Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Волкова, Тождества кривизны нормальных многообразий киллингова типа, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 351–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 11:29:44

УДК 517

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ НОРМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КИЛЛИНГОВА ТИПА

Е. С. Волкова

Вводятся в рассмотрение два тождества кривизны и изучаются соответствующие им классы R_1 и R_2 нормальных многообразий киллингова типа.

Библиография: 16 названий.

Геометрия почти контактных метрических многообразий, наделенных дополнительными структурами, является одним из наиболее содержательных объектов геометрических исследований. Среди таких структур большую роль играют нормальные многообразия киллингова типа (в дальнейшем будем обозначать их *CNK-многообразия*), обобщающие сасакиевы и квазисасакиевы, косимплектические и слабо косимплектические многообразия, активно изучаемые зарубежными геометрами (Сасаки [1], Исихара [2], Танно [3] и др.). Изучение этого класса многообразий становится более интересным в случае, когда они являются локально конформными почти контактным метрическим многообразиям с замкнутой фундаментальной 2-формой (короче назовем их *Cc-многообразия*). В этом случае мы получаем контактный аналог локально конформно-келеровых многообразий, находящих важные приложения в современной математической физике, например, при построении моделей супергравитации в теории Калуцы–Клейна [4].

По выражению А. Грея ключом к изучению геометрии почти эрмитовых структур являются тождества кривизны, выделяющие те или иные классы почти эрмитовых многообразий [5]. Именно на этом пути были выделены такие важные классы почти эрмитовых многообразий, как паракелеровы многообразия, РК-многообразия и т.д. Еще больше тождеств кривизны, выявляющих дополнительные свойства симметрии многообразий, можно выделить для почти контактных многообразий. В настоящей работе вводятся в рассмотрение два тождества кривизны и изучены соответствующие им классы R_1 и R_2 почти контактных метрических многообразий. Получены аналитические критерии принадлежности CNK-многообразий к этим классам. Изучено геометрическое строение CNK-многообразий, удовлетворяющих этим тождествам кривизны. Введен оператор $\mathcal{B}$, определяемый тождеством $\mathcal{B}(X) = \nabla_X \xi$, где ξ – структурный вектор. Доказано, что распределение $\text{Im } \mathcal{B}$ на Cc-многообразии M класса R_1 инволютивно тогда и только тогда, когда M локально эквивалентно произведению квазисасакиева многообразия и келерова многообразия. Получено несколько критериев интегрируемости структуры CNK-многообразия M .

Пусть M^{2n+1} – гладкое многообразие с почти контактной метрической структурой $\{\Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, $\eta(\xi) = 1$, $\Phi(\xi) = 0$, $\eta \circ \Phi = 0$, $\Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta$, $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle -$

$\eta(X)\eta(Y)$, $\mathcal{X}(M)$ – алгебра Ли гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования, ∇ – риманова связность на M , $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ – фундаментальная форма структуры, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M .

Напомним [6], что почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $2N + \xi \otimes d\eta = 0$, где

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y])$$

– тензор Нейенхейса структурного оператора Φ .

Нормальную почти контактную метрическую структуру с киллинговым структурным ковектором назовем *CNK-структурой*.

Киллинговость структурного ковектора означает, что верно тождество

$$\nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Известно [7], что задание почти контактной метрической структуры на M^{2n+1} определяет в модуле $\mathcal{X}(M)$ пару взаимно-дополнительных проекторов $m = \xi \otimes \eta$, $l = \text{id} - \xi \otimes \eta$. Известно также, что $l = -\Phi^2$, $\langle \Phi lX, \Phi lY \rangle = \langle lX, lY \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Это означает, что на распределении $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi$ пара $\{\Phi|_{\mathcal{L}}, g|_{\mathcal{L}}\}$ определяет почти эрмитову структуру, следовательно, $\mathcal{L}$ можно рассматривать как эрмитово векторное расслоение над M с метрикой $H(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1}\langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Рассмотрим теперь комплексификацию [8] расслоения $\mathcal{L}$ – расслоение $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} = \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ над M . В расслоении $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ естественно определены взаимно-дополнительные проекторы $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}})$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}})$ (здесь под оператором $\Phi|_{\mathcal{L}}$, вообще говоря, понимается его комплексификация $\Phi^{\mathbb{C}} = (\Phi|_{\mathcal{L}}) \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}$), а также оператор τ естественного сопряжения, причем, очевидно, что на $\mathcal{L}$ справедливо соотношение $\bar{\sigma} = \tau \circ \sigma$ [7].

Задание проекторов σ и $\bar{\sigma}$ равносильно распадению модуля $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подмодулей D и $\bar{D}$ – образов этих проекторов. Легко видеть, что D и $\bar{D}$ являются собственными подмодулями оператора Φ с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. Итак, верно соотношение $\sigma \circ \Phi = \Phi \circ \sigma = \sqrt{-1}\sigma$, т.е. $\Phi(\sigma X) = \sqrt{-1}(\sigma X)$, $X \in \mathcal{L}$. Таким образом, $D = \text{Im } \sigma$ будет собственным подмодулем оператора Φ с собственным значением $\sqrt{-1}$. Аналогично, $\bar{\sigma} \circ \Phi = \Phi \circ \bar{\sigma} = -\sqrt{-1}\bar{\sigma}$, $X \in \mathcal{L}$, т.е. $\bar{D} = \text{Im } \bar{\sigma}$ будет собственным подмодулем оператора Φ с собственным значением $-\sqrt{-1}$.

Пусть $p \in M$. Выберем в $\mathcal{L}_p$ репер $\{p, e_1, \dots, e_n\}$, унитарный относительно метрики H . Построим репер $\{p, E_o, E_1, \dots, E_n, E_{\hat{1}}, \dots, E_{\hat{n}}\}$ модуля $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{M}_p$, где $\mathcal{M}_p = \text{Im}(m_p)$, положив $E_o = \xi$, $E_a = \sigma(e_a)$, $E_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(e_a)$, где условимся считать, что индексы i, j, k, s пробегает значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, d, g – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$. Заметим, что $\Phi(E_a) = \Phi(\sigma(e_a)) = \sqrt{-1}E_a$, $\Phi(E_{\hat{a}}) = \Phi(\bar{\sigma}(e_a)) = -\sqrt{-1}E_{\hat{a}}$, $\Phi(E_o) = \Phi(\xi) = 0$.

Репер $\{p, E_o, E_1, \dots, E_n, E_{\hat{1}}, \dots, E_{\hat{n}}\}$ называется *репером, адаптированным структуре*, или *A-репером* [9]. Известно [7], что задание почти контактной метрической структуры на многообразии M^{2n+1} равносильно заданию G -структуры на пространстве расслоения всех реперов на многообразии M^{2n+1} со структурной группой $G = U(n) \times \{1\}$. А-реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них имеют соответственно вид

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n .

Пусть ω – форма смещения, φ – форма римановой связности ∇ на пространстве присоединенной G -структуры. На пространстве этой G -структуры форма связности φ задается формами $\{\omega_j^i\}$, форма смещения ω – формами $\{\omega^i\}$. Первая группа структурных уравнений почти контактного метрического многообразия имеет вид

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^o &= -\sqrt{-1}\Phi_{[a,b]}^o\omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^o\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},o}^o\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^o \\ &\quad - \sqrt{-1}(\Phi_{a,\hat{b}}^o + \Phi_{\hat{b},a}^o)\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi_{a,o}^o\omega^a \wedge \omega^o; \\ 2) \quad d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},c}^a\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} \\ &\quad - \sqrt{-1}\Phi_{o,b}^a\omega^b \wedge \omega^o + \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},o}^a + \sqrt{-1}\Phi_{o,\hat{b}}^a\right)\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^o; \\ 3) \quad d\omega^{\hat{a}} &= \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} \\ &\quad + \sqrt{-1}\Phi_{o,\hat{b}}^{\hat{a}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^o + \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},o}^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\Phi_{o,\hat{b}}^{\hat{a}}\right)\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^o. \end{aligned}$$

Эти уравнения были получены В. Ф. Кириченко в работе [7].

Записывая тождества, характеризующие CNK-структуру на пространстве присоединенной G -структуры, получим первую группу структурных уравнений CNK-многообразия:

$$\begin{aligned} d\omega &= 2B_a{}^b\omega^a \wedge \omega_b, \\ d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b - B_b{}^a\omega^b \wedge \omega, \\ d\omega_a &= -\omega_a{}^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega^b \wedge \omega_c + B_a{}^b\omega_b \wedge \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} B_a{}^b &= \sqrt{-1}\Phi_{o,\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\Phi_{a,\hat{b}}^o, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},c}^a, \\ B_{ab}{}^c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad \overline{B_a{}^b} = -B_b{}^a, \quad \overline{B^{ab}{}_c} = -B_{ab}{}^c \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь и далее будем считать $\omega^o = \omega$).

Применяя к этим тождествам стандартную процедуру дифференциального продолжения [7], получим вторую группу структурных уравнений CNK-многообразия:

$$\begin{aligned} d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (A_{bd}^{ac} - 2B_b{}^a B_d{}^c)\omega^d \wedge \omega_c + A_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + A_b^{acd}\omega_c \wedge \omega_d \\ &\quad - (C_{bd}^a + B_{[b}{}^h B_{d]h}{}^a)\omega^d \wedge \omega - (C_b^{ad} - B_h^{[a} B^{d]h}{}_b)\omega_d \wedge \omega, \\ dB_b{}^a &= B_b{}^g\omega_g^a - B_g{}^a\omega_b^g + (C_{bg}^a + B_{[b}{}^h B_{g]h}{}^a)\omega^g + (C_b^{ag} - B_h^{[a} B^{g]h}{}_b)\omega_g, \\ dB_{ab}{}^c &= B_{ab}{}^g\omega_g^c - B_{gb}{}^c\omega_a^g - B_{ag}{}^c\omega_b^g + B_{ab}{}^c\omega^g + B_{ab}{}^c\omega_g \\ &\quad + (B_{ab}{}^g B_g{}^c - B_{gb}{}^c B_a{}^g - B_{ag}{}^c B_b{}^g)\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{A_{cd}^{ab}} &= A_{ab}^{cd}, \quad \overline{A_{bcd}^a} = -A_a^{bcd}, \quad \overline{C_{bc}^a} = -C_a^{bc}, \\ \overline{B^{ab}{}_c} &= -B_{ab}{}^c, \quad \overline{B^{ab}{}_c} = -B_{ab}{}^c, \quad C_{bc}^a = C_{cb}^a. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (2) и (4) представляют собой системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами соответствующих структурных тензоров, а квадратные и круглые скобки означают соответственно операции альтернирования и симметризации объекта по заключенным в них индексам.

Далее, приведем несколько полезных соотношений, верных для CNK-многообразий:

$$\begin{aligned}\omega_b^a &= B^{ab}{}_c \omega^c, & \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= -B_{ab}{}^c \omega_c, & \omega_o^a &= -B_b{}^a \omega^b, \\ \omega_{\hat{o}}^{\hat{a}} &= B_a{}^b \omega_b, & \omega_a^o &= -B_a{}^b \omega_b, & \omega_{\hat{a}}^o &= B_b{}^a \omega^b.\end{aligned}\quad (5)$$

Рассматривая второе уравнение Картана связности ∇ [10] и используя соотношения (1), (3) и (5), получаем спектр тензора Римана–Кристоффеля, т.е. выражение его компонент на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned}R^a{}_{bcd} &= 2A_{bcd}^a, & R^a{}_{bcd}{}^{\hat{d}} &= A_{bc}^{ad} - 2B_b{}^a B_c{}^d - B_c{}^a B_b{}^d + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d, \\ R^a{}_{bco} &= -C_{bc}^a - B_{[b}{}^h B_{c]h}{}^a, & R^a{}_{\hat{b}cd} &= 2(B^{ab}{}_{[dc]} + B_{[c}{}^a B_{d]}{}^b), & R^a{}_{obo} &= B_b{}^h B_h{}^a, \\ R^a{}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= R^a{}_{\hat{b}co} = 0, & R^a{}_{\hat{b}co} &= 2B_h{}^{[a} B^{b]h}{}_c, & R^a{}_{o\hat{b}o} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Остальные компоненты тензора Римана–Кристоффеля можно определить из выписанных, учитывая свойства симметрии и вещественность тензора кривизны римановой связности.

В геометрии CNK-многообразий особую роль играет оператор $\mathcal{B}(X) = \nabla_X \xi$. Вычислим его компоненты на пространстве присоединенной G -структуры. Его компонентами $\{\xi_{,k}^i\}$ являются компоненты ковариантной производной структурного вектора. Из тензорного анализа известно [11], что на пространстве рассматриваемых реперов над M выполняются дифференциальные уравнения

$$d\xi^i - \xi^j \omega_j^i = \xi_{,k}^i \omega^k,$$

в частности, на пространстве присоединенной G -структуры будем иметь

$$d\xi^a - \xi^b \omega_b^a - \xi^{\hat{b}} \omega_{\hat{b}}^a - \xi^o \omega_o^a = \xi_{,k}^a \omega^k.$$

Принимая во внимание соотношения $\xi^a = \xi_a = 0$, $\xi^o = 1$, а также учитывая соотношение (5) для ω_o^a , находим

$$B_b{}^a \omega^b = \xi_{,b}^a \omega^b + \xi_{\hat{b}}^a \omega^{\hat{b}} + \xi_{,o}^a \omega.$$

Учитывая линейную независимость базисных форм $\{\omega^a, \omega_a, \omega\}$, получим

$$\xi_{,b}^a = B_b{}^a, \quad \xi_{\hat{b}}^a = 0, \quad \xi_{,o}^a = 0.$$

Далее,

$$d\xi^{\hat{a}} - \xi^b \omega_b^{\hat{a}} - \xi^{\hat{b}} \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} - \xi^o \omega_o^{\hat{a}} = \xi_{,k}^{\hat{a}} \omega^k, \quad d\xi^o - \xi^b \omega_b^o - \xi^{\hat{b}} \omega_{\hat{b}}^o - \xi^o \omega_o^o = \xi_{,k}^o \omega^k.$$

Аналогично, находим

$$\xi_{,b}^{\hat{a}} = 0, \quad \xi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -B_a{}^b, \quad \xi_{,o}^{\hat{a}} = 0, \quad \xi_{,k}^o = 0.$$

С другой стороны, из определения оператора $\mathcal{B}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_a^b &= (\mathcal{B}(E_a))^b = (\nabla_{E_a} \xi)^b = \xi_{,a}^b = B_a^b, \\ \widehat{\mathcal{B}}_a^b &= (\mathcal{B}(E_a))^{\widehat{b}} = (\nabla_{E_a} \xi)^{\widehat{b}}_{,a} = 0, \\ \mathcal{B}_a^o &= (\mathcal{B}(E_a))^o = (\nabla_{E_a} \xi)^o = \xi_{,a}^o = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{B}$ переводит распределение $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ в себя, а $\{B_b^a\}$ – это компоненты сужения оператора $\mathcal{B}$ на $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$. Итак, матрица оператора $\mathcal{B}$ в A -репере имеет вид

$$(\mathcal{B})_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_b^a & 0 \\ 0 & 0 & -B_a^b \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Поскольку $\mathcal{B}$ – тензор типа $(1, 1)$, для его компонент верно соотношение

$$d\mathcal{B}_j^i + \mathcal{B}_k^i \omega_j^k - \mathcal{B}_j^k \omega_k^i = \mathcal{B}_{i,k}^i \omega^k,$$

где $\{\mathcal{B}\}_{j,k}^i$ – компоненты $\nabla \mathcal{B}$. Отсюда, расписывая его на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (7), находим

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{b,c}^a &= C_{bc}^a + B_{[b}^h B_{c]h}^a, & \mathcal{B}_{\widehat{b},\widehat{c}}^{\widehat{a}} &= -C_a^{bc} + B_h^{[b} B^{c]h}{}_a, \\ \mathcal{B}_{o,b}^a &= -B_c^a B_b^c, & \mathcal{B}_{\widehat{b},c}^{\widehat{a}} &= -C_{ac}^b - B_{[a}^h B_{c]h}^b, \\ \mathcal{B}_{\widehat{a},b}^o &= B_c^a B_b^c, & \mathcal{B}_{b,\widehat{c}}^a &= C_b^{ac} - B_h^{[a} B^{c]h}{}_b, \\ \mathcal{B}_{o,\widehat{b}}^{\widehat{a}} &= -B_a^c B_c^b, & \mathcal{B}_{a,\widehat{b}}^o &= B_a^c B_c^b, & \mathcal{B}_{\widehat{b},c}^a &= 2B_h^{[b} B^{a]h}{}_c, & \mathcal{B}_{b,\widehat{c}}^{\widehat{a}} &= 2B_{[b}^h B_{a]h}^b,\end{aligned} \quad (8)$$

остальные компоненты тензора $\nabla \mathcal{B}$ равны 0.

Сравнивая компоненту тензора Римана–Кристоффеля $R^a{}_{boc}$ из соотношений (6) и компоненту $\mathcal{B}_{b,c}^a$ (8) оператора $\nabla \mathcal{B}$, видим, что $R^a{}_{boc} = \mathcal{B}_{b,c}^a$. Кроме того, имеем (см. (6)) $\widehat{R}^a{}_{boc} = 0$, $R^o{}_{boc} = 0$, а также из соотношений (8) $\mathcal{B}_{b,c}^{\widehat{a}} = \mathcal{B}_{b,c}^o = 0$. Но $R^a{}_{boc} = \mathcal{B}_{b,c}^a$ тогда и только тогда, когда

$$(R(E_o, E_c)E_b)^a = (\nabla_{E_c}(\mathcal{B})E_b)^a.$$

Кроме того,

$$(R(E_o, E_c)E_b)^{\widehat{a}} = (\nabla_{E_c}(\mathcal{B})E_b)^{\widehat{a}} = 0, \quad (R(E_o, E_c)E_b)^o = (\nabla_{E_c}(\mathcal{B})E_b)^o = 0.$$

Учитывая эти тождества, получим $R(E_o, E_c)E_b = \nabla_{E_c}(\mathcal{B})E_b$. Так как E_o, E_a – базисные векторы подпространства $(\mathcal{M} \oplus D_{\Phi}^{\sqrt{-1}})_p$, $p \in M$, то верно тождество

$$R(\xi, \overline{X})\overline{Y} = \nabla_{\overline{X}}(\mathcal{B})\overline{Y}, \quad \overline{X}, \overline{Y} \in D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}.$$

Значит, выполняется соотношение

$$R(\xi, \sigma X)\sigma Y = \nabla_{\sigma X}(\mathcal{B})\sigma Y, \quad X, Y \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}},$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ – проектор на $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$. Поэтому получаем

$$R\left(\xi, \frac{X - \sqrt{-1}\Phi X}{2}\right)\left(\frac{Y - \sqrt{-1}\Phi Y}{2}\right) = \nabla_{(X - \sqrt{-1}\Phi X)/2}(\mathcal{B})\left(\frac{Y - \sqrt{-1}\Phi Y}{2}\right).$$

Раскроем это выражение по линейности:

$$\begin{aligned} & R(\xi, X)Y - \sqrt{-1}R(\xi, \Phi X)Y - \sqrt{-1}R(\xi, X)(\Phi Y) - R(\xi, \Phi X)(\Phi Y) \\ &= \nabla_X(\mathcal{B})Y - \sqrt{-1}\nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})Y - \sqrt{-1}\nabla_X(\mathcal{B})(\Phi Y) - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi Y), \quad X, Y \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выделим в последнем выражении действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)(\Phi Y) &= \nabla_X(\mathcal{B})Y - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi Y), \\ R(\xi, \Phi X)Y + R(\xi, X)(\Phi Y) &= \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})Y + \nabla_X(\mathcal{B})(\Phi Y). \end{aligned}$$

Эти равенства эквивалентны, так как меняя в первом из них X на ΦX , а Y на ΦY и учитывая, что $(\Phi|_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}})^2 = -\text{id}$, получим второе равенство. Итак, равенство (9) эквивалентно следующему:

$$R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)(\Phi Y) = \nabla_X(\mathcal{B})Y - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi Y), \quad X, Y \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}.$$

Так как проектором на $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ является эндоморфизм $l = -\Phi^2$, то с учетом $\Phi^3 = -\Phi$, получим

$$R(\xi, \Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - R(\xi, \Phi X)(\Phi Y) = \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi^2 Y) - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Назовем это тождество первым тождеством кривизны CNK-многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. CNK-многообразие называется *многообразием класса R_1* , если

$$R(\Phi^2 Y, \xi)(\Phi^2 X) = R(\Phi Y, \xi)(\Phi X), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Из первого тождества кривизны следует, что CNK-многообразие принадлежит классу R_1 тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(\mathcal{B})Y = \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})(\Phi Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Теперь докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M – CNK-многообразие, тогда

$$\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = -\langle X, \mathcal{B}(Y) \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = g_{ij} \mathcal{B}_k^i X^k Y^j$. Учитывая значения компонент оператора $\mathcal{B}$ (7), получаем

$$\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = B_c^b X^c Y^{\hat{b}} - B_b^c X^{\hat{c}} Y^b.$$

Аналогично,

$$\langle X, \mathcal{B}(Y) \rangle = -B_c^b X^c Y^{\hat{b}} + B_b^c X^{\hat{c}} Y^b.$$

Сравнивая эти выражения, получаем $\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = -\langle X, \mathcal{B}(Y) \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – CNK-многообразие, $\mathcal{B}$ – оператор, определяемый формулой $\mathcal{B}(X) = \nabla_X \xi$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Тогда $\mathcal{X}(M) = \text{Im } \mathcal{B} \oplus \text{Ker } \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $X \in (\text{Im } \mathcal{B})^\perp$. Тогда для всех $Y \in \mathcal{X}(M)$ имеем $\mathcal{B}(Y) \in \text{Im } \mathcal{B}$ и $\langle \mathcal{B}(Y), X \rangle = 0$. В силу (10) верно соотношение $\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = 0$. Учитывая невырожденность метрики, находим $\mathcal{B}(X) = 0$, т.е. $X \in \text{Ker } \mathcal{B}$. Итак, для всех $X \in (\text{Im } \mathcal{B})^\perp$ выполнено $X \in \text{Ker } \mathcal{B}$, т.е. $(\text{Im } \mathcal{B})^\perp \subset \text{Ker } \mathcal{B}$.

2) Обратно, если $X \in \text{Ker } \mathcal{B}$, то $\mathcal{B}(X) = 0$. Пусть $Y \in \text{Im } \mathcal{B}$. Тогда существует $Z \in \mathcal{X}(M)$ такое, что $Y = \mathcal{B}(Z)$. Значит, $\langle X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{B}(Z) \rangle = -\langle \mathcal{B}(X), Z \rangle$. Итак, $\langle X, Y \rangle = 0$. Но $Y \in \text{Im } \mathcal{B}$, откуда $X \in (\text{Im } \mathcal{B})^\perp$. Для всех $X \in \text{Ker } \mathcal{B}$ имеем $X \in (\text{Im } \mathcal{B})^\perp$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{B} \subset (\text{Im } \mathcal{B})^\perp$. Окончательно получаем, что $(\text{Im } \mathcal{B})^\perp = \text{Ker } \mathcal{B}$. Кроме того, если $X \in \text{Ker } \mathcal{B}$, $Y \in \text{Im } \mathcal{B}$, то $\langle X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{B}(Z) \rangle = -\langle \mathcal{B}(X), Z \rangle = 0$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{B} \perp \text{Im } \mathcal{B}$. Значит, $\mathcal{X}(M) = \text{Ker } \mathcal{B} \oplus \text{Im } \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 1. Тензор $\mathcal{B}$ CNK-многообразия класса R_1 параллелен в связности $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, определяемой формами связности $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_j^i\}$, $\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i$ ($i, j \neq 0$); при этом $\tilde{\omega}_o^a = \omega_o^a + B_h^a \omega^h$, $\tilde{\omega}_a^o = \omega_a^o + B_a^h \omega_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{B}$ – тензор типа $(1, 1)$, имеем

$$d\mathcal{B}_j^i + \mathcal{B}_k^i \tilde{\omega}_j^k - \mathcal{B}_j^r \tilde{\omega}_r^i = \mathcal{B}_{j|k}^i \omega^k,$$

где $\{\mathcal{B}_{j|k}^i\}$ – компоненты $\tilde{\nabla} \mathcal{B}$. В частности,

$$d\mathcal{B}_b^a + \mathcal{B}_c^a \tilde{\omega}_b^c + \mathcal{B}_c^a \tilde{\omega}_b^{\hat{c}} + \mathcal{B}_o^a \tilde{\omega}_b^o - \mathcal{B}_b^c \tilde{\omega}_c^a - \mathcal{B}_b^{\hat{c}} \tilde{\omega}_c^a - \mathcal{B}_b^o \tilde{\omega}_c^a = \mathcal{B}_{b|k}^a \omega^k.$$

Учитывая значения компонент оператора $\mathcal{B}$ (7) и (3), получим

$$\mathcal{B}_{b|k}^a \omega^k = (C_{bc}^a + B_{[b}^h B_{c]h}^a) \omega^c + (C_b^{ac} - B_h^{[a} B^{c]h}{}_b) \omega_c.$$

Так как CNK-многообразие M принадлежит классу R_1 , выражения в скобках обращаются в 0, следовательно, $\mathcal{B}_{b|k}^a \omega^k = 0$, а это равносильно равенству $\mathcal{B}_{b|k}^a = 0$. Вычисляя аналогично остальные компоненты тензора $\tilde{\nabla} \mathcal{B}$, находим $\mathcal{B}_{j|k}^a = 0$ ($i, j, k = 1, \dots, 2n+1$), $\tilde{\nabla} \mathcal{B} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если M – CNK-многообразие класса R_1 , то $\text{Im } \mathcal{B}$ и $\text{Ker } \mathcal{B}$ – распределения определенной размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рангом CNK-структуры класса R_1 называется размерность распределения $\text{Im } \mathcal{B}$, т.е. число $\text{rk } \mathcal{B}$. Если $\text{rk } \mathcal{B} = \dim M - 1$, то CNK-многообразие M называется CNK-многообразием максимального ранга.

Рассмотрим теперь специализированную G -структуру на многообразии M класса R_1 , состоящую из A -реперов, первые r векторов $\{E_\alpha\}$ которых лежат в $\text{Im } \mathcal{B}_p \oplus \mathbb{C}$, а остальные $\{E_\varphi\}$ – в $\text{Ker } \mathcal{B}_p \oplus \mathbb{C}$. Структурные уравнения многообразия M на пространстве этой G -структуры запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 d\omega &= 2B_\alpha{}^\beta \omega^\alpha \wedge \omega_\beta, \\
 d\omega^\alpha &= \theta_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \theta_\varphi^\alpha \wedge \omega^\varphi + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + B^{\alpha\beta}{}_\varphi \omega^\varphi \wedge \omega_\beta \\
 &\quad + B^{\alpha\psi}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\psi + B^{\alpha\psi}{}_\varphi \omega^\varphi \wedge \omega_\psi, \\
 d\omega_\alpha &= -\theta_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - \theta_\alpha^\varphi \wedge \omega_\varphi - B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta - B_{\alpha\beta}{}^\varphi \omega_\varphi \wedge \omega^\beta \\
 &\quad - B_{\alpha\psi}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\psi - B_{\alpha\psi}{}^\varphi \omega_\varphi \wedge \omega^\psi, \\
 d\omega^\varphi &= \theta_\beta^\varphi \wedge \omega^\beta + \theta_\psi^\varphi \wedge \omega^\psi + B^{\varphi\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + B^{\varphi\beta}{}_\psi \omega^\psi \wedge \omega_\beta \\
 &\quad + B^{\varphi\psi}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\psi + B^{\varphi\psi}{}_\xi \omega^\xi \wedge \omega_\psi, \\
 d\omega_\varphi &= -\theta_\varphi^\beta \wedge \omega_\beta - \theta_\varphi^\psi \wedge \omega_\psi - B_{\varphi\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta - B_{\varphi\beta}{}^\psi \omega_\psi \wedge \omega^\beta \\
 &\quad - B_{\varphi\psi}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\psi - B_{\varphi\psi}{}^\xi \omega_\xi \wedge \omega^\psi,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\theta_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha + B_\beta{}^\alpha \omega, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r, \quad \varphi, \psi, \xi = r+1, \dots, 2n+1.$$

На пространстве специализированной G -структуры имеем

$$B_\alpha{}^\gamma = 0, \quad B_\varphi{}^\alpha = 0, \quad B_\varphi{}^\psi = 0.$$

Продифференцируем эти соотношения внешним образом, учитывая выражение (3) для $dB_\alpha{}^\beta$ и принадлежность многообразия M классу R_1 :

$$\theta_\beta^\varphi = 0, \quad \theta_\varphi^\beta = 0. \tag{12}$$

С учетом (12) система уравнений (11) примет вид

$$\begin{aligned}
 d\omega &= 2B_\alpha{}^\beta \omega^\alpha \wedge \omega_\beta, \\
 d\omega^\alpha &= \theta_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + B^{\alpha\beta}{}_\varphi \omega^\varphi \wedge \omega_\beta + B^{\alpha\psi}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\psi + B^{\alpha\psi}{}_\varphi \omega^\varphi \wedge \omega_\psi, \\
 d\omega_\alpha &= -\theta_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta - B_{\alpha\beta}{}^\varphi \omega_\varphi \wedge \omega^\beta - B_{\alpha\psi}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\psi - B_{\alpha\psi}{}^\varphi \omega_\varphi \wedge \omega^\psi, \\
 d\omega^\varphi &= \theta_\psi^\varphi \wedge \omega^\psi + B^{\varphi\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + B^{\varphi\beta}{}_\psi \omega^\psi \wedge \omega_\beta + B^{\varphi\psi}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\psi + B^{\varphi\psi}{}_\xi \omega^\xi \wedge \omega_\psi, \\
 d\omega_\varphi &= \theta_\varphi^\psi \wedge \omega_\psi - B_{\varphi\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta - B_{\varphi\beta}{}^\psi \omega_\psi \wedge \omega^\beta - B_{\varphi\psi}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\psi - B_{\varphi\psi}{}^\xi \omega_\xi \wedge \omega^\psi.
 \end{aligned} \tag{13}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. CNK-многообразие M назовем *локально конформным почти контактным метрическим многообразием с замкнутой фундаментальной 2-формой* Ω , или *Сс-многообразием*, если для всех $p \in M$ существует $\sigma \in C^\infty(U_p)$ такое, что $\{U_p, e^{-\sigma}\xi|_{U_p}, e^\sigma\eta|_{U_p}, e^{2\sigma}g|_{U_p}\}$ – почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω .

Этот класс многообразий является контактным аналогом локально конформно-келеровых многообразий, широко изучаемых в литературе [12]–[15]. Как и в случае локально конформно-келеровых многообразий, легко показать, что M является Сс-многообразием тогда и только тогда, когда $d\Omega = \Theta \wedge \Omega$, $d\Theta = 0$, $\Theta(\xi) = 0$, где $\Theta = \frac{1}{n-1}\delta\Omega \circ \Phi$ (δ – оператор кодифференцирования), т.е. Θ является контактным аналогом форм Ли. При этом выражения для тензоров $B^{ab}{}_c$ и $B_{ab}{}^c$ имеют вид

$$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}, \quad B_{ab}{}^c = \alpha_{[b}\delta_a^c],$$

где $\{\alpha^a, \alpha_a, \alpha_o\}$ – компоненты формы Ли Θ в кобазисе $\{\omega^i\}$.

Пусть распределение $\text{Im } \mathcal{B}$ инволютивно. Тогда оно вполне интегрируемо, и в силу (13) выполняются следующие условия:

$$B^{\alpha\beta}{}_\varphi = 0, \quad B^{\alpha\psi}{}_\gamma = 0, \quad B^{\varphi\psi}{}_\gamma = 0, \quad B^{\alpha\psi}{}_\varphi = 0. \quad (14)$$

Пусть теперь CNK-многообразие является Сс-многообразием. Из (14) в силу строения тензоров $B^{ab}{}_c$ и $B_{ab}{}^c$ находим

$$\alpha^\psi = \alpha^\beta = 0, \quad \alpha_\psi = \alpha_\beta = 0. \quad (15)$$

Учитывая соотношения (15), получаем

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = B_{\alpha\beta}{}^\gamma = B^{\varphi\psi}{}_\xi = B_{\varphi\psi}{}^\xi = 0.$$

Тогда система уравнений (13) примет вид

$$d\omega = 2B_\alpha{}^\beta\omega^\alpha \wedge \omega_\beta, \quad d\omega^\alpha = \theta_\beta{}^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad d\omega_\alpha = -\theta_\alpha{}^\beta \wedge \omega_\beta, \quad d\omega^\varphi = \theta_\psi{}^\varphi \wedge \omega^\psi, \quad d\omega_\varphi = \theta_\varphi{}^\psi \wedge \omega_\psi. \quad (16)$$

Из соотношений (16) видно, что структурные уравнения многообразия M распадаются на две группы: первые три уравнения представляют собой структурные уравнения квазисасакиева многообразия максимального ранга, а последние два – структурные уравнения келерова многообразия [12], [13]. Отсюда теми же рассуждениями, что и в работе [16], получаем, что многообразие M локально эквивалентно произведению квазисасакиева многообразия максимального ранга и келерова многообразия.

Очевидно, что верно и обратное: если многообразие M имеет такую структуру, то его распределение $\text{Im } \mathcal{B}$ инволютивно. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – Сс-многообразие класса R_1 . Распределение $\text{Im } \mathcal{B}$ на многообразии M инволютивно тогда и только тогда, когда многообразие M локально эквивалентно произведению квазисасакиева многообразия максимального ранга и келерова многообразия. В частности, такое многообразие является квазисасакиевым.

Далее, пусть M – CNK-многообразие. Сравним значения компонент R^a_{obo} тензора Римана–Кристоффеля и $\mathcal{B}^a_{o,b}$ оператора $\nabla \mathcal{B}$, заданные формулами (6) и (8): $R^a_{obo} = -\mathcal{B}^a_{o,b}$. Кроме того, имеем $R^{\hat{a}}_{obo} = R^o_{obo} = 0$, $\mathcal{B}^{\hat{a}}_{o,b} = \mathcal{B}^o_{o,b} = 0$. Но из $R^a_{obo} = -\mathcal{B}^a_{o,b}$ следует, что

$$(R(E_b, E_o)E_o)^a = -(\nabla_{E_b}(\mathcal{B})E_o)^a,$$

а также

$$(R(E_b, E_o)E_o)^{\hat{a}} = (\nabla_{E_b}(\mathcal{B})E_o)^{\hat{a}}, \quad (R(E_b, E_o)E_o)^o = (\nabla_{E_b}(\mathcal{B})E_o)^o.$$

Из этих тождеств имеем $R(E_b, E_o)E_o = -\nabla_{E_b}(\mathcal{B})E_o$. Рассуждая как и выше, получаем

$$R(X, \xi)\xi = -\nabla_X(\mathcal{B})\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (17)$$

Назовем последнее тождество вторым тождеством кривизны CNK-многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. CNK-многообразие M называется *многообразием класса R_2* , если $R(X, \xi)\xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Из (17) следует, что CNK-многообразие принадлежит классу R_2 тогда и только тогда, когда $\nabla_X(\mathcal{B})\xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Из соотношений (7), (8) получаем, что если CNK-многообразие является многообразием класса R_2 , то $\mathcal{B}^2 = 0$. С другой стороны, по предложению 1 выполняется тождество

$$\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = -\langle X, \mathcal{B}(Y) \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Поэтому $\langle \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y) \rangle = -\langle X, \mathcal{B}^2(Y) \rangle = 0$, т.е. $\langle \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y) \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. В частности, $\langle \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X) \rangle = 0$, т.е. $\|\mathcal{B}(X)\| = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$, значит, и $\mathcal{B}(X) = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Следовательно, $\mathcal{B} = 0$. Обратное очевидно. Следовательно, доказана

ТЕОРЕМА 3. CNK-многообразие M принадлежит классу R_2 тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} = 0$.

Пусть CNK-многообразие M принадлежит классу R_2 . Тогда $B_a^b = 0$. Легко показать, что для CNK-многообразия тензор Нейенхайса будет иметь вид

$$N(X, Y) = -\frac{1}{2}\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle \xi, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В силу того, что многообразие M принадлежит классу R_2 , получаем $N(X, Y) = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Это условие означает интегрируемость почти контактной метрической структуры [6]. Принимая во внимание обозначение (2) для B_a^b и принадлежность CNK-многообразия классу R_2 , будем иметь $\eta(\nabla_{E_{\hat{\Phi}}}(\Phi)E_a) = 0$. Так как $E_a, E_{\hat{\Phi}}$ – базисные векторы пространств $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно, имеем

$$\eta(\nabla_X(\Phi)Y) = 0, \quad X \in D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}, \quad Y \in D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\eta(\nabla_{\bar{\sigma}\tilde{X}}(\Phi)(\sigma\tilde{Y})) = 0,$$

где $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}$, а $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi)$ – проекторы на распределения $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ соответственно. Раскроем это выражение по линейности

$$\eta(\nabla_{\tilde{X}}(\Phi)\tilde{Y} + \nabla_{\Phi\tilde{X}}(\Phi)(\Phi\tilde{Y}) - \sqrt{-1}\nabla_{\tilde{X}}(\Phi)(\Phi\tilde{Y}) + \sqrt{-1}\nabla_{\Phi\tilde{X}}(\Phi)\tilde{Y}) = 0.$$

Как и выше, это тождество эквивалентно обращению в 0 его вещественной части, т.е.

$$\eta(\nabla_{\tilde{X}}(\Phi)\tilde{Y} + \nabla_{\Phi\tilde{X}}(\Phi)(\Phi\tilde{Y})) = 0.$$

Учитывая, что $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi$, имеем

$$\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y + \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)(\Phi^2 Y)) = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (18)$$

Кроме того, компонента $\Phi_{\hat{a}, \hat{b}}^o$ тензора $\nabla \Phi$ CNK-многообразия имеет значение $\Phi_{\hat{a}, \hat{b}}^o = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)(\Phi^2 Y)) = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (19)$$

Очевидно, что выражения (18), (19) эквивалентны тождеству

$$\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y) = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Пусть теперь CNK-структура интегрируема. Рассмотрим системы Пфаффа: $\omega = 0$ и $\omega^a = \omega_a = 0$, $a = 1, \dots, n$. Эти системы вполне интегрируемы в силу (1). Значит, через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности каждой из систем. Ясно, что интегральное многообразие, определяемое системой Пфаффа $\omega = 0$, имеет размерность $2n$, а интегральное многообразие системы $\omega^a = \omega_a = 0$ имеет размерность 1.

Далее, из соотношений (1) непосредственно следует, что вторая квадратичная форма интегральных многообразий каждого из распределений – нулевая, и следовательно, эти интегральные многообразия являются вполне геодезическими.

Кроме того, распределения, определяемые системами Пфаффа $\omega = 0$ и $\omega^a = \omega_a = 0$, взаимно-дополнительные. В самом деле, система Пфаффа $\omega = 0$ определяет распределение $\mathcal{L} = \text{Ker } \eta$, а система Пфаффа $\omega^a = \omega_a = 0$ определяет распределение $\mathcal{M} = \text{Ker } d\eta$. Очевидно, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}$, $\mathcal{L} \perp \mathcal{M}$, $\mathcal{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. При этом первая группа структурных уравнений CNK-многообразия имеет вид

$$d\omega = 0, \quad d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}^c \omega^c \wedge \omega_b, \quad d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega^b \wedge \omega_c. \quad (20)$$

Распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ инвариантны относительно оператора Φ . Значит, можно рассмотреть сужение оператора Φ на эти распределения. Сужение $\Phi|_{\mathcal{L}}$ определяет почти комплексную структуру на интегральных многообразиях этого распределения. Последние две группы уравнений (20) являются структурными уравнениями эрмитова многообразия. С учетом сделанных замечаний так же, как и в работе [16], получаем, что многообразие M локально эквивалентно произведению эрмитова многообразия на вещественную прямую. Здесь под локальной эквивалентностью, как и в [16], понимается диффеоморфизм, сохраняющий дополнительную структуру многообразия (в данном случае, почти контактную метрическую структуру). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Для CNK-многообразия M эквивалентны следующие утверждения:

- 1) M принадлежит классу R_2 ;
- 2) справедливо тождество $\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y) = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$;
- 3) M имеет интегрируемую структуру;
- 4) M локально эквивалентно произведению эрмитова многообразия на вещественную прямую.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. Ф. Кириченко за постановку проблемы, внимание и помощь, оказанные в ходе работы над настоящей статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with contact metric structures // J. Math. Soc. Japan. 1964. V. 14. P. 249–271.
- [2] Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1976. V. 2. P. 171–186.
- [3] Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank $2p + 1$ // J. Differential Geom. 1971. V. 5. № 3–4. P. 317–324.
- [4] Ianus S., Visinescu M. Kaluza–Klein theory with scalar fields on generalised Hopf manifolds // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. № 5. P. 1317–1325.
- [5] Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. V. 28. № 4. P. 601–612.
- [6] Goldberg S., Yano K. Integrability of almost cosymplectic structures // Pacific J. Math. 1969. V. 31. № 2. P. 373–382.
- [7] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
- [8] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
- [9] Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 48. № 4. С. 711–734.
- [10] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [11] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960.
- [12] Кириченко В. Ф. Локально конформно-келеровы многообразия постоянной секционной кривизны // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 354–363.
- [13] Кириченко В. Ф. Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 5. С. 57–66.
- [14] Vaisman I. On locally conformal Kähler manifolds // Israel J. Math. 1976. V. 24. № 3–4. P. 338–351.
- [15] Vaisman I. On locally and globally conformal Kähler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 2. P. 533–542.
- [16] Кириченко В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1208–1223.