Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Горохов, Аппроксимация гармоническими функциями в C^m -норме и гармоническая C^m -вместимость компактных множеств в $\mathbb{R}^n$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 372–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:24:04

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В C^m -НОРМЕ И ГАРМОНИЧЕСКАЯ C^m -ВМЕСТИМОСТЬ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$

Ю. А. Горохов

В работе изучается функция $\Lambda^m(X)$, $0 < m < 1$, компактных множеств X в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, равная расстоянию в пространстве $C^m(X) \equiv \text{lip}^m(X)$ от функции $|x|^2$ до подпространства $H^m(X)$, которое является замыканием в $C^m(X)$ класса функций, гармонических в окрестности X (каждая функция в своей окрестности).

Доказана эквивалентность условий $\Lambda^m(X) = 0$ и $C^m(X) = H^m(X)$. Получена оценка сверху, зависящая только от геометрических свойств компакта X (его объема).

Библиография: 6 названий.

0. Введение. В работе изучается функция $\Lambda^m(X)$, $0 < m < 1$, компактных множеств X в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, равная расстоянию в пространстве $C^m(X) \equiv \text{lip}^m(X)$ от функции $|x|^2$ до подпространства $H^m(X)$, которое является замыканием в $C^m(X)$ класса функций, гармонических в окрестности X (каждая функция в своей окрестности).

Аналогичные величины для случаев $m = 0$ и $m = 1$ изучались в [1] и [2] соответственно. Основные результаты этих работ удалось распространить на случай $m \in (0, 1)$. Так, доказывается, что

$$\Lambda^m(X) = 0 \iff C^m(X) = H^m(X),$$

и получена следующая оценка:

$$\Lambda^m(X) \leq C_{m,n} \cdot V^{(2-m)/n},$$

где $V \equiv V(X)$ – мера Лебега компакта X , а $C_{m,n}$ – константа, не зависящая от X .

1. Определения. Пусть $m \in (0, 1)$, $n \geq 2$ – натуральное число, E – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ (или все $\mathbb{R}^n$). Положим

$$\omega_E(f, \delta) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x - y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|, \quad \omega(f, \delta) \equiv \omega_{\mathbb{R}^n}(f, \delta), \quad \delta > 0.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01240.

Пусть $H(E)$ – класс функций, каждая из которых определена и гармонична в некоторой (своей) окрестности множества E . Введем следующие пространства вещественных функций на E :

$$\begin{aligned} \text{Lip}^m(E) &= \left\{ f \mid \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_E(f, \delta)}{\delta^m}, \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\}, \\ C^m(E) \equiv \text{lip}^m(E) &= \left\{ f \in \text{Lip}^m(E) \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_E(f, \delta)}{\delta^m} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

причем банаховы нормы в этих пространствах берутся стандартные:

$$\|f\|_{m,E} = \max\{\|f\|_E, \|f\|_{m,E}^*\}, \quad \text{где} \quad \|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad \|f\|_{m,E}^* = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_E(f, \delta)}{\delta^m}.$$

В случае $E = \mathbb{R}^n$ индекс E в данной норме опускается.

Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$, $H^m(X)$ – замыкание в пространстве $\text{Lip}^m(X)$ подпространства $H(X)|_X$.

Легко доказать, что $H^m(X) \subset C^m(X)$, а условие $f \in H^m(X)$ в точности означает, что функция f приближается в норме $\|\cdot\|_{m,X}$ гармоническими на X функциями с любой заданной точностью.

Обозначим через $J^m(X)$ пространство

$$\{f \in C^m(\mathbb{R}^n) \mid f|_X = 0\}.$$

По теореме Уитни [3, гл. VI] всякая функция $f \in C^m(X)$ продолжается до функции $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, причем $\|F\|_{m,\mathbb{R}^n} \leq A \cdot \|f\|_{m,X}$, где постоянная $A > 0$ зависит только от m и n . Следовательно, $C^m(X) \cong C^m(\mathbb{R}^n)/J^m(X)$, причем $f \in H^m(X)$ тогда и только тогда, когда для любого ее продолжения $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ найдется последовательность $\{F_k\} \subset C^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)$ такая, что $F_k \rightarrow F$ по норме $\|\cdot\|_{m,\mathbb{R}^n}$ (см. [4, лемма 4.1]).

Наша основная задача состоит в том, чтобы найти условия на множество X , необходимые и достаточные для совпадения $C^m(X)$ и $H^m(X)$. Иными словами, мы хотим определить, когда $C^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)$ всюду плотно в $C^m(\mathbb{R}^n)$. Ответ в терминах соответствующих емкостей (аналог теоремы Витушкина [5]) был получен в [6].

Ниже будет приведен критерий совпадения $C^m(X)$ и $H^m(X)$ в терминах другой функции множеств – гармонической C^m -вместимости. Причем вычисляться она будет только на самом множестве X .

Положим

$$C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) = \{f \mid f \cdot \varphi \in C^m(\mathbb{R}^n) \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\},$$

где, как обычно, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – класс бесконечно-дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Пусть $f_0(x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. При $f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\|f\|_m^* = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_{\mathbb{R}^n}(f, \delta)}{\delta^m},$$

причем эта полунорма может принимать и бесконечные значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гармонической C^m -вместимостью компакта X в $\mathbb{R}^n$ называется величина

$$\Lambda^m(X) = \inf\{\|f - f_0\|_m^* \mid f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)\}.$$

Ряд метрических свойств этой величины будет приведен в п. 2 и п. 3.

2. Основные результаты. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$, $m \in (0, 1)$. Через $V = V(X)$ обозначим меру Лебега множества X .

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного компакта X

$$\Lambda^m(X) = 0 \iff C^m(X) = H^m(X).$$

ТЕОРЕМА 2. При всех $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\Lambda^m(X) \leq C_{m,n} \cdot V^{(2-m)/n},$$

где

$$C_{m,n} = \frac{n^{1+4/n}}{\sigma_n^{4/n}(n-2)} \cdot \left[\frac{2(n-1)^{1/n}}{n^{2/n}} \cdot \frac{\sigma_{n-1}^{1-1/n}}{\sigma_n^{1-3/n}} \right]^m \quad \text{при } n \geq 3,$$

$$C_{m,2} = \frac{2^{2-m}(1-m)^{1-m}}{(\pi m(2-m))^{1-m/2}},$$

$\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – поверхностная мера Лебега единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Полученные оценки точными не являются (см. п. 6).

СЛЕДСТВИЕ. Если $V(X) = 0$, то любая функция из $C^m(X)$ приближается в норме $\|\cdot\|_{m,X}$ функциями, гармоническими в окрестности X .

Отметим, что доказательства теорем 1 и 2 во многом аналогичны соответствующим доказательствам из работы [2].

3. Замечания и дополнения. Необходимо сделать некоторые пояснения по поводу выбора $\|\cdot\|_m^*$ вместо $\|\cdot\|_m$ в качестве “уклонения” при определении $\Lambda^m(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$\lambda^m(X) = \inf\{\|f - f_0\|_m \mid f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X), f - f_0 \in C^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Тогда

$$\Lambda^m(X) \leq \lambda^m(X) \leq \max\{1, R_X^m\} \cdot \Lambda^m(X),$$

где R_X – радиус минимального шара, содержащего X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство тривиально. Для доказательства второго неравенства фиксируем шар $B(a, R)$ с центром в точке a радиуса R , содержащий X . Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению $\Lambda^m(X)$ существует такая функция $f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)$, что $\|f - f_0\|_m^* \leq \Lambda^m(X) + \varepsilon$ и $f(a) = f_0(a)$. Причем вне шара $B(a, R)$ функцию f можно продолжить так, чтобы разность $f - f_0$ оставалась радиально-постоянной (и непрерывной на $\mathbb{R}^n$). Следовательно,

$$\|f - f_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \omega(f - f_0, R) \leq \|f - f_0\|_m^* \cdot R^m \leq (\Lambda^m(X) + \varepsilon) \cdot R^m.$$

Поэтому

$$\Lambda^m(X) \leq \|f - f_0\|_m \leq \max\{\Lambda^m(X) + \varepsilon, (\Lambda^m(X) + \varepsilon) \cdot R^m\}.$$

Остается устремить ε к 0, а R — к R_X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Величина $\Lambda^m(X)$ является однородной порядка $2 - m$. Иначе говоря, пусть T — преобразование подобия в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом подобия t . Тогда

$$\Lambda^m(T(X)) = t^{2-m} \Lambda^m(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что преобразование подобия может быть представлено в виде композиции следующих трех отображений.

1) $T: x \mapsto x - x_0$ — сдвиг. В этом случае достаточно заметить, что функция $|x - x_0|^2 = |x|^2 - 2xx_0 + |x_0|^2$ отличается от $|x|^2$ на гармоническую добавку $-2xx_0 + |x_0|^2$.

2) T — вращение или симметрия относительно начала координат. Этот случай очевиден, поскольку композиция с этим преобразованием не меняет функцию $|x|^2$ и сохраняет свойство гармоничности.

3) T — гомотетия, т.е. $T: x \mapsto t \cdot x, t > 0$.

Пусть $Y = T(X)$. Зададим отображение $T^*: C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$, действующее следующим образом:

$$T^*f(y) = t^2 \cdot f\left(\frac{y}{t}\right), \quad f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n).$$

При этом

$$T^*(C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)) = C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(Y),$$

причем

$$\|T^*f\|_m^* = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega(T^*f, \delta)}{\delta^m} = \sup_{\delta > 0} \frac{t^2 \omega(f, \delta/t)}{\delta^m} = \sup_{\delta_1 > 0} \frac{t^2 \omega(f, \delta_1)}{(t\delta_1)^m} = t^{2-m} \cdot \|f\|_m^*$$

для всех $f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\delta_1 = \delta/t$. Осталось заметить, что $T^*f_0 = f_0$.

Очевидно, что для $\lambda^m(X)$ вместо $\Lambda^m(X)$ пункты 1) и 2) в приведенном выше доказательстве остаются верными; что же касается 3), то он перестает быть верным по следующей причине.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\lambda^m(X)$ не является однородной относительно растяжений.

Докажем вначале следующую лемму.

ЛЕММА. *Выполнено*

$$\|f_0\|_{m, B(0, R)}^* = \left(\frac{2R}{2-m} \right)^{2-m} \cdot (1-m)^{1-m} \equiv C_m R^{2-m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f_0 радиально-симметрична, то $\omega_{B(0, R)}(f_0, \delta)$ постоянна при $\delta \geq R$. При $\delta \in (0, R)$ имеем

$$\omega_{B(0, R)}(f_0, \delta) = \max_{r \in [\delta, R]} \{r^2 - (r - \delta)^2\} = R^2 - (R - \delta)^2 = 2R\delta - \delta^2.$$

Искомый ответ получается стандартным вычислением экстремума

$$\|f_0\|_{m, B(0, R)}^* = \max_{0 < \delta < R} \frac{2R\delta - \delta^2}{\delta^m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Пусть $X = \overline{B}(0, R)$. В этом случае в определении $\lambda^m(X)$ достаточно рассматривать только радиально-симметричные функции f (пользуясь, например, методом усреднения по всем вращениям с центром в начале координат), а следовательно, постоянные на X : $f|_X = f(0)$. Изменим f вне X , положив $f(x) = f_0(x) + f(0) - R^2$. При этом

$$\begin{aligned} \lambda^m(X) &= \inf_{c \in \mathbb{R}^1} \max\{\|c - f_0\|_X, \|c - f_0\|_{m, X}^*\} \\ &= \max\left\{\inf_c \|c - f_0\|_X, \|f_0\|_{m, X}^*\right\} = \max\left\{\frac{R^2}{2}, C_m R^{2-m}\right\}, \end{aligned}$$

где постоянная C_m определена в лемме.

Значит, $\lambda^m(X)$ неоднородна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенных здесь рассуждений вытекает, что

$$\Lambda^m(B(0, R)) = C_m R^{2-m} = C_m \left(\frac{n}{\sigma_n} \right)^{(2-m)/n} V^{(2-m)/n} \equiv A_{m, n} \cdot V^{(2-m)/n},$$

где $V = V(B(0, R))$.

Таким образом, из двух эквивалентных величин $\Lambda^m(X)$ и $\lambda^m(X)$ целесообразнее использовать однородную — $\Lambda^m(X)$.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\Lambda^m(X) = 0$. Покажем, что тогда $C^m(X) = H^m(X)$. Для этого воспользуемся теоремой Матеу–Оробича [6, теорема 1 и лемма 3.4].

ТЕОРЕМА МАТЕУ–ОРОБИЧА. $C^m(X) = H^m(X)$ тогда и только тогда, когда существует такая положительная константа C , что для произвольных $a \in \mathbb{R}^n$ и $\delta < 1$ выполняется оценка

$$\alpha_m(B(a, \delta) \setminus X) \geq C \delta^{n+m-2},$$

где $\alpha_m(E)$ — гармоническая C^m -емкость, E определяется следующим образом:

$$\alpha_m(E) = \sup\{\langle \Delta f, 1 \rangle \mid f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n), \text{ spt } \Delta f \subset E, \|f\|_m^* \leq 1, \nabla f(\infty) = 0\}.$$

Здесь и далее через $\langle T, \psi \rangle$ будем обозначать действие распределения T с компактным носителем на функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, достаточно показать, что для любых $a \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in (0, 1)$

$$\Lambda^m(X) = 0 \iff \alpha_m(B(a, \delta) \setminus X) \geq C \cdot \delta^{n+m-2}.$$

Фиксируем шар $B = B(a, \delta)$, причем без ограничения общности можно положить $a = 0$. Поскольку $\Lambda^m(X) = 0$, то существует последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap H(X)$ такая, что $\|f_k - f_0\|_m^* \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $f_k(0) = 0$, и следовательно, $f_k \rightrightarrows f_0$ на B при $k \rightarrow \infty$.

Фиксируем функцию $\varphi_1 \in C_0^\infty(B(0, 1))$ с условием $\langle \varphi_1, 1 \rangle = 1$ и положим $\varphi_\delta = \varphi_1(x/\delta)$. Тогда $\langle \varphi_\delta, 1 \rangle = \delta^n$.

Рассмотрим $F_k = \Phi_n * (\varphi_\delta \Delta f_k)$, где $*$ означает операцию свертки, а $\Phi_n(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2; \\ -\frac{1}{\sigma_n(n-2)|x|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

В дальнейшем через $A_1, A_2, \dots$ будем обозначать постоянные, не зависящие от k и δ .

Согласно [6, лемма 2.4] имеем $\|F_k\|_m^* \leq A_1 \cdot \|f_k\|_m^*$. Поскольку $\|f_k - f_0\|_m^* \rightarrow 0$, то начиная с некоторого k

$$\|f_k\|_m^* \leq 2\|f_0\|_m^* = 2C_m\delta^{2-m}$$

в силу леммы. Итак, $\|F_k\|_m^* \leq A_2 \cdot \delta^{2-m}$.

С другой стороны,

$$\langle \Delta F_k, 1 \rangle = \langle \Delta f_k, \varphi_\delta \rangle \rightarrow \langle \Delta f_0, \varphi_\delta \rangle = 2n\delta^n.$$

Положим $G_k = F_k/(A_2\delta^{2-m})$. Имеем $\|G_k\|_m^* \leq 1$, $\langle G_k, 1 \rangle \geq A_3\delta^{n+m-2}$, $\text{spt}(\Delta G_k) \subset \text{spt} \varphi_\delta \cap \text{spt} \Delta f_k \subset B \setminus X$, т.е. по определению $\alpha_m(B \setminus X) \geq \langle G_k, 1 \rangle \geq A_3\delta^{n+m-2}$, что и требовалось.

Доказательство обратной импликации в теореме 1 очевидно.

5. Доказательство теоремы 2. Достаточно рассмотреть случай, когда $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт с гладкой границей. Действительно, легко проверить, что $\Lambda^m(X_1) \leq \Lambda^m(X_2)$ при любых $X_1 \subseteq X_2$, причем для любых компакта X и $\varepsilon > 0$ можно найти компакт $X_\varepsilon \supset X$ с гладкой границей такой, что $V(X_\varepsilon) < V(X) + \varepsilon$. Таким образом, достаточно получить нужную оценку для компактов X_ε и устремить ε к 0.

Введем $f_X = \Phi * (2n\chi_X)$, где

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Хорошо известно, что $f_X \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$ при всех $m \in (0, 1)$, а так как $\Delta f_X = 2n \cdot \chi_X$ в обобщенном смысле, то $\Delta(f_X - f_0) = 0$ на X° уже в обычном смысле.

С учетом гладкости границы X из [6, теорема 1] следует, что $(f_X - f_0)|_X \in H^m(X)$, поэтому $\Lambda^m(X) \leq \|f_X\|_m^*$ и нам достаточно оценить $\|f_X\|_m^*$.

Оценим вначале

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|=\delta} |f_X(x) - f_X(y)|$$

через $V(X)$ и δ . Так как $\nabla f_X(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то последний $\sup$ на самом деле является максимумом.

С помощью сдвига и поворота компакта X (которые не меняют $\omega(\delta)$ и $V(X)$) все сводится к случаю, когда $\omega(\delta) = |f_X(\bar{\delta}) - f_X(0)|$, где $\bar{\delta} = (\delta, 0, \dots, 0)$.

Дальнейшие рассуждения будем проводить отдельно для случаев $n = 2$ и $n \geq 3$, поскольку $\Phi_2(x)$ имеет свои специфические особенности.

Случай $n = 2$. При этом

$$\omega(\delta) = \frac{4}{2\pi} \left| \int_X \ln \frac{|x - \bar{\delta}|}{|x|} dx \right|.$$

Пусть

$$Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \ln \frac{|x - \bar{\delta}|}{|x|} \geq C_0 > 0 \right\},$$

где константа C_0 выбрана так, что $V(Y) = V(X) = V$. Тогда

$$\omega(\delta) \leq \frac{2}{\pi} \int_Y \frac{|x - \bar{\delta}|}{|x|} dx \equiv I(\delta).$$

Действительно, на $X \cap Y$ соответствующие интегралы совпадают: $V(X \setminus Y) = V(Y \setminus X)$, на $X \setminus Y$ подынтегральная функция меньше C_0 , а на $Y \setminus X$ — больше.

Граница Y , описываемая уравнением

$$\ln \frac{|x - \bar{\delta}|}{|x|} = C_0,$$

есть окружность с центром $a = (-\delta/(C^2 - 1), 0)$ и радиусом $r = \delta C/(C^2 - 1) = \sqrt{V/\pi}$, где $C = e^{C_0}$. Вычислим C и a через r (r фиксировано):

$$C = \frac{1}{2r} (\delta + \sqrt{4r^2 + \delta^2}), \quad a = \left(-\frac{1}{2} (\sqrt{4r^2 + \delta^2} - \delta), 0 \right).$$

Для нахождения $I(\delta)$ введем $F_0 = \Phi * 4\chi_{B(0,r)}$ и заметим, что

$$I(\delta) = F_0(|a| + \delta, 0) - F_0(|a|, 0).$$

Поскольку F_0 радиально-симметрична и $\Delta F_0 = 4\chi_{B(0,r)}$, то вне $B(0, r)$ функция F_0 гармонична, значит $F_0(x) = C_1 \Phi_2(x)$, где $C_1 = \langle 4\chi_{B(0,r)}, 1 \rangle = 4V$.

Внутри $B(0, r)$ значение ΔF_0 равно 4, поэтому $\Delta(F_0(x) - |x|^2) = 0$, т.е. $F_0 - |x|^2 \equiv C_2$ (F_0 радиально-симметрична).

Хорошо известно, что F_0 непрерывна, поэтому на границе $\{|x| = r\}$ получаем $C_2 = (2V/\pi) \ln r - r^2$. Таким образом,

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{2V}{\pi} \ln |x|, & |x| \geq r; \\ |x|^2 - r^2 + \frac{2V}{\pi} \ln r, & |x| \leq r. \end{cases}$$

Заметим, что $|a| < r$, а $|a| + \delta > r$. Поэтому

$$\begin{aligned} I(\delta) &= \frac{2V}{\pi} \ln(|a| + \delta) - |a|^2 + r^2 - \frac{2V}{\pi} \ln r \\ &= 2r^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2r}(\delta + \sqrt{4r^2 + \delta^2})\right) + \frac{\delta}{2}(\sqrt{4r^2 + \delta^2} - \delta). \end{aligned}$$

Имеем

$$\|f_X\|_m^* \leq \sup_{\delta > 0} \frac{I(\delta)}{\delta^m}.$$

Положим $I_1(\delta) = I(\delta)/\delta^m$, $\delta > 0$. Тогда $I_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow \infty$. Следовательно, максимум функции $I_1(\delta)$ достигается в некоторой точке δ_1 , удовлетворяющей условию $I_1'(\delta_1) = 0$.

Поскольку $I_1'(\delta_1) = I'(\delta_1)/\delta_1^m + I(\delta_1) \cdot (-m)/\delta_1^{m+1} = 0$, то $I(\delta_1) = I'(\delta_1) \cdot \delta_1^m$ в точке экстремума δ_1 функции $I_1(\delta_1)$. Таким образом,

$$\sup_{\delta > 0} I_1(\delta) \leq \sup_{\delta > 0} I_2(\delta),$$

где $I_2(\delta) = I'(\delta) \cdot \delta^{1-m}/m$. Вычислив производную получим, что $I'(\delta) = \sqrt{4r^2 + \delta^2} - \delta$. Поэтому $I_2(\delta) = (\sqrt{4r^2 + \delta^2} - \delta) \cdot \delta^{1-m}/m$. При этом $I_2(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow \infty$.

Получили, что экстремум $I_2(\delta)$ должен достигаться в такой точке δ_2 , что $I_2'(\delta_2) = 0$. Находим $\delta_2 = 2r \cdot (1 - m)/\sqrt{m(2 - m)}$.

Искомая оценка получается вычислением $I_2(\delta_2)$.

Случай $n \geq 3$. Заметим, что в виду однородности $\Lambda^m(X)$ достаточно рассмотреть ситуацию, когда $V = V(X) = 1$, причем, как и ранее, нам нужно оценить величину

$$\omega(\delta) = 2n \left| \int_X (\Phi_n(x - \bar{\delta}) - \Phi_n(x)) dx \right| \leq 2n \int_Y (\Phi_n(x - \bar{\delta}) - \Phi_n(x)) dx.$$

Здесь Y – компакт, определяемый неравенством

$$-\frac{1}{|x - \bar{\delta}|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \geq C,$$

причем C выбрана так, чтобы $V(Y) = V(X) = 1$.

Обозначим через $Y_{-\delta}$ компакт, полученный из Y сдвигом по оси $0x_1$ на $-\delta$.

Рассмотрим отдельно два случая: $\delta \geq t$ и $\delta \leq t$. Константу t подберем позднее подходящим образом.

При $\delta \geq t$, отбросив отрицательный член, имеем

$$\omega(\delta) \leq 2n \int_Y (-\Phi_n(x)) dx \leq 2n \int_{B(0, R)} (-\Phi_n(x)) dx,$$

где R таково, что $V(B(0, R)) = 1$.

Последнее неравенство вытекает из вида функции $\Phi_n(x)$ при $n \geq 3$. Но

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} (-\Phi_n(x)) dx &= \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{B(0, R)} \frac{dx}{|x|^{n-2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \cdot \sigma_n \int_0^R \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr = \frac{R^2}{2(n-2)}, \end{aligned}$$

где $R = (n/\sigma_n)^{1/n}$ (здесь мы перешли к сферическим координатам).

Итак, при $\delta \geq t$ имеем $\omega(\delta) \leq n^{1+2/n} / (\sigma_n^{2/n} (n-2))$, значит,

$$\sup_{\delta \geq t} \frac{\omega(\delta)}{\delta^m} = \frac{n^{1+2/n}}{\sigma_n^{2/n} (n-2) t^m}.$$

Пусть теперь $\delta \leq t$. Тогда

$$\omega(\delta) = 2n \int_Y (-\Phi_n(x)) dx - 2n \int_{Y_{-\delta}} (-\Phi_n(x)) dx \leq 2n \int_{K_\delta} (-\Phi_n(x)) dx,$$

где $K_\delta = Y \setminus Y_{-\delta}$.

Для дальнейших рассуждений необходимо привести некоторые элементарные свойства компакта Y . Прежде всего, очевидно, он представляет собой тело вращения вокруг оси $0x_1$, поэтому основные пояснения можно проводить на произвольной плоскости, содержащей ось $0x_1$ (например, на плоскости (x_1, x_2)).

Рассматривая уравнение границы сечения компакта Y этой плоскостью в полярных координатах (r, φ) нетрудно показать, что производная r'_φ строго положительна при $\varphi \in (0, \pi)$ и соответственно строго отрицательна при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ в силу симметричности Y .

Таким образом, ближе всего к началу координат граница Y подходит в точке своего пересечения с положительной полуосью $0x_1$. Обозначим эту точку через $r_{\min}$. Сохраним это же обозначение и для расстояния от $r_{\min}$ до начала координат.

Аналогично, обозначим через $r_{\max}$ максимальное расстояние от начала координат до ∂Y и через $-r_{\max}$ точку пересечения границы Y с отрицательной полуосью $0x_1$, где это расстояние достигается.

Обозначим также через h_δ максимальное расстояние от точек на ∂Y до оси $0x_1$. Очевидно, что h_δ является радиусом максимального сечения Ω_Y компакта Y гиперплоскостью $\{x_1 = x_1^* = \text{const}\}$, поэтому тело, представляющее собой два конуса, имеющих в качестве общего основание сечение Ω_Y , а в качестве вершин — точки $r_{\min}$ и $-r_{\max}$, содержится внутри Y , т.е. объем этого тела меньше $V(Y) = 1$. Имеем

$$\frac{1}{n} (r_{\max} + r_{\min}) \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{n-1} h_\delta^{n-1} < 1.$$

Но $h_\delta < r_{\max} + r_{\min}$, следовательно,

$$\frac{\sigma_{n-1}}{n(n-1)} \cdot h_\delta^n < 1,$$

т.е. $h_\delta < (n(n-1)/\sigma_{n-1})^{1/n}$.

Далее, рассмотрим криволинейный цилиндр D_δ , который замечается в результате сдвига множества $\{x \in \partial Y \mid x_1 \geq x_1^*\}$ параллельно оси $0x_1$ на расстояние $-\tau$, $\tau \in [0, \delta]$. По построению $K_\delta \subset D_\delta$, поэтому (ввиду $-\Phi(x) > 0$) имеем

$$\omega(\delta) \leq 2n \int_{D_\delta} (-\Phi_n(x)) dx = \frac{2n}{\sigma_n(n-2)} \int_{D_\delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}}.$$

Для оценки последнего интеграла перейдем к цилиндрическим координатам $(x_1, \rho, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$, где $(\rho, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$ – сферические координаты в гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Имеем

$$\int_{D_\delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}} < \int_{D_\delta} \frac{dx}{\rho^{n-2}}.$$

Поскольку подынтегральная функция последнего интеграла уже не зависит от x_1 , цилиндр D_δ можно “распрямить”, заменив его прямым цилиндром того же объема, имеющим в качестве оснований $(n-1)$ -мерные шары радиусов h_δ , лежащие в гиперплоскостях, перпендикулярных оси $0x_1$ с центрами $(\delta, 0, \dots, 0)$ и $(0, 0, \dots, 0)$ соответственно. Таким образом, последний интеграл будет равен

$$\sigma_{n-1} \cdot \delta \cdot \int_0^{h_\delta} d\rho \frac{\rho^{n-2}}{\rho^{n-2}} = \sigma_{n-1} \delta h_\delta < [n(n-1)]^{1/n} \sigma_{n-1}^{1-1/n} \cdot \delta.$$

Тогда

$$\sup_{0 < \delta < t} \frac{\omega(\delta)}{\delta^m} \leq \frac{2n}{\sigma_n(n-2)} t^{1-m} [n(n-2)]^{1/n} \sigma_{n-1}^{1-1/n}.$$

Осталось приравнять правые части оценок для $\sup(\omega(\delta)/\delta^m)$ при $\delta \geq t$ и $\delta \leq t$ и, тем самым, найти нужные t , при которых общая оценка оптимальна:

$$\frac{n^{1+2/n}}{\sigma_n^{2/n}(n-2) \cdot t^m} = \frac{2n^{1+1/n}(n-1)^{1/n}}{n-2} \cdot \frac{\sigma_{n-1}^{1-1/n}}{\sigma_n} t^{1-m}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{n^{1/n}}{2(n-1)^{1/n}} \cdot \frac{\sigma_n^{1-2/n}}{\sigma_{n-1}^{1-1/n}}.$$

Окончательно,

$$\Lambda^m(X) \leq \|f_X\|_m^* < \frac{n^{1+2/n}}{\sigma_n^{2/n}(n-2) \cdot t^m}.$$

При $V(X)$, отличным от 1, последняя оценка дополняется множителем $(nV/\sigma_n)^{(2-m)/n}$ в силу предложения 2.

6. Точность оценок. В заключение интересно сравнить полученные в теореме 2 константы $C_{m,n}$ с точными (для шаров) константами $A_{m,n}$, полученными в замечании. Для этого рассмотрим отношение $P_{m,n} = C_{m,n}/A_{m,n}$ при различных n .

1) При $n = 2$ имеем

$$P_{m,2} = \left(\frac{2-m}{m} \right)^{1-m/2},$$

откуда видно, что для m , близких к 1, оценка практически точная. Наоборот, при $m \rightarrow 0$ оценка ухудшается, поскольку $P_{m,2} \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow 0$).

2) При $n = 3$ имеем $P_{0,3} \approx 1.15$, $P_{1,3} \approx 1.17$.

3) В случае больших n воспользуемся формулой Стирлинга, из которой следует, что

$$\sigma_n \sim \sqrt{\frac{2}{e}} \left(\frac{2\pi e}{n} \right)^{(n-1)/2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому

$$P_{m,n} \sim \frac{1}{4} \frac{(2-m)^{2-m}}{(1-m)^{1-m}} (2\pi e)^{1/n-1} n^{1+1/n}.$$

Таким образом,

$$P_{0,n} \sim \frac{n^{1+1/n}}{(2\pi e)^{1-1/n}}, \quad P_{1,n} \sim \frac{1}{4} P_{0,n}.$$

Итак, при $n \geq 3$ оценки имеют практически одинаковый порядок для всех $m \in (0, 1)$.

Автор выражает признательность П. В. Парамонову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khavinson D. On uniform approximation by harmonic functions // Michigan Math. J. 1987. V. 34. № 3. P. 465–473.
- [2] Готье П. М., Парамонов П. В. Аппроксимация гармоническими функциями в C^1 -норме и гармонический C^1 -поперечник компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 4. С. 21–30.
- [3] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [4] Парамонов П. В. C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.
- [5] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 122. № 6. С. 141–199.
- [6] Mateu J., Orobitg J. Lipschitz approximation by harmonic function and some applications to spectral synthesis // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39. № 3. P. 703–736.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.11.95