицательный левее точки x^* , то аналогичным образом из соотношения (17) выводим, что $x^* \geq w_1$ и $\mu(p_n) \geq 1 + w_1$. Таким образом, в случае четного n для любого многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^1$ имеет место неравенство

$$\mu(p_n) \geq \min\{1 - v_k, 1 + w_1\}. \quad (18)$$

Многочлены (12) имеют порядок $n = 2k$ и обнуляют правые части формул (13), (14) и, значит, принадлежат множеству $\mathcal{P}_n^0$. На одном из этих многочленов неравенство (18) обращается в равенство (в соответствии с тем, какая из величин правой части (18) является наименьшей). Так же, как и для нечетного n , указанные многочлены с точностью до положительного коэффициента являются единственными экстремальными. Тем самым, утверждение леммы проверено и для n четного. Лемма доказана полностью.

2. Основной результат. В этом пункте будет дано решение задачи (2) при дополнительных ограничениях на вес h . Весу h , т.е. неотрицательной, измеримой, суммируемой на отрезке $[-1, 1]$ функции h , сопоставим функции

$$h^-(t) = h(t-1), \quad h^+(t) = h(1-t),$$

определенные при $t \in [0, 2]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что вес h обладает Θ -свойством, если функция h положительная, непрерывная на интервале $(-1, 1)$ и при любом $\theta \in (0, 1)$ функции

$$\frac{h^-(t)}{h^-(\theta t)}, \quad \frac{h^+(t)}{h^+(\theta t)} \quad (19)$$

не убывают по переменному t на интервале $(0, 2)$.

ТЕОРЕМА 2. Если вес h обладает Θ -свойством, то при любом натуральном n имеет место равенство

$$i_n(h) = j_n(h).$$

Напомним, что величина $j_n(h)$ была вычислена в лемме 2, где, в частности, указаны экстремальные многочлены задачи (8), а следовательно (в условиях теоремы), и задачи (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{P}_n^1(h) \subset \mathcal{P}_n^0(h)$, то $i_n(h) \leq j_n(h)$. Следовательно, для доказательства теоремы нужно проверить обратное неравенство. В силу теоремы 1 и определения (8) величины j_n достаточно убедиться, что для любого многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^*(h) \setminus \mathcal{P}_n^1(h)$ имеет место неравенство $\mu(p_n) \geq j_n(h)$. Пусть p_n именно такой многочлен и $x_1^* < x_2^*$ — точки перемены знака этого многочлена на $(-1, 1)$; при этом имеем $p_n(x) > 0$, если $x \in (x_1^*, x_2^*)$, и $p_n(x) \leq 0$, если $-1 \leq x \leq x_1^*$ или $x_2^* \leq x \leq 1$, и как следствие $\mu(p_n) = x_2^* - x_1^*$. Многочлен p_n удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^1 h(x)p_n(x) dx = 0,$$

поэтому существует точка $c \in [x_1^*, x_2^*]$ такая, что

$$\int_{-1}^c h(x)p_n(x) dx = 0, \quad \int_c^1 h(x)p_n(x) dx = 0. \quad (20)$$

Введем многочлен

$$p_n^c(x) = p_n\left(x \frac{c+1}{2} + \frac{c-1}{2}\right).$$

Этот многочлен лишь в одной точке

$$x^c = \frac{2}{c+1} \left(x_1^* - \frac{c-1}{2} \right)$$

интервала $(-1, 1)$ меняет знак, причем с минуса на плюс, и следовательно,

$$\mu(p_n^c) = 1 - x^c = \frac{2}{c+1} (c - x_1^*). \quad (21)$$

Определим, далее, на отрезке $[-1, 1]$ вес

$$h^c(x) = h \left(x \frac{c+1}{2} + \frac{c-1}{2} \right).$$

В силу выбора (20) точки c имеем

$$\int_{-1}^1 h^c(x) p_n^c(x) dx = \frac{2}{c+1} \int_{-1}^c h(x) p_n(x) dx = 0$$

и, таким образом, $p_n^c \in \mathcal{P}_n^1(h^c)$. Нас интересует знак интеграла

$$Z = \int_{-1}^1 h(x) p_n^c(x) dx.$$

Запишем этот интеграл в виде

$$Z = \int_{-1}^1 s(x) h^c(x) p_n^c(x) dx, \quad (22)$$

где

$$s(x) = \frac{h(x)}{h^c(x)}.$$

В силу Θ -свойства веса h функция s неотрицательна и не убывает на $(-1, 1)$; можно считать, что она обладает этим свойством на промежутке $[-1, 1)$. Нетрудно видеть, что функция

$$H(x) = \int_{-1}^x h^c(t) p_n^c(t) dt$$

удовлетворяет условиям

$$H(-1) = H(1) = 0, \quad (23)$$

не возрастает на отрезке $[-1, x^c]$ и не убывает на $[x^c, 1]$, а значит,

$$H(x) \leq 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (24)$$

Убедимся, что перечисленные свойства функций s и H обеспечивают неравенство

$$Z \geq 0. \quad (25)$$

Проверим этот факт вначале в предположении, что функция s ограничена (сверху) на $[-1, 1)$. Доопределим ее в точке $x = 1$ так, чтобы она осталась монотонной на отрезке $[-1, 1]$ и возьмем интеграл (22) по частям; в результате получим представление

$$Z = Z_1 - Z_2,$$

где

$$Z_1 = s(x)H(x)|_{-1}^1, \quad Z_2 = \int_{-1}^1 H(x) ds(x).$$

Свойство (23) функции H влечет $Z_1 = 0$. Далее, в силу монотонности функции s и свойства (24) функции H заключаем, что $Z_2 \leq 0$, а значит, имеет место неравенство (25). Допустим теперь, что функция s неограничена сверху на $[-1, 1)$. При $N > 0$ введем функцию $s_N = \min(s, N)$, являющуюся срезкой s . К интегралу

$$Z(N) = \int_{-1}^1 s_N(x) h_c(x) p_n^c(x) dx$$

применимо только что доказанное утверждение, согласно которому $Z(N) \geq 0$. Кроме того, $Z(N) \rightarrow Z$ при $N \rightarrow \infty$, а значит, и в этом случае имеет место (25).

В силу свойства (25) существует константа $C \geq 0$ такая, что

$$\int_{-1}^1 h(x)(p_n^c(x) - C) dx = 0.$$

Многочлен $q_n = p_n^c(x) - C$, очевидно, принадлежит множеству $\mathcal{P}_n^1(h)$, и потому $\mu(q_n) \geq j_n(h)$. Кроме того, поскольку $C \geq 0$, то

$$\mu(q_n) \leq 1 - x_1^c = \mu(p_n^c),$$

значит,

$$\mu(p_n^c) \geq j_n(h),$$

что в силу (21) дает оценку

$$\text{mes}\{x \in [-1, c] : p_n(x) \geq 0\} = c - x_1^* \geq \frac{c+1}{2} j_n(h). \quad (26)$$

Вес $\bar{h}(x) = h(-x)$ и многочлен $\bar{p}_n(x) = p_n(-x)$ обладают на $[-1, 1]$ всеми свойствами пары h, p_n . Нетрудно понять, что аналог соотношения (26) для веса $\bar{h}$ и многочлена $\bar{p}_n$ будет иметь вид

$$\text{mes}\{x \in [c, 1] : p_n(x) \geq 0\} = x_2^* - c \geq \frac{1-c}{2} j_n(h). \quad (27)$$

Складывая неравенства (26) и (27), получаем нужную оценку $\mu(p_n) \geq j_n(h)$. Теорема доказана.

3. Обсуждение основной задачи для веса Якоби. Исходная задача (2) представляет интерес, в частности, для веса Якоби

$$h(x) = h^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (28)$$

при естественных ограничениях $\alpha > -1$, $\beta > -1$, обеспечивающих суммируемость этого веса. Ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ с весом $h^{(\alpha, \beta)}$ систему алгебраических многочленов образуют классические многочлены Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}$, $k \geq 0$ [9]. Обозначим через $x_1(\alpha, \beta)$ и $x_k(\alpha, \beta)$ соответственно наименьший и наибольший нули многочлена $P_k^{(\alpha, \beta)}$; они связаны соотношением $x_1(\alpha, \beta) = -x_k(\beta, \alpha)$.

Нетрудно понять, что величины

$$i_n(\alpha, \beta) = i_n(h^{(\alpha, \beta)}), \quad j_n(\alpha, \beta) = j_n(h^{(\alpha, \beta)})$$

не изменяются при перестановке параметров α и β , поэтому можно считать, что $\alpha \leq \beta$. Утверждение леммы 2 принимает в данном частном случае следующий вид.

ЛЕММА 3. Пусть параметры α, β удовлетворяют условиям $-1 < \alpha \leq \beta$. Тогда если число n нечетное, $n = 2k - 1$, $k \geq 1$, то $j_n(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\alpha, \beta)$ и многочлен

$$\frac{(P_k^{(\alpha, \beta)}(x))^2}{x - x_k(\alpha, \beta)} \quad (29)$$

является экстремальным. Если число n четное, $n = 2k$, $k \geq 1$, то $j_n(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\alpha, \beta + 1)$ и многочлен

$$\frac{(1+x)(P_k^{(\alpha, \beta+1)}(x))^2}{x - x_k(\alpha, \beta + 1)}. \quad (30)$$

является экстремальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [9, теорема 6.21.1], что нули многочлена Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}$ и, в частности, наибольший $x_k(\alpha, \beta)$ и наименьший $x_1(\alpha, \beta)$ нули по переменному α убывают, а по переменному β возрастают. Из этого легко сделать вывод, что (в предположении $\alpha \leq \beta$) имеет место неравенство

$$1 - x_k(\alpha, \beta) \leq 1 + x_1(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\beta, \alpha).$$

Поэтому в случае нечетного n утверждение леммы 3 вытекает из соответствующего утверждения леммы 2.

В силу леммы 2 для четного $n = 2k$ справедливо равенство

$$j_n(\alpha, \beta) = \min\{1 - x_k(\alpha, \beta + 1), 1 + x_1(\alpha + 1, \beta)\}.$$

Для доказательства леммы в этом случае нужно убедиться, что если $-1 < \alpha \leq \beta$, то

$$1 - x_k(\alpha, \beta + 1) \leq 1 + x_1(\alpha + 1, \beta). \quad (31)$$

Введем обозначение $l_k(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\alpha, \beta)$; эта функция по переменному α растет, а по переменному β убывает. Поэтому поскольку $-1 < \alpha \leq \beta \leq 0$, то

$$1 + x_1(\alpha + 1, \beta) = l_k(\beta, \alpha + 1) \geq l_k(\alpha, \alpha + 1) \geq l_k(\alpha, \beta + 1).$$

Неравенство (31) проверено. Лемма доказана полностью.

Для веса (28) функции (19) принимают вид

$$\frac{1}{\theta^\beta} \left(\frac{2-t}{2-\theta t} \right)^\alpha, \quad \frac{1}{\theta^\alpha} \left(\frac{2-t}{2-\theta t} \right)^\beta$$

и являются неубывающими по $t \in (0, 2)$ при $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$. Следовательно, если $-1 < \alpha \leq 0$, $-1 < \beta \leq 0$, то вес (28) обладает Θ -свойством.

Как следствие теоремы 2 и леммы 3 для величины $i_n(\alpha, \beta) = i_n(h^{(\alpha, \beta)})$ имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть параметры α, β удовлетворяют условиям $-1 < \alpha \leq \beta \leq 0$. Тогда если число n нечетное, $n = 2k - 1$, $k \geq 1$, то

$$i_n(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\alpha, \beta) \quad (32)$$

и многочлен (29) является экстремальным. Если число n четное, $n = 2k$, $k \geq 1$, то

$$i_n(\alpha, \beta) = 1 - x_k(\alpha, \beta + 1) \quad (33)$$

и многочлен (30) является экстремальным.

При фиксированных α, β ($-1 < \alpha \leq \beta \leq 0$) величина $i_n(\alpha, \beta)$ имеет следующее асимптотическое поведение по n :

$$i_n(\alpha, \beta) = \frac{2\rho_\alpha^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где ρ_α – первый положительный нуль функции Бесселя J_α порядка α . Это утверждение есть следствие формул (32), (33) и хорошо известной асимптотики поведения нулей полиномов Якоби [9, теорема 8.1.2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бабенко А. Г. Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений. Дисс. ... к. ф.-м. н. Свердловск, 1987.
- [2] Бернштейн С. Н. О формулах квадратур Котеса и Чебышева // Собрание сочинений (в 4-х томах). Т. 2. М., 1954. С. 200–204.
- [3] Бабенко А. Г. Об одной экстремальной задаче для полиномов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 349–356.
- [4] Тайков Л. В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // УМН. 1965. Т. 20. № 3. С. 205–211.
- [5] Бабенко А. Г. Неравенство Джексона для среднеквадратичных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на равномерной сетке // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 4. С. 460–473.
- [6] Fazekas G., Levinstein V. I. On upper bounds for code distance and covering radius of designs in polynomial metric spaces // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 70. № 2. P. 267–288.
- [7] Юдин В. А. Покрывтия сферы и экстремальные свойства ортогональных многочленов // Дискретная матем. 1995. Т. 7. № 3. С. 81–88.
- [8] Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
- [9] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.