Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Приближение функций ограниченной p -вариации полиномами по системе Фабера–Шаудера, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 363–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:31:35

УДК 517

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p -ВАРИАЦИИ ПОЛИНОМАМИ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА–ШАУДЕРА

С. С. Волосивец

В работе изучается наилучшее приближение полиномами по системе функций Фабера–Шаудера в пространстве $C_p[0, 1]$. Уточняется постоянная в оценке неравенства Джексона для наилучшего приближения в метрике $C_p[0, 1]$ и оценка модуля непрерывности $\omega_{1-1/p}$.

Библиография: 12 названий.

1. Определения и вспомогательные факты. Напомним, что система функций Фабера–Шаудера задается следующим образом (см. [1, с. 214]): $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$, а при $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, 2^k$, функция $\varphi_n(x)$ равна 1 в точке $(2i - 1)/2^{k+1}$, равна 0 на $[0, 1] \setminus ((i - 1)/2^k, i/2^k)$ и является линейной и непрерывной на $[(i - 1)/2^k, (2i - 1)/2^{k+1}]$ и $[(2i - 1)/2^{k+1}, i/2^k]$. Отсюда легко следует, что

$$\varphi_1(x) = \int_0^x h_1(t) dt, \quad \varphi_n(t) = 2^{k/2+1} \int_0^x h_n(t) dt, \quad (1)$$

где $\{h_n(t)\}$ – функции Хаара (см. [1, с. 76–77]), а n , как и раньше, представлено в виде $2^k + i$. Как известно, [1, с. 215], если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$$

сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$ к конечной функции $f(x)$, то $A_0 = 1$, $A_1 = f(1) - f(0)$,

$$A_n = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right) \right) \quad (2)$$

при $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq 2^k$. В свою очередь, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(t),$$

где $A_n(f)$ вычисляются по формулам (2), сходится равномерно к непрерывной функции $f(x)$. Его частичную сумму

$$\sum_{k=0}^n A_k(f) \varphi_k(t)$$

обозначим через $F_n(f)(t)$.

Пусть $1 < p < \infty$ и функция $f(x)$ определена на $[a, b]$, а $\xi = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ — разбиение $[a, b]$. Положим по определению (см. [2])

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta, [a, b]) := \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p} : |\xi| \leq \delta \right\}, \quad (3)$$

где $|\xi| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$. Через $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ обозначим $\omega_{1-1/p}(f, \delta[0, 1])$, а через $V_p(f)$ обозначим $\omega_{1-1/p}(f, 1)$. Вводится также модуль непрерывности более высокого порядка

$$\omega_{2-1/p}(f, \delta) = \sup \{ \omega_{1-1/p}(f(x+h) - f(x), h, [0, 1-h]) : 0 \leq h \leq \delta \}.$$

Отметим два очевидных свойства этих модулей:

$$\omega_{2-1/p}(f, \delta) \leq 2\omega_{1-1/p}(f, \delta), \quad (4)$$

$$\omega_{1-1/p}^p(f, \delta, [a, b]) \geq \omega_{1-1/p}^p(f, \delta, [a, c]) + \omega_{1-1/p}^p(f, \delta, [c, b]), \quad (5)$$

где $a < c < b$. Следующая лемма известна (см. [3]), но ее доказательство нигде не приводилось.

ЛЕММА 1. Для ограниченной функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, и $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства ($\delta \leq 1/n$)

$$\omega_{1-1/p}(f, n\delta) \leq n^{1-1/p} \omega_{1-1/p}(f, \delta),$$

$$\omega_{2-1/p}(f, n\delta) \leq n^{2-1/p} \omega_{2-1/p}(f, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство легко следует из первого с помощью тождества

$$f(x + nh) - f(x) = \sum_{k=1}^n (f(x + kh) - f(x + (k-1)h)).$$

Чтобы доказать первое неравенство возьмем разбиение $\{x_i\}_0^m$ такое, что $x_i - x_{i-1} \leq n\delta$, $1 \leq i \leq m$. Рассмотрим новое разбиение из точек $y_{ij} = x_{i-1} + j(x_i - x_{i-1})/n$, $0 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n (f(y_{ij}) - f(y_{i,j-1})) \right|^p \\ &\leq n^{p-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f(y_{ij}) - f(y_{i,j-1})|^p. \end{aligned}$$

Осталось возвести обе части неравенства в степень $1/p$ и перейти к верхним граням. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как и для модулей целого порядка, легко получить из леммы 1 неравенство $\omega_{k-1/p}(f, u)u^{1/p-k} \leq (2/t)^{k-1/p} \omega_{k-1/p}(f, t)$, где $k = 1, 2$ и $1 \geq u \geq t > 0$.

ЛЕММА 2 (см. [2, п. 2.4]). Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $f' \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Тогда $\omega_{1-1/p}(f, \delta) \leq \|f'\|_{L_p} \delta^{1-1/p}$.

ЛЕММА 3 (см. [4, с. 210]). Пусть $p > 0$ и $a_n \in \mathbb{R}$, $2^m < n \leq 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{h_n\}_1^\infty$ – система функций Хаара. Тогда

$$\left\| \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n h_n \right\|_{L_p} = 2^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Пространство $C_p[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых $\omega_{1-1/p}(f, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, с нормой $\|f\|_p = \max(V_p(f), \|f\|_\infty)$ становится банаховым пространством. Здесь $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$ и $C_\infty[0, 1]$ отождествляется с пространством $C[0, 1]$ непрерывных функций. При $1 < p < \infty$ имеет место вложение $C_p[0, 1] \subset C[0, 1]$. Наилучшее приближение $f \in C_p[0, 1]$ линейными комбинациями функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ по норме $\|\cdot\|_p$ обозначим через $E_n(f)_p$. Приведем две цепочки простых неравенств, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2^m < k \leq 2^{m+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} |A_k(f)| &\leq \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |A_n(f)|^p \right)^{1/p} = \frac{1}{2^{1/p}} \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} V_p^p(A_n \varphi_n) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(V_p^p \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} A_n \varphi_n \right) \right)^{1/p} \leq \|F_{2^{m+1}}(f) - f + f - F_{2^m}(f)\|_p \leq 2E_{2^m}(f)_p \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$|A_k(f)| \leq \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |A_n(f)|^p \right)^{1/p} \leq \frac{\omega_{2-1/p}(f, 2^{-m-1})}{2} \leq \omega_{1-1/p}(f, 2^{-m-1}). \quad (7)$$

Для доказательства (6) надо воспользоваться свойством (5) при $\delta = 1$ и тем, что носители $\varphi_n(x)$, $2^m < n \leq 2^{m+1}$, пересекаются лишь в граничных точках. Для доказательства (7) надо заметить, что в силу (2) сумма из (7) есть часть суммы

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n |f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

где $f_1(x) = f(x + 2^{-m-1}) - f(x)$, а разбиение $\{x_i\}$ есть $\{i/2^{m+1} : 0 \leq i \leq 2^{m+1}\}$. Последнее неравенство из (7) следует из (4).

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p[0, 1]$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_p \leq 2^{4-3/p} \omega_{1-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right).$$

Если же функция $\omega(\delta) = \omega_{2-1/p}(f, \delta)$ такова, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\omega(1/j)}{j} \leq B \omega \left(\frac{1}{n} \right), \quad (8)$$

то

$$E_n(f)_p \leq 2^{3-1/p} B \omega_{2-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение известно с другой константой (см. [5]) и доказывается аналогично теореме 1 из [6] благодаря тому факту, что $F_{2^n}(f)(x)$ и $f(x)$ совпадают в точках $i/2^n$, $0 \leq i \leq 2^n$ (см. [1, с. 216]). Кроме того, $\omega_{1-1/p}(F_{2^n}(f), 2^{-n}) \leq \omega_{1-1/p}(f, 2^{-n+1})$, ибо в силу непрерывности f для любых $x_1, x_2 \in [(i-1)/2^n, (i+1)/2^n]$, $0 < i < 2^n$, таких, что $|x_1 - x_2| < 2^{-n}$, найдутся $y_1, y_2 \in [(i-1)/2^n, (i+1)/2^n]$, со свойством $F_{2^n}(f)(x_i) = f(y_i)$. Все остальные рассуждения такие же, как в теореме 1 из [6].

Для доказательства второго утверждения запишем

$$\|f - F_{2^m}(f)\|_p = \left\| \sum_{n=2^m+1}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(t) \right\|_p \leq \sum_{j=m}^{\infty} \left\| \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} A_n(f) \varphi_n(t) \right\|_p. \quad (9)$$

Выражение из правой части (9) под знаком нормы обозначим через $\Phi_j(t)$. Эта функция представляет собой [1, с. 215–216] ломанную со значениями A_n в точках $(2i-1)/2^{j+1}$ и нулевыми значениями в точках $i/2^j$, $1 \leq i \leq 2^j$. Других изломов, кроме как в точках вида $i/2^{j+1}$, $0 \leq i \leq 2^{j+1}$, у нее нет. Легко видеть, что $V_p(\Phi_j)$ достигается на разбиении, состоящем из точек такого вида, и каждое слагаемое из суммы внутри скобок в (3) будет иметь вид $|A_l - 0|^p$ или $|A_l - A_k|^p$, что не превосходит $2^{p-1}(|A_l|^p + |A_k|^p)$. Учитывая (7) и то, что каждое A_l может входить в два слагаемых, имеем

$$V_p(\Phi_j(t)) \leq \left(2^{p-1} 2 \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |A_n|^p \right)^{1/p} \leq \frac{2\omega_{2-1/p}(f, 2^{-j-1})}{2} = \omega_{2-1/p}(f, 2^{-j-1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f - F_{2^n}(f)\|_p &\leq \sum_{j=m}^{\infty} \omega_{2-1/p}(f, 2^{-j-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=2^m+1}^{\infty} \frac{\omega_{2-1/p}(f, 1/n)}{n} \leq 2B\omega_{2-1/p}(f, 2^{-m}) \end{aligned}$$

в силу условия (8). При $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, получаем

$$\begin{aligned} E_n(f)_p &\leq E_{2^k}(f)_p \leq 2B\omega_{2-1/p}(f, 2^{-k}) \\ &\leq 2^{3-1/p} B\omega_{2-1/p}(f, 2^{-k-1}) \leq 2^{3-1/p} B\omega_{2-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

с помощью леммы 1. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p[0, 1]$. Тогда

$$\omega_{1-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq 2^4 \cdot n^{1/p-1} \sum_{j=1}^n j^{-1/p} E_{j-1}(f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова начнем со случая $n = 2^m$. Запишем очевидные неравенства

$$\begin{aligned}\omega_{1-1/p}(f, 2^{-m}) &\leq \omega_{1-1/p}(f - F_{2^m}(f), 2^{-m}) + \omega_{1-1/p}(F_{2^m}(f), 2^{-m}) \\ &\leq E_{2^m}(f)_p + \sum_{k=1}^m \omega_{1-1/p}(F_{2^k} - F_{2^{k-1}}, 2^{-m}) + \omega_{1-1/p}(F_1, 2^{-m}).\end{aligned}\quad (10)$$

В силу равенств (1) и леммы 2

$$\omega_{1-1/p}(F_{2^k} - F_{2^{k-1}}, 2^{-m}) \leq 2^{m(1/p-1)} \left\| \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} A_n(f) h_n \right\|_{L_p} \cdot 2^{(k+1)/2}.$$

Согласно же лемме 3 последнее выражение можно записать как

$$2^{m(1/p-1)} \cdot 2^{(k+1)/2} \cdot 2^{(k-1)(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} |A_n(f)|^p \right)^{1/p},$$

что в силу (6) не превосходит $2^{1/p+1} \cdot 2^{(k-m)(1-1/p)} E_{2^{k-1}}(f)_p$. Что касается последнего слагаемого из правой части (10), то по лемме 2

$$\begin{aligned}\omega_{1-1/p}(F_1(x), 2^{-m}) &= \omega_{1-1/p}(A_1 x, 2^{-m}) \leq |f(1) - f(0)| 2^{m(1/p-1)} \\ &\leq V_p(f) 2^{m(1/p-1)} = E_0(f)_p 2^{m(1/p-1)}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\omega_{1-1/p}(f, 2^{-m}) &\leq 2^{1/p+1} \frac{\sum_{k=1}^m 2^{k(1-1/p)} E_{2^{k-1}}(f)_p + E_0(f)_p}{2^{m(1-1/p)}} \\ &\leq 2^{1/p+1} \frac{E_0(f)_p + 2^{2-1/p} \sum_{j=1}^{2^m-1} j^{-1/p} E_j(f)_p}{2^{m(1-1/p)}} \\ &\leq 2^{3+1/p} \frac{\sum_{j=0}^{2^m-1} (j+1)^{-1/p} E_j(f)_p}{2^{m(1-1/p)}}.\end{aligned}$$

В общем случае пусть $2^{m-1} < n \leq 2^m$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_{1-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) &\leq \omega_{1-1/p}(f, 2^{-m+1}) \leq 2^{1-1/p} \omega_{1-1/p}(f, 2^{-m}) \\ &\leq 2^4 \frac{\sum_{j=0}^{2^m-1} (j+1)^{-1/p} E_j(f)_p}{2^{m(1-1/p)}} \leq 2^4 \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{-1/p} E_j(f)_p}{n^{1-1/p}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $p = \infty$ результат, аналогичный теореме 2, получен Чисельским [7]. И при $p = \infty$, и при $1 < p < \infty$ обратная теорема для системы Фабера-Шаудера совпадает по форме с аналогичной теоремой для тригонометрической системы (в случае $p = \infty$ см., например, [8, с. 344], случай $k = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теоремах 1 и 2 $E_n(f)_p$ можно рассматривать как наилучшее приближение по системе Франклина (см. [1, с. 288]).

Нетрудно видеть, что при $n = 2^m + i$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, 2^m$, справедливо равенство $\|\varphi_n\|_{L_2} = 2^{-m/2}/3^{1/2}$. Рассмотрим нормированную в $L_2[0, 1]$ систему из $\varphi_{n2}(t) = 2^{m/2}3^{1/2}\varphi_n(t)$ при $n \geq 2$ и соответственно нормированных $\varphi_{02}(t)$ и $\varphi_{12}(t)$. Результаты об абсолютной сходимости рядов по такой системе формулируются аналогично соответствующим результатам для системы Хаара (см. [6]) и мультипликативных систем Виленкина–Прайса (см. [9]). Отличие от случая систем Виленкина–Прайса заключается в единой формулировке для случаев $1 < p \leq 2$ и $2 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C_p[0, 1]$, $\gamma - \beta/2 - \beta/p > -1$, $0 < \beta < p$, $p > 1$, $a_n = a_n(f)$ – коэффициенты f по системе $\{\varphi_{n2}\}_0^\infty$. Тогда, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma - \beta/2 - \beta/p} E_n^\beta(f)_p,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |a_n|^\beta$$

также сходится. Если $\{E'_n\}_1^\infty$ – убывающая последовательность, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma - \beta/2 - \beta/p} (E'_n)^\beta = \infty, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

то существует $f_0 \in C_p[0, 1]$ такая, что $E_n(f_0)_p \leq E'_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |a_n(f_0)|^\beta = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta/p + 1/q = 1$. Поскольку $a_n = A_n/(2^{m/2}3^{1/2})$ при $n = 2^m + i$, $1 \leq i \leq 2^m$, то в силу неравенства Гёльдера и (6) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n^\gamma |a_n|^\beta &\leq \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n^{\gamma q} \right)^{1/q} \left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_n|^p \right)^{\beta/p} \\ &= O(2^{(m+1)(1+\gamma q)/q} \cdot 2^{-m\beta/2} E_{2^m}^\beta(f)_p) \\ &= O(2^{m(1+\gamma - \beta/p - \beta/2)} E_{2^m}^\beta(f)_p) \\ &= O\left(\sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} n^{\gamma - \beta/p - \beta/2} E_n^\beta(f)_p \right). \end{aligned}$$

Суммируя по m , получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся идеей С. Б. Стечкина [10], примененной им к тригонометрическим рядам. В силу простоты функций Фабера–Шаудера воплощение этой идеи в данном случае проще, чем в [10]. Рассмотрим

$$B_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \varphi_k(x).$$

Ясно, что $\|B_n\|_\infty = 1$, а $\|B_n\|_p = 2^{n/p}$. Пусть $u_n = (E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}})2^{-n/p}$ и рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n B_n(x).$$

Тогда

$$E_{2^k}(f_0)_p \leq \left\| f_0 - \sum_{n=1}^k u_n B_n \right\|_p \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \|B_n(x)\|_p = E'_{2^{k+1}}.$$

При $2^k < n \leq 2^{k+1}$ имеем $E_n(f_0)_p \leq E_{2^k}(f_0)_p \leq E'_{2^{k+1}} \leq E'_n$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^\gamma |a_n(f_0)|^\beta &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} n^\gamma \right) \left(\frac{u_k}{2^{k/2} 3^{1/2}} \right)^\beta \\ &\geq C(\gamma, \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1+\gamma-\beta/2-\beta/p)} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}})^\beta \\ &\geq C(\gamma, \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1+\gamma-\beta/2-\beta/p)} ((E'_{2^k})^\beta - (E'_{2^{k+1}})^\beta) \\ &\geq C_1(\gamma, \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1+\gamma-\beta/2-\beta/p)} (E'_{2^k})^p \\ &\geq C_2(\gamma, \beta, p) \sum_{n=2}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2-\beta/p} (E'_n)^\beta = \infty. \end{aligned}$$

При доказательстве последнего неравенства произведена перегруппировка и использовано условие $\gamma + 1 - \beta/2 - \beta/p > 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/p-\beta/2} \omega_{1-1/p}^\beta(f, 1/n).$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |a_n|^\beta$$

также сходится. Если же $\omega(\delta)$ – непрерывная, строго возрастающая на $[0, 1]$, равная 0 в нуле функция такая, что

$$\omega(t)t^{1/p-1} \leq C\omega(u)u^{1/p-1} \quad \text{при } t > u,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/p-\beta/2}\omega^{\beta}\left(\frac{1}{n}\right) = \infty, \quad \text{где } \gamma < \frac{3\beta}{2} - 1,$$

то существует функция $f_0 \in C_p[0, 1]$ такая, что $\omega_{1-1/p}(f_0, \delta) = O(\omega(\delta))$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|a_n(f_0)|^{\beta}$$

расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы следует из первых утверждений теорем 1 и 3. Для доказательства второго утверждения воспользуемся леммой из [11], являющейся обобщением леммы 3 из [10]. Пусть $k > 0, \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, так что $\alpha - k\beta < -1$, а последовательность $\{u_n\}_1^{\infty}$ такова, что существует $C_1 > 0$, для которого $0 < n^k u_n \leq C_1 m^k u_m$ при $n < m$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} u_n^{\beta}$$

расходится, то существует последовательность $\{v_n\}_1^{\infty}$ такая, что

- а) $v_n \downarrow 0, v_n \leq u_n$;
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} v_n^{\beta} = \infty$;
- в) $\sum_{m=1}^n v_m m^{k-1} = O(n^k u_n)$.

Пусть теперь $k = 1 - 1/p, u_n = \omega(1/n), \alpha = \gamma - \beta/2 - \beta/p$. Тогда условие $\alpha - k\beta < -1$ превращается в условие $\gamma < 3\beta/2 - 1$. По теореме 3 существует функция $f_0 \in C_p[0, 1]$ такая, что $E_n(f_0)_p = O(v_n)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|a_n|^{\beta} = \infty.$$

Но по теореме 2 в силу в) $\omega_{1-1/p}(f, 1/n) = O(\omega(1/n))$, откуда обычным образом с использованием леммы 1 или замечания 1 получаем $\omega_{1-1/p}(f, \delta) = O(\omega(\delta))$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Лемма из [11] сформулирована при $k \in \mathbb{N}$, но анализ доказательства показывает, что это ограничение не существенно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 4 при $p = \infty$ доказана А. П. Горячевым [12] прямым путем без использования теоремы Чисельского и доказательства теоремы типа теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кашин В. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [2] Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Матем. 1965. № 2. С. 171–187.
- [3] Терехин А. П. Функции ограниченной p -вариации с данным порядком модуля непрерывности // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 5. С. 523–530.
- [4] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
- [5] Голубов Б. И. Критерии компактности множеств в пространствах функций обобщенной ограниченной вариации // Изв. АН АрмССР. 1968. Т. 3. № 6. С. 409–416.
- [6] Волосивец С. С. Приближение функций ограниченной p -вариации полиномами по системам Хаара и Уолша // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 6. С. 11–21.
- [7] Ciesielski Z. Some properties of Schauder basis of the space $C\langle 0, 1 \rangle$ // Bull. Acad. Polon. Sci. 1960. V. 8. № 3. P. 141–144.
- [8] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [9] Волосивец С. С. Приближение функций ограниченной p -флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Anal. Math. 1995. V. 21. № 1. P. 61–77.
- [10] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 4. С. 221–246.
- [11] Конюшков А. А. О сходимости некоторых рядов из коэффициентов Фурье // УМН. 1959. Т. 14. № 1. С. 189–196.
- [12] Горячев А. П. О коэффициентах Фурье по системе Фабера–Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 2. С. 341–352.

Саратовский государственный университет

Поступило
11.01.96