Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Беккер, В. Н. Недов, О группах с изоморфными голоморфами, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 343–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:35:08

УДК 512.541

О ГРУППАХ С ИЗОМОРФНЫМИ ГОЛОМОРФАМИ

И. Х. Беккер, В. Н. Недов

Группы с изоморфными голоморфами называются голоморфно изоморфными. Рассматриваются следующие задачи.

- 1) Для каких абелевых групп голоморфный изоморфизм влечет изоморфизм самих групп?
- 2) Влечет ли голоморфный изоморфизм двух групп, одна из которых абелева, коммутативность другой группы?

Выделены классы групп, для которых даются положительные ответы на эти вопросы.

Библиография: 4 названия.

Группы с изоморфными голоморфами назовем *голоморфно изоморфными*. В работе изучаются свойства голоморфно изоморфных групп, соотношения между голоморфами абелевых групп и некоммутативных групп. Голоморфно изоморфные группы не всегда изоморфны. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных голоморфно изоморфных групп. Например, при $n \geq 3$ группа диэдра и дициклическая группа порядка $4n$ имеют изоморфные голоморфы [1]. Голоморфно изоморфные абелевы группы также не всегда изоморфны. Такой пример голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения построен в п. 1. Однако можно выделить довольно широкие классы абелевых групп, определяющихся своими голоморфами в категории $\text{mod } -Z$ всех абелевых групп [2, с. 148]. В п. 1 данной статьи доказано, что смешанная абелева G группа с нулевой 2-компонентой и периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$ определяется своим голоморфом $\Gamma(G)$ в категории $\text{mod } -Z$ (теорема 1.1).

В п. 2 работы рассматривается такой вопрос: влечет ли голоморфный изоморфизм групп G и G' , одна из которых абелева, коммутативность другой группы? Здесь выделены различные классы абелевых групп, для которых на этот вопрос дается положительный ответ. Доказано, что если одна из двух голоморфно изоморфных групп является периодической без элементов порядка 2, то такие группы изоморфны (теоремы 2.1, 2.2).

Используемые в работе обозначения стандартны и соответствуют [3].

1. Голоморфно изоморфные абелевы группы. Отметим некоторые свойства голоморфов абелевых групп G , которые потребуются в дальнейшем. Пусть $\Gamma(G)$ – голоморф группы G , т.е. полупрямое расширение группы $\text{Aut } G$ с помощью группы G . Всякий элемент группы $\Gamma(G)$ рассматриваем как пару (g, φ) , $g \in G$, $\varphi \in \text{Aut } G$. Групповая операция определена в $\Gamma(G)$ по правилу: если (g, φ) , $(a, \psi) \in \Gamma(G)$, то $(g, \varphi) + (a, \psi) = (g + \varphi a, \varphi\psi)$ (или $(g, \varphi) \cdot (a, \psi) = (g \cdot \varphi a, \varphi\psi)$). Элементы группы $\Gamma(G)$ вида (g, ε) , где $\varepsilon =$

единица группы $\text{Aut } G$, образуют нормальную подгруппу, изоморфную группе G (отождествляем ее с G), а элементы вида $(0, \varphi)$, где 0 – нулевой элемент группы G , образуют подгруппу, изоморфную $\text{Aut } G$ (отождествляем ее с $\text{Aut } G$). Итак, $\Gamma(G) = G \rtimes \text{Aut } G$, $G \cap \text{Aut } G = \langle (0, \varepsilon) \rangle$ ($\Gamma(G) = G \rtimes \text{Aut } G$). Заметим, что G является максимальной нормальной абелевой подгруппой группы $\Gamma(G)$ и ее централизатор $C_{\Gamma(G)}(G) = G$. Пусть $H \triangleleft \Gamma(G)$, H_1, Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов подгруппы H . Тогда H_1 является характеристической подгруппой группы G , а Φ_1 нормальной абелевой подгруппой группы $\text{Aut } G$ [2, с. 139]. Нормальную подгруппу H голоморфа $\Gamma(G)$ группы G назовем *голоморфно разложимой*, если из того, что $(a, \varphi) \in H$ всегда следует $(a, \varepsilon), (0, \varphi) \in H$.

ЛЕММА 1.1 [2, с. 139]. *Если H – максимальная абелева нормальная подгруппа группы $\Gamma(G)$ и H или G не содержит элементов порядка 2, то H – голоморфно разложимая группа.*

Если для любого автоморфизма $\theta \in \text{Aut}(\Gamma(G))$ группа G^θ является голоморфно разложимой, то группу G называем голоморфно разложимой. Согласно лемме 1.1 всякая абелева группа G без элементов порядка 2 является голоморфно разложимой. Пусть $\Gamma(G)$ и $\Gamma(G')$ – соответственно голоморфы абелевых групп G и G' , $\mu: \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G')$ – изоморфное отображение. Характеристическую подгруппу A группы G назовем *μ -голоморфно разложимой*, если μA голоморфно разложима. В частности, группа G называется μ -голоморфно разложимой, если μG голоморфно разложима.

ЛЕММА 1.2. *Пусть G и G' – голоморфно изоморфные абелевы группы, $\mu: \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G')$; A, A' – соответственно μ -голоморфно, μ' -голоморфно разложимые подгруппы групп G, G' ; A'_1, Φ'_1 и A_1, Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов групп μA и $\mu^{-1} A'$.*

Если

$$\mu A \cap G' \leq A' \quad \text{и} \quad \mu^{-1} A' \cap G \leq A, \quad (*)$$

то

- 1) $A'_1 = \mu A_1$, $A = A_1 \oplus A_2$, $A' = A'_1 \oplus A'_2$, где $A'_2 = \mu \Phi_1$, $A_2 = \mu^{-1} \Phi'_1$;
- 2) если всякий элементарный автоморфизм группы A (группы A') [4, с. 152] можно продолжить до некоторого автоморфизма группы G (группы G'), то Φ_1 мономорфно вкладывается в $\text{Hom}(A_2, A_1)$ (Φ'_1 мономорфно вкладывается в $\text{Hom}(A'_2, A'_1)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию имеем $\mu A = A'_1 \oplus \Phi'_1$, $\mu^{-1} A' = A_1 \oplus \Phi_1$, притом $A_1 \neq \langle (0, \varepsilon) \rangle$, $A'_1 \neq \langle (0, \varepsilon') \rangle$ – соответственно характеристические подгруппы групп G, G' (ε' – тождественный автоморфизм группы G').

1) Пусть подгруппы A и A' удовлетворяют условию (*). Имеем $A_1 = \mu^{-1} A' \cap G \leq A$ и $A'_1 = \mu A \cap G' \leq A'$. Отсюда следует $A_1 = \mu^{-1} A' \cap A$ и $A'_1 = \mu A \cap A'$. Следовательно, $\mu A_1 = A' \cap \mu A = A'_1$ и $A = A_1 \oplus A_2$, $A' = A'_1 \oplus A'_2$, где $A_2 = \mu^{-1} \Phi'_1$, $A'_2 = \mu \Phi_1$.

2) Для любых $\varphi_1 \in \Phi_1$, $\varphi'_1 \in \Phi'_1$, $a_2 \in A_2$, $a'_2 \in A'_2$ имеем $\varphi_1 a_2 - a_2 = \bar{a}_1 \in A_1$, $\varphi'_1 a'_2 - a'_1 = a'_1 \in A'_1$ [2, с. 139]. Тогда соответствие $a_2 \mapsto \bar{a}_1$ определяет некоторый гомоморфизм η группы A_2 в A_1 , т.е. φ_1 индуцирует гомоморфизм $\eta \in \text{Hom}(A_2, A_1)$. Очевидно, отображение $\chi: \Phi_1 \rightarrow \text{Hom}(A_2, A_1)$, $\chi \varphi_1 = \eta$, есть мономорфизм. Аналогично получаем, что отображение $\chi': \Phi'_1 \rightarrow \text{Hom}(A'_2, A'_1)$, $\chi' \varphi'_1 = \eta' \in \text{Hom}(A'_2, A'_1)$, есть также мономорфизм.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\mu: \Gamma(G) \twoheadrightarrow \Gamma(G')$, G'_1 , Φ'_1 и G_1 , Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов групп μG и $\mu^{-1}G'$. Если одна из групп G , G' является μ -голоморфно разложимой (в частности, не содержит элементов порядка 2), то

- 1) $G = G_1 \oplus G_2$, $G' = G'_1 \oplus G'_2$, где $G'_1 = \mu G_1$, $G'_2 = \mu \Phi_1$, $G_2 = \mu^{-1}\Phi'_1$;
- 2) $\Phi_1 \cong \text{Hom}(G_2, G_1)$, а $\Phi'_1 \cong \text{Hom}(G'_2, G'_1)$.

Пусть $\text{mod } -Z$ – категория всех абелевых групп. Говорим, что абелева группа G определяется своим голоморфом $\Gamma(G)$ в категории $\text{mod } -Z$, если для любой группы G' из $\text{mod } -Z$ изоморфизм голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(G')$ влечет изоморфизм групп G и G' .

Заметим, что группа G не определяется своим голоморфом в категории $\text{mod } -Z$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(G)$ содержит такую максимальную нормальную абелеву подгруппу H , что $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ изоморфны, но G не изоморфна H .

Действительно, пусть группа G не определяется своим голоморфом $\Gamma(G)$ в категории $\text{mod } -Z$ и G , G' такие голоморфно изоморфные группы, $G' \in \text{mod } -Z$, что G не изоморфна G' и $\mu: \Gamma(G) \twoheadrightarrow \Gamma(G')$. Тогда $\mu^{-1}G' = H$ – максимальная нормальная абелева подгруппа группы $\Gamma(G)$ не изоморфная G , а голоморфы $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ изоморфны.

Построим пример голоморфно изоморфных абелевых групп, не определяющихся своими голоморфами в категории $\text{mod } -Z$. Пусть $\mu_1: G \twoheadrightarrow \Gamma(G')$ и $\mu_2: \text{Aut } G \twoheadrightarrow \Gamma(G')$ – такие мономорфизмы, что $\langle \mu_1 g, \mu_2 \varphi \mid g \in G, \varphi \in \text{Aut } G \rangle = \Gamma(G')$ и $\langle \mu_1 g \mid g \in G \rangle \cap \langle \mu_2 \varphi \mid \varphi \in \text{Aut } G \rangle = \langle (0, \varepsilon') \rangle$. Выясним, когда такая пара мономорфизмов (μ_1, μ_2) индуцируется некоторым изоморфизмом $\mu: \Gamma(G) \twoheadrightarrow \Gamma(G')$? Ответ на этот вопрос дает

ЛЕММА 1.3. Пара мономорфизмов (μ_1, μ_2) индуцируется некоторым изоморфизмом $\mu: \Gamma(G) \twoheadrightarrow \Gamma(G')$ тогда и только тогда, когда для любых $g \in G$, $\varphi \in \text{Aut } G$

$$\mu_2 \varphi \cdot \mu_1 g \cdot \mu_2 \varphi^{-1} = \mu_1 \varphi g.$$

Доказательство сводится к непосредственным вычислениям.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $G = A \oplus B \oplus (\bigoplus_{\aleph} C)$, $G' = A \oplus B' \oplus (\bigoplus_{\aleph} C)$, где A , B , C – группы без кручения ранга 1, $pA \neq A$ для всякого простого числа p , тип $\tau(A) > \tau(B)$, $B' \cong \text{Hom}(B, A)$ и $\tau(C)$ не сравним с $\tau(A)$, $\tau(B)$, $\tau(B')$, $\aleph$ – произвольный кардинал. Имеем $\Gamma(G) = \Gamma(A \oplus B) \times \Gamma(\bigoplus_{\aleph} C)$, $\Gamma(G') = \Gamma(A \oplus B') \times \Gamma(\bigoplus_{\aleph} C)$. Пользуясь леммой 1.3, нетрудно проверить, что $\Gamma(A \oplus B) \cong \Gamma(A \oplus B')$. Отсюда следует, что голоморфы $\Gamma(G)$ и $\Gamma(G')$ изоморфны, но группы G и G' не изоморфны.

ТЕОРЕМА 1.1. Всякая μ -голоморфно разложимая смешанная абелева группа G (в частности, смешанная абелева группа G без элементов порядка 2) с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$ определяется своим голоморфом $\Gamma(G)$ в категории $\text{mod } -Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G и G' голоморфно изоморфные абелевы группы и G удовлетворяет условию теоремы, $\mu: \Gamma(G) \twoheadrightarrow \Gamma(G')$ и $\mu G \neq G'$. Тогда согласно следствию 1.1 $G = G_1 \oplus G_2$, $G' = G'_1 \oplus G'_2$, где $G'_1 = \mu G_1$, $G'_2 = \mu \Phi_1$, $G_2 = \mu^{-1}\Phi'_1$, G'_1 , Φ'_1 и G_1 , Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов групп μG и $\mu^{-1}G'$, притом $\Phi_1 \cong \text{Hom}(G_2, G_1)$, а $\Phi'_1 \cong \text{Hom}(G'_2, G'_1)$. Далее, G_1 , G'_1 – характеристические подгруппы соответственно групп G , G' [2, с. 139]. Рассмотрим разложение $G = G_1 \oplus G_2$. Так как $\text{Aut } G$ – группа периодическая, то G – редуцированная группа.

Пусть $\pi_i(tG_i)$ – множество простых чисел, к которому относится периодическая часть tG_i группы G_i ($i = 1, 2$). Покажем, что $tG \leq G_1$, т.е. $\pi_2(tG_2) = \emptyset$. Действительно, пусть $p \in \pi_1(tG_1) \cap \pi_2(tG_2)$. Тогда G_1 и G_2 имеют циклические прямые слагаемые порядка p^α для некоторых $\alpha \geq 1$ и $\text{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$. Это противоречит характеристичности G_1 в группе G . Допустим, что $\pi_1(tG_1) \cap \pi_2(tG_2) = \emptyset$ и $q \in \pi_2(tG_2)$. Тогда G_2 содержит примарную компоненту, каждый элемент которой неподвижен относительно всех автоморфизмов $\varphi_1 \in \Phi_1$. Следовательно, $\mu^{-1}G' = G_1 \oplus \Phi_1$ не является максимальной нормальной абелевой подгруппой в $\Gamma(G)$, т.е. $C_{\Gamma(G)}(\mu^{-1}G') \neq \mu^{-1}G'$, что невозможно. Доказано, что $tG \leq G_1$ и Φ_1, G_2 – группы без кручения. Если допустить, что $pG_2 \neq G_2$ хотя бы для одного $p \in \pi_1(tG_1)$, то $\text{Hom}(G_2, G_1)$ содержит гомоморфизмы порядка p^m для некоторых $m \geq 1$. Такие гомоморфизмы получаем, строя отображения вида $G \rightarrow G/p^k G \rightarrow G_1 = \langle g_1 \rangle \oplus \overline{G}_1$, где $\langle g_1 \rangle$ – циклическая подгруппа порядка p^α ($\alpha \geq 1, k \geq 1$). Получаем, что Φ_1 содержит элементы конечного порядка, но $\Phi_1 = \mu^{-1}G'_2$, а G'_2 – группа без кручения. В этом можно убедиться, рассматривая разложение $G' = G'_1 \oplus G'_2$. Если допустить, что $pG_2 = G_2$ для некоторого $p \in \pi_1(tG_1) = \pi(tG)$, то G_2 имеет автоморфизмы бесконечного порядка. Следовательно, группа G также имеет такие автоморфизмы, что противоречит условию. Теорема доказана.

2. Голоморфно абелевы группы. При изучении голоморфно изоморфных групп возникает такой вопрос: если одна из двух голоморфно изоморфных групп абелева, то будет ли другая группа абелевой?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Абелеву группу G назовем *голоморфно абелевой*, если из того, что $\Gamma(G) \cong \Gamma(G')$ для группы G' всякий раз следует, что G' – абелева группа.

Не всякая абелева группа является голоморфно абелевой. Однако, можно выделить довольно широкие классы голоморфно абелевых групп.

ЛЕММА 2.1. *Абелева группа G не является голоморфно абелевой тогда и только тогда, когда ее голоморф $\Gamma(G)$ содержит такую неабелеву нормальную подгруппу H , что $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть G не является голоморфно абелевой. Тогда существует такая неабелева группа G' , что голоморфы групп G и G' изоморфны, $\Gamma(G) \cong \Gamma(G')$. Пусть $\mu: \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G')$ и $\mu^{-1}G' = H$. Имеем $H \triangleleft \Gamma(G)$ и $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$.

Непосредственно проверяется

ЛЕММА 2.2. *Пусть H – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы G , H_1, Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент ее элементов. Тогда*

- 1) H_1 является характеристической подгруппой группы G , а Φ_1 – нормальная подгруппа группы $\text{Aut } G$;
- 2) если $(a, \varphi) \in H$, то $(2a, \varepsilon), (0, \varphi^2) \in H$;
- 3) если группа G имеет автоморфизм $g \mapsto 2g$ ($g \in G$), то H – голоморфно разложимая подгруппа.

ЛЕММА 2.3. *Всякая абелева группа G с совершенным голоморфом $\Gamma(G)$ является голоморфно абелевой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: пусть голоморфы групп G и G' изоморфны, $\Gamma(G) \cong \Gamma(G')$ и G' – группа неабелева. Но голоморф $\Gamma(G')$ имеет внешние автоморфизмы. Одним из них является автоморфизм вида $\omega: (a', \varphi') \mapsto (a'^{-1}, \psi_{a'}^{-1} \varphi')$, где $\psi_{a'} g' = a'^{-1} g' a'$, $g' \in G'$, и $\omega(G') = C_{\Gamma(G')} (G') \neq G'$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 [2, с. 146]. *Абелева группа G голоморфно абелева, если она удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) G характеристична в своем голоморфе;
- 2) G имеет автоморфизм $g \mapsto 2g$ ($g \in G$).

Действительно, группа G , удовлетворяющая условиям 1) и 2), имеет совершенный голоморф [2, с. 145].

Отметим еще несколько следствий леммы 2.3. При этом учтем теоремы 11.14–11.16 из [2, с. 146].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. 1) *Абелева группа G с автоморфизмом $g \mapsto 2g$ ($g \in G$) голоморфно абелева, если $\text{Aut } G$ абелева.*

2) *Регулярно полная абелева группа G без кручения голоморфно абелева, если $\text{Aut } G$ изоморфна одной из групп $Z(6)$, DC_{12} или BT_{24} (G называется регулярно полной, если всякий ее автоморфизм φ , отличный от тождественного, регулярен, т.е. $\varphi g \neq g$ для $g \in G$).*

Если смешанная абелева группа G имеет примарную компоненту $G_p = Z(p^\infty) \oplus (\bigoplus_{i=1}^k \langle g_i \rangle)$ ($1 \leq k < \infty$), то $G = G_p \oplus G^{(p)}$. Пусть π_1 – множество простых чисел, к которому относятся ее примарные компоненты вида G_p .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Смешанная нередуцированная 2-делимая абелева группа G является голоморфно абелевой, если она удовлетворяет одному из условий:*

- 1) $\pi_1 = \emptyset$;
- 2) $\pi_1 \neq \emptyset$ и $pG^{(p)} \neq G^{(p)}$ для $p \in \pi_1$.

Пусть G – абелева группа без элементов порядка 2, G' – неабелева и $\mu: \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G')$, $H = \mu^{-1} G'$, $H' = C_{\Gamma(G)}(H) = \mu^{-1} C_{\Gamma(G')} (G')$. Группа $\Gamma(G')$ имеет внешний автоморфизм ω вида $\omega(b, \psi) = (b^{-1}, \tau_b^{-1} \psi)$, где τ_b – внутренний автоморфизм группы G' , $\tau_b g' = b^{-1} g' b$ ($g' \in G'$), $(b, \psi) \in \Gamma(G')$.

Автоморфизм ω обладает такими свойствами:

- 1) отображает G' на ее централизатор $C_{\Gamma(G')} (G')$ относительно $\Gamma(G')$, $G'^\omega = C_{\Gamma(G')} (G') \neq G'$;
- 2) $\omega^2 = \varepsilon$;
- 3) ω обращает элементы из центра $C(G')$ группы G' .

Так как голоморфы $\Gamma(G)$ и $\Gamma(G')$ изоморфны, то автоморфизму ω соответствует некоторый внешний автоморфизм χ группы $\Gamma(G)$. Заметим, что $H^\chi = H'$, а группы H и H' голоморфно разложимы.

Действительно, пусть $(h, \varphi) \in H$, тогда $(2h, \varepsilon), (0, \varphi^2) \in H$ (лемма 2.2). Для любого $h' \in H'$ имеем $(h', \varepsilon) + (2h, \varepsilon) + (-h', \varepsilon) = (2h, \varepsilon)$, и так как группа G не содержит элементов порядка 2, то $h' + h = h + h'$. Следовательно, $h \in C_{\Gamma(G)}(H') = H$ и H – голоморфно разложимая группа. Аналогично получаем, что группа H' также голоморфно разложима.

ЛЕММА 2.4. Пусть G – абелева группа без элементов порядка 2. Тогда

- а) $G^\chi \neq G$ и $G^\chi = A \oplus \Phi$, где A, Φ – соответственно множества всех первых, вторых компонент группы G^χ ;
- б) A – характеристическая подгруппа группы G и $A^\chi = A$;
- с) $G = A \oplus B$, где $B = \Phi^{\chi^{-1}}$ и $B \cong \text{Hom}(A, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Допустим, что $G^\chi = G$. Рассмотрим нормальные подгруппы H и H' голоморфа $\Gamma(G)$. Имеем $H = H_1 \dashv \Phi_1$, $H' = H'_1 \dashv \Phi'_1$, где H_1, H'_1 и Φ_1, Φ'_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов групп H и H' , притом H_1 и H'_1 характеристичны в группе G , а Φ_1, Φ'_1 – нормальные подгруппы группы $\text{Aut } G$. Так как $H_1^\chi = H_1$, то $2H_1 \leq H_1 \leq H \cap H' = C(H)$ – центр группы H . Тогда для любых $\varphi_1 \in \Phi_1, h_1 \in H_1$ получаем $(0, \varphi) + (2h_1, \varepsilon) + (0, \varphi^{-1}) = (2h_1, \varepsilon)$ или $\varphi(2h_1) = 2(\varphi h_1) = 2h_1$. Отсюда $\varphi h_1 = h_1$ и H – абелева группа, что невозможно. Следовательно, $G^\chi \neq G$, и по лемме 1.1 получаем $G^\chi = A \oplus \Phi$.

б) A характеристична в группе G [2, с. 140], $A = G^\chi \cap G$. Отсюда $A^\chi = (G^\chi \cap G)^\chi = G \cap G^\chi$, так как $\chi^2 = \varepsilon$.

с) Имеем $G^\chi = A \oplus \Phi$, отсюда $G = A^{\chi^{-1}} \oplus \Phi^{\chi^{-1}} = A \oplus \Phi^{\chi^{-1}} = A \oplus B$.

Всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi$ индуцирует тождественный автоморфизм на группе A и для $b \in B$ имеем $(-b, \varepsilon) + (0, \varphi) + (b, \varepsilon) = (\varphi b - b, \varphi)$ и $\varphi b - b \in A$. Отсюда следует, что φ определяет некоторый гомоморфизм $\tau_\varphi: B \rightarrow A$. Нетрудно проверить, что $\Phi \cong \text{Hom}(B, A)$. Следовательно, $B \cong \text{Hom}(B, A)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если $g = a + b \in G$, $a \in A, b \in B$, то $\chi g = (a', \delta_b)$, где δ_b – внутренний автоморфизм группы $\Gamma(G)$, индуцированный элементом $b \in B, a' \in A$. Для любых $a \in A, b \in B, \chi a = a' \in A, \chi b = (0, \delta_b), \chi(0, \delta_b) = b$.

Рассмотрим, далее, абелевы группы G с несовершенными голоморфами $\Gamma(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Абелева группа G без элементов порядка 2 с несовершенным голоморфом $\Gamma(G)$, характеристичная в своем голоморфе $\Gamma(G)$, является голоморфно абелевой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть голоморф $\Gamma(G)$ изоморфен голоморфу $\Gamma(G')$ неабелевой группы G' , $\mu: \Gamma(G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(G'), H = \mu^{-1}G', H' = C_{\Gamma(G)}(H)$ – централизатор группы H в $\Gamma(G)$. Имеем $H = H_1 \dashv \Phi_1, H' = H'_1 \dashv \Phi'_1$, где H_1, Φ_1 и H'_1, Φ'_1 – соответственно подгруппы из всех первых, вторых компонент элементов групп H и H' . Так как H и H' – нормальные подгруппы группы $\Gamma(G)$, то H_1 и H'_1 характеристичны в G (лемма 2.2) и в голоморфе $\Gamma(G)$. Группа $\Gamma(G)$ имеет внешний автоморфизм χ , отображающий H на $H', H^\chi = H'$ и $H_1^\chi = H'_1$. Следовательно, $H_1 = H'_1$. Если теперь учесть, что $H = C_{\Gamma(G)}(H')$, то получаем $\Phi_1|_{H_1} = \langle \varepsilon \rangle, H$ – абелева группа, а G – голоморфно абелева.

Заметим, что п. 1 следствия 2.2 вытекает также из предложения 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Каждая из следующих групп является голоморфно абелевой:

- 1) нередуцированная группа без кручения;
- 2) группа без кручения с периодической группой автоморфизмов.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\psi \in \text{Aut } G$. Автоморфизм $\psi \in \Phi'_1$ тогда и только тогда, когда

- 1) для любого $g \in G$ элемент $\psi g - g \in H'_1$;
- 2) $\psi|_{H_1} = \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\psi \in \Phi'_1, g \in G$. Имеем $(-g, \varepsilon) + (0, \psi) + (g, \varepsilon) = (\psi g - g, \psi)$. Отсюда $\psi g - g \in H'_1$. Так как $\psi \in C_{\Gamma(G)}(H) = H'$, то $\psi|_{H_1} = \varepsilon$.

2) Обратно, пусть $\psi g - g \in H'_1$ для любого $g \in G$ и $\psi|_{H_1} = \varepsilon$. Для любого $\varphi \in \Phi_1$ имеем $\varphi g - g \in H_1, \psi(\varphi g - g) = \varphi g - g$ и $\varphi(\psi g - g) = \psi g - g$. Отсюда $\psi\varphi = \varphi\psi$. Следовательно, $\psi \in C_{\Gamma(G)}(H) = H'$ и $\psi \in \Phi'_1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Всякая абелева периодическая группа G с нулевой 2-компонентой является голоморфно абелевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть голоморф $\Gamma(G)$ группы G изоморфен голоморфу $\Gamma(G')$ неабелевой группы $G', \mu: \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G'), H = \mu^{-1}G', H' = C_{\Gamma(G)}(H)$. Согласно лемме 2.4 имеем $G = A \oplus B$, где $\text{Hom}(A, B) = 0, \text{Hom}(B, A) \cong B$, подгруппы $H = H_1 \lhd \Phi_1, H' = H'_1 \lhd \Phi'_1$ и H_1, H'_1 – характеристические подгруппы группы G . Далее, $H_1 = (H_1 \cap A) \oplus (H_1 \cap B), H'_1 = (H'_1 \cap A) \oplus (H'_1 \cap B)$ [3, с. 60] и $H_1 \cap B, H'_1 \cap B$ характеристичны в группе B , так как H_1 и H'_1 характеристичны в G . Пусть $B = \bigoplus_{p \in \pi_B} B_p, B_p$ – примарная компонента группы B, π_B – множество всех простых чисел, к которому относятся ее примарные компоненты. Очевидно, $H_1 \cap B = \bigoplus_{p \in \pi_1} (H_1 \cap B_p), H'_1 \cap B = \bigoplus_{p \in \pi_2} (H'_1 \cap B_p)$, где π_1, π_2 – соответственно множества всех простых чисел, к которым относятся примарные компоненты группы $H_1 \cap B, H'_1 \cap B$.

Покажем теперь, что B – группа конечная. Действительно, редуцированная периодическая группа G с нулевой 2-компонентой голоморфно абелева [2, с. 146]. Поэтому далее G – группа нередуцированная, $G = \bigoplus_{p \in \pi} G_p, A = \bigoplus_{p \in \pi_A} A_p$, где G_p, A_p – соответственно примарные компоненты групп $G, A; \pi, \pi_A$ – соответственно множества всех простых чисел, к которому относятся их примарные компоненты. Имеем $\pi_B \subseteq \pi_A$. Допустим, что $p \in \pi_B$, но $p \notin \pi_A$. Тогда, рассмотрев группу $\text{Hom}(B, A) \cong \text{Hom}(B_p, A) \oplus \text{Hom}(\bigoplus_{q \neq p} B_q, A)$, заключаем, что $\text{Hom}(B_p, A) = 0$ и p -компонента группы $\text{Hom}(B, A)$ также нулевая. Следовательно, группа $\text{Hom}(B, A)$ не изоморфна B , что невозможно. Заметим, что всякая группа A_p является делимой группой. В противном случае группа G имеет автоморфизмы ω , для которых $A^\omega \neq A$, что противоречит характеристичности A в группе G . Всякая же группа B_p является редуцированной. Если допустить противное, то $\text{Hom}(B, A)$ имеет хотя бы одно прямое слагаемое, изоморфное $\text{Hom}(Z(p^\infty), Z(p^\infty))$, что противоречит периодичности G . Если допустить, что хотя бы одна группа B_p является бесконечной, то получаем, что $\text{Hom}(B, A)$ содержит элементы бесконечного порядка [3, теорема 47.1, с. 233]. Следовательно, всякая группа B_p – группа конечная. Так как $B \cong \text{Hom}(B, A) \cong \prod_{p \in \pi_B} \text{Hom}(B_p, A)$, то π_B – множество конечное. Отсюда следует, что B – группа конечная.

Убедимся, что $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Для этого достаточно показать, что $(H_1 \cap B) \cap (H'_1 \cap B) = 0$. Допустим противное, пусть $0 \neq b \in (H_1 \cap B) \cap (H'_1 \cap B)$. Тогда при действии автоморфизма χ получаем $\chi b = (0, \delta_b)$, где

$$\delta_b \in \begin{pmatrix} \varepsilon & \text{Hom}(B, A) \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

В то же время $b \in C(H) = H \cap H'$ и $\chi b \neq (0, \delta_b)$. Противоречие. Следовательно, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Очевидно, $B_p \cong \text{Hom}(B_p, A)$ и для $c \in B_p$, $q \neq p$ ($p, q \in \pi_B$) имеем $\delta_c|_A = \varepsilon$, $\delta_c|_{B_q} = \varepsilon$, $\delta_c b' = b' + \psi b'$, где $b' \in B_p$, $\psi \in \text{Hom}(B_p, A)$. Пусть теперь $p \in \pi_2$, тогда автоморфизм δ_c действует тождественно на группе H_1 и для любого $g \in G$ имеем $\delta_c g - g \in H'_1$. По лемме 2.5 получаем $\delta_c \in \Phi'_1$ и так как $(H')^{\chi^{-1}} = H = ((H_1 \cap A) \oplus (H_1 \cap B)) \rtimes \Phi_1$, то $\chi^{-1} \delta_c = b' \in H_1 \cap B$. Это противоречит тому, что $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Следовательно, G' – группа абелева. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая периодическая абелева группа G с нулевой 2-компонентой определяется своим голоморфом в категории $\text{mod } -Z$ [2, с. 150].

Следовательно, имеет место такая

ТЕОРЕМА 2.2. *Если одна из двух голоморфно изоморфных групп G и G' является абелевой периодической с нулевой 2-компонентой, то такие группы изоморфны.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mills W. H. Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 71. № 3. P. 379–392.
- [2] Беккер И. Х., Кожухов С. Ф. Автоморфизмы абелевых групп без кручения. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1988.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [4] Басс Х. Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1973.

Томский государственный университет

Поступило
02.10.95