Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Ускова, К одному результату Р. Тернера, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 905–917

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:05:06

УДК 517.9

К ОДНОМУ РЕЗУЛЬТАТУ Р. ТЕРНЕРА

Н. Б. Ускова

Рассматривается вопрос о подобии возмущенного компактного оператора оператору блочно-диагональной структуры относительно некоторого семейства ортопроекторов, что позволяет уточнить и существенным образом усилить результаты Р. Тернера. Получена информация об операторе, осуществляющем преобразование подобия, приведены оценки на собственные значения и собственные векторы возмущенного оператора, а также рассмотрена обратная задача спектрального анализа.

Библиография: 7 названий.

В монографии [1, гл. 20, § 3] приведены результаты, принадлежащие Р. Тернеру. Они касаются диагонализации некоторых классов компактных операторов и содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и A – нормальный компактный оператор в H . Пусть $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в H и $Ae_n = \lambda_n e_n$. Предположим, что в последовательности λ_n нет повторений, все собственные значения λ_n отличны от нуля и r_n – расстояние от λ_n до остальных точек спектра оператора A . Обозначим через R замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(R)$, которая состоит из всех векторов $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ из H , удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-2} x_n^2 < \infty,$$

оператор R действует по формуле

$$Rx = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} x_n e_n.$$

Пусть M – множество всех таких ограниченных операторов, что $Bx \in D(R)$ для всех $x \in H$ и RB принадлежит классу Гильберта–Шмидта $\sigma_2(H)$. Тогда существует такая положительная постоянная $\varepsilon(A)$, зависящая только от оператора A , что если $B \in M$ и $\|RB\|_2 < \varepsilon(A)$, то оператор $A+B$ подобен некоторому оператору A_1 , коммутирующему с A .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00408.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены условия теоремы 1, то $A + B$ – спектральный оператор скалярного типа.

Данная статья посвящена усилению результата Тернера. В частности, снято условие простоты всех собственных значений, выписан явный вид константы $\varepsilon(A)$ и оператора A_1 , получена дополнительная информация об операторе, осуществляющем преобразование подобия. Более того, рассмотрен не только случай, когда $RB \in \sigma_2(H)$, но и другие виды возмущений. Приведены также оценки на собственные значения и собственные векторы возмущенного оператора и затронута обратная задача спектрального анализа.

Методом исследования является метод подобных операторов, состоящий в преобразовании подобия возмущенного оператора оператору более простой структуры, спектральные свойства которого легко изучать, так как они обычно бывают близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Приведенная выше теорема 1 – это один из первых результатов, который был получен методом подобных операторов и развивал метод Фридрихса [1] для операторов с дискретным спектром. Следует отметить, что метод подобных операторов берет свое начало с работ Пуанкаре, Ляпунова, Крылова, Богомолова, Фридрихса, Тернера (теорема 1) и окончательно оформляется в работах Баскакова [2]–[4]. В статьях [2]–[4] развита техника, приспособленная к возмущенным неограниченным операторам, что вполне естественно в связи с приложениями к дифференциальным операторам. Однако рассматриваемые возмущения, хотя они могут быть и неограниченными операторами, подчинены невозмущенному оператору.

Отметим следующий подход к определению сходящейся последовательности замкнутых операторов. Последовательность замкнутых операторов

$$A_n: D(A_n) \subset H \rightarrow H, \quad n \geq 1,$$

называется *сходящейся* к оператору

$$A_0: D(A_0) \subset H \rightarrow H,$$

если пересечение $K = \bigcap_{n \geq 1} \rho(A_n)$ их резольвентных множеств $\rho(A_n)$, $n \geq 1$, непусто и для некоторого $\lambda_0 \in K$ выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - \lambda_0 I)^{-1} - (A_0 - \lambda_0 I)^{-1}\| = 0.$$

Разумеется, здесь нет никаких дополнительных условий на $D(A_n)$, $n \geq 1$. Этот подход к определению близости замкнутых операторов принуждает нас снова обратиться к теореме 1 и попытаться учесть разработанную в [2]–[5] технику метода подобных операторов.

Прежде чем изложить метод подобных операторов в удобной для данного конкретного случая форме, введем следующие обозначения. Через $\text{End } H$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H , и $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $\text{End } H$. Термин “трансформатор”, следуя Крейну, далее будет употребляться для обозначения линейного оператора, действующего в пространстве линейных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset H \rightarrow H, i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } H$ такой, что

$$UD(A_2) = D(A_1), \quad A_1 Ux = UA_2x \quad \forall x \in D(A_2).$$

Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M – линейное многообразие операторов из $\text{End } H$ и $J: M \rightarrow M, \Gamma: M \rightarrow \text{End } H$ – трансформаторы. Тройка (M, J, Γ) называется *допустимой* тройкой для оператора A , а M – *допустимым пространством возмущений*, если

- 1) M – банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в $\text{End } H$, т.е.

$$\|X\| \geq \text{const} \|X\|_\infty \quad \forall X \in \text{End } H;$$

- 2) J и Γ – непрерывные операторы;
- 3) $A\Gamma X - \Gamma XA = X - JX$ для всех $X \in M$;
- 4) $X(\Gamma Y), (\Gamma X)Y \in M$ для всех $X, Y \in M$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| < \gamma$ и

$$\max\{\|X(\Gamma Y)\|, \|(\Gamma Y)X\|\} \leq \gamma \|X\| \cdot \|Y\| \quad \forall X, Y \in M.$$

Зафиксируем теперь некоторую допустимую для оператора A тройку (M, J, Γ) и возмутим оператор A некоторым оператором B из пространства допустимых возмущений M .

ТЕОРЕМА 2 [3]. Пусть выполнено условие $\|B\|\gamma < 1/4$. Тогда операторы $A - B$ и $A - JX$ подобны, т.е.

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - JX), \quad (1)$$

где $X \in M$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JX + B \quad (2)$$

и его можно найти методом последовательных приближений, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

Теперь сделаем ряд предположений относительно невозмущенного оператора A и возмущения B и докажем теоремы о подобии возмущенного оператора $A - B$ оператору более простой структуры.

Пусть A – нормальный компактный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \bigcup_n \sigma_n, \quad \sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset, \quad n \neq m, \quad (3)$$

где $\sigma_n, n \geq 1$, – конечные подмножества.

Обозначим через r_n расстояние от σ_n до множества $\sigma(A) \setminus \sigma_n$, т.е. $r_n = \text{dist}(\sigma_n, \sigma(A) \setminus \sigma_n)$. Символом $P(\sigma_n, A)$ или, короче, P_n обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n . Каждому оператору $X \in \text{End } H$ поставим в

соответствие матрицу $\tilde{X} = (X_{ij})$, составленную из операторных блоков $X_{ij} = P_i X P_j$. Сохраним обозначение R^{-1} для ограниченного нормального оператора, определяемого следующим образом:

$$R^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i P_i.$$

Возмутим оператор A оператором $B \in \text{End } H$ таким, что $RB \in \sigma_2(H)$, но запишем его в виде

$$B = R^{-1} B_0, \quad (4)$$

$B_0 = RB \in \sigma_2(H)$. Очевидно также, что $P_i B_0 P_j \in \sigma_2(H)$ для всех $i, j \geq 1$.

Так как проекторы $\{P_j\}, j \geq 1$, являются ортопроекторами, то норма в $\sigma_2(H)$ определяется формулой

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \geq 1} \|P_i X P_j\|_2^2 \quad \forall X \in \sigma_2(H). \quad (5)$$

Зафиксируем также две ненулевые последовательности неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_n), \beta = (\beta_n)$, принадлежащие пространству l_2 . Символом $\sigma_2(H, \alpha, \beta)$ обозначим множество операторов из $\sigma_2(H)$ таких, что $\|X_{ij}\|_2 \leq C \alpha_i \beta_j, i, j \geq 1$, с нормой

$$\|X\|_{\alpha\beta} = \inf\{\text{const} : \|X_{ij}\| \leq \text{const } \alpha_i \beta_j \quad \forall i, j\}.$$

Основная схема построения используемых далее допустимых троек состоит в следующем. Во всех рассматриваемых тройках (M, J, Γ) трансформатор $J: M \rightarrow M$ определяется формулой

$$JX = \sum_{i=1}^{\infty} P_i X P_i \quad \forall X \in M_2. \quad (6)$$

Конкретный выбор пространства допустимых возмущений гарантирует сходимость этого ряда в сильной операторной топологии. Трансформатор Γ определяется с помощью задания его операторных блоков. В качестве ΓX_{mn} для X_{mn} возьмем оператор Y_{mn} , удовлетворяющий условию $P_m Y_{mn} P_n = Y_{mn}$ и являющийся решением уравнения

$$A Y_{mn} - Y_{mn} A = A_m Y_{mn} - Y_{mn} A_n = P_m X_0 P_n, \quad (7)$$

где $A_j = P_j A, j \geq 1$ (см. [4]). При конкретном выборе пространства допустимых возмущений M нам каждый раз придется доказывать ограниченность трансформатора Γ , восстанавливая его из операторных блоков ΓX_{mn} .

ТЕОРЕМА 3. Пусть спектр оператора A представим в виде (3) и возмущение $B \in \text{End } H$ таково, что $B = R^{-1} B_0, B_0 \in \sigma_2(H)$. Тогда при выполнении условия

$$\|B_0\|_2 < \frac{1}{4} \quad (8)$$

оператор $A - B$ подобен оператору

$$A - \sum_{i=1}^{\infty} P_i X P_i,$$

где X – решение уравнения (2), причем $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \sigma_2(H)$. Оператор преобразования U оператора $A - B$ в оператор $A - \sum_{i=1}^{\infty} P_i X P_i$ представлен в виде $U = (I + \Gamma X)$, где ΓX также принадлежит идеалу $\sigma_2(H)$.

Более того, если $B_0 \in \sigma_2(H, \alpha, \beta)$ и

$$\max \left\{ \max_j \sum_{k \neq j} \alpha_k \beta_k, \sum_{m, n \geq 1} \alpha_m^2 \beta_n^2 \right\} \|B_0\|_{\alpha\beta} < \frac{1}{4},$$

то $X_0 \in \sigma_2(H, \alpha, \beta)$ и $\Gamma X \in \sigma_2(H, \alpha, \beta)$, т.е. имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|X_{0ij}\|_2 &\leq C_2 \alpha_i \beta_j, & i, j \geq 1, \\ \|\Gamma X_{ij}\|_2 &\leq C_3 \alpha_i \beta_j, & i, j \geq 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сначала допустимую для оператора A тройку. В качестве пространства допустимых возмущений M возьмем пространство операторов, представимых в виде $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \sigma_2(H)$ с нормой $\|X\|_M = \|X_0\|_2$. Так как далее у нас появятся и другие пространства допустимых возмущений, то обозначим это пространство M_2 .

Выполнение аксиомы 1) определения 2 следует из [1, с. 536], где показано, что M_2 – банахово пространство, и из очевидных неравенств

$$\|X\|_{\infty} = \|R^{-1}X_0\|_{\infty} \leq \|R^{-1}\|_{\infty} \|X_0\|_2 = \text{const} \cdot \|X\|_{M_2}.$$

Перейдем к построению трансформаторов

$$J: M_2 \rightarrow M_2, \quad \Gamma: M_2 \rightarrow \sigma_2(H).$$

Трансформатор J зададим формулой (6). Из [4] следует, что уравнения (7), с помощью которых определяются операторные блоки оператора ΓX , разрешимы и Y_{mn} допускает оценку

$$\|Y_{mn}\|_2 \leq (\text{dist}(\sigma_m, \sigma_n))^{-1} \|P_m X P_n\|_2.$$

Теперь оператор ΓX зададим формулой

$$\Gamma X = \sum_{m, n} \Gamma(P_m X P_n),$$

считая $\Gamma(P_n X P_n) = 0$ для всех $n \geq 1$. Так как

$$\begin{aligned} \|\Gamma X\|_2^2 &\leq \sum_{m, n} \|\Gamma X_{mn}\|_2^2 \leq \sum_{m, n} (\text{dist}(\sigma_m, \sigma_n))^{-1} r_m \|X_{0mn}\|_2^2 \\ &\leq \sum_{m, n} \|X_{0mn}\|_2^2 \leq \|X_0\|_2^2 = \|X\|_{M_2}^2, \end{aligned}$$

то $\Gamma X \in \sigma_2(H)$ и $\|\Gamma X\| \leq \|X\|_{M_2}$.

Проверим выполнение аксиомы 4) определения 2. Пусть

$$Y \in M_2, \quad X \in M_2, \quad Z = (\Gamma Y)X = R^{-1}R\Gamma Y R^{-1}X_0 = R^{-1}Z_0,$$

где $Z_0 = R\Gamma Y R^{-1}X_0$. Покажем, что $Z \in M_2$, и оценим его норму:

$$\begin{aligned}
 \|Z_{0ij}\|_2 &\leq \left\| \sum_k P_i R\Gamma Y R^{-1} P_k X_0 P_j \right\|_2 \\
 &\leq \sum_k |r_i^{-1}(\text{dist}(\sigma_i, \sigma_k))^{-1} \cdot r_i| \cdot \|Y_{0ik}\|_2 \cdot r_k \cdot \|X_{0kj}\|_2 \leq \sum_k \|Y_{0ik}\|_2 \cdot \|X_{0kj}\|_2, \\
 \|Z_0\|_2^2 &\leq \sum_{i,j} \left(\sum_k \|Y_{0ik}\|_2 \cdot \|X_{0kj}\|_2 \right)^2 \leq \sum_{i,j} \left(\sum_k \|Y_{0ik}\|_2^2 \sum_k \|X_{0kj}\|_2^2 \right) \\
 &\leq \sum_{i,k} \|Y_{0ik}\|_2^2 \cdot \sum_{k,j} \|X_{0kj}\|_2^2 = \|X\|_{M_2}^2 \cdot \|Y\|_{M_2}^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $Z \in M_2$ и

$$\|(\Gamma Y)X\|_{M_2} \leq \|X\|_{M_2}^2 \cdot \|Y\|_{M_2}^2.$$

Для оператора $X\Gamma Y$ доказательство очевидно, причем $\gamma = 1$. Все аксиомы допустимой тройки имеют место. Условие (8) гарантирует разрешимость нелинейного операторного уравнения (2). Осталось применить теорему 2.

Для доказательства второго утверждения теоремы 3 сконструируем другую допустимую тройку следующим образом. Оператор $X \in \text{End } H$, $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \sigma_2(H)$, отнесем к пространству допустимых возмущений $M_{\alpha\beta}$, если $X_0 \in \sigma_2(H, \alpha, \beta)$, с нормой $\|X\|_{M_{\alpha\beta}} = \|X_0\|_{\alpha\beta}$. Относительно введенной нормы $M_{\alpha\beta}$ есть банахово пространство [4], и так как

$$\begin{aligned}
 \|X\|_\infty &= \|R^{-1}X_0\|_\infty \leq \|R^{-1}\|_\infty \cdot \|X_0\|_2 \\
 &= \|R^{-1}\| \cdot \|X\|_{M_{\alpha\beta}} \sqrt{\sum_{i,j} \alpha_i^2 \beta_j^2} = \text{const} \|X\|_{M_{\alpha\beta}},
 \end{aligned}$$

то аксиома 1) выполнена. Трансформаторы J и Γ строятся так же, как и в предыдущей допустимой тройке. Оценим норму оператора ΓX :

$$\begin{aligned}
 \|\Gamma X\|_2^2 &\leq \sum_{m,n} \|\Gamma P_m X P_n\|_2^2 \leq \sum_{m,n} ((\text{dist}(\sigma_m, \sigma_n))^{-1} r_m \|X_{0mn}\|_2^2) \\
 &\leq \left(\sum_{m,n} \alpha_m^2 \beta_n^2 \right)^2 \|X\|_{M_{\alpha\beta}}^2 = \gamma_1^2 \|X\|_{M_{\alpha\beta}}^2.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $X \in M_{\alpha\beta}$, $Y \in M_{\alpha\beta}$. Проверим выполнение аксиомы 4). Рассмотрим оператор $Z = X\Gamma Y = R^{-1}X_0\Gamma Y = R^{-1}Z_0$, покажем, что $Z \in M_{\alpha\beta}$ и получим оценку нормы этого оператора. Каждый оператор Z_{0mn} имеет вид

$$Z_{0mn} = \sum_k X_{0mk} \Gamma Y_{kj},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|Z_{0mn}\|_2 &\leq \sum_{k \geq 1} \|X_{0mk}\|_2 \|\Gamma Y_{kn}\|_2 \leq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq j}} (\alpha_m \beta_k \alpha_k \beta_n) \|X\|_{M_{\alpha\beta}} \|Y\|_{M_{\alpha\beta}} \\ &= \left(\sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq j}} \alpha_k \beta_k \right) \alpha_m \beta_n \|X\|_{M_{\alpha\beta}} \|Y\|_{M_{\alpha\beta}} = \gamma_2 \alpha_m \beta_n \|X\|_{M_{\alpha\beta}} \|Y\|_{M_{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $(\Gamma Y)X \in M_{\alpha\beta}$ и

$$\|(\Gamma Y)X\|_{M_{\alpha\beta}} \leq \gamma_2 \|X\|_{M_{\alpha\beta}} \|Y\|_{M_{\alpha\beta}}.$$

Таким образом, аксиома 4) имеет место и в качестве постоянной γ можно взять величину

$$\gamma = \max \left\{ \max_j \sum_{k \neq j} \alpha_k \beta_k, \sum_{m,n} \alpha_m^2 \beta_n^2 \right\}.$$

В этом случае утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть все собственные значения λ_i , $i \geq 1$, оператора A простые, соответствующие собственные векторы образуют ортонормированный базис, $P_i x = (x, e_i) e_i$ для любого $x \in H$ и оператор $R^{-1} \in \text{End } H$ задан формулой

$$R^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n e_n, \quad \text{если } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Пусть возмущение $B \in \text{End } H$ таково, что $B = R^{-1}B_0$, $B_0 \in \sigma_2(H)$. Тогда при выполнении условия

$$4\|B_0\| < 1 \tag{9}$$

оператор $A - B$ подобен оператору

$$A - \sum_{i=1}^{\infty} P_i X P_i,$$

имеющему матрицу диагональной структуры в базисе $\{e_i\}$, $i \geq 1$, где $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \sigma_2(H)$, — решение уравнения (2). Оператор преобразования U таков, что $U = (I + \Gamma X)$, где ΓX также принадлежит идеалу $\sigma_2(H)$.

Более того, если выполнены условия

$$|b_{0ij}| \leq c_1 \alpha_i \beta_j, \quad i, j \geq 1, \quad c_1 \geq 0, \tag{10}$$

$$4 \max \left\{ \max_j \sum_{k \neq j} \alpha_k \beta_k, \sum_{m,n \geq 1} \alpha_m^2 \beta_n^2 \right\} \|B_0\|_{\alpha\beta} < 1, \tag{11}$$

то для элементов матрицы операторов X_0 , ΓX имеют место оценки

$$\begin{aligned} |X_{0ij}| &\leq c_2 \alpha_i \beta_j, & i, j \geq 1, \\ |\Gamma X_{ij}| &\leq c_3 \alpha_i \beta_j, & i, j \geq 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство следствия 1 полностью повторяет доказательство теоремы 3, кроме построения трансформатора Γ . Остановимся только на этом вопросе.

Пусть $Y = \Gamma X$. Из равенства $AY - YA = X - JX$ следует, что элементы матрицы оператора Y относительно базиса e_n имеют вид

$$Y_{ij} = \begin{cases} \frac{r_i X_{0ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

и

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{i,j \geq 1} \left(\frac{r_i X_{0ij}}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2 \leq \sum_{i,j \geq 1} X_{0ij}^2 = \|X_0\|_2 = \|X\|_M.$$

Остальная часть доказательства не меняется. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия (10), (11) следствия 2. Тогда оператор $A - B$ является спектральным оператором скалярного типа (по Данфорду) и для его собственных значений $\tilde{\lambda}_i$ и собственных векторов $\tilde{e}_i$ справедливы формулы

$$\tilde{e}_i = e_i + \Gamma X e_i, \quad (13)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - (B e_i, e_i) - (B \Gamma X e_i, e_i), \quad (14)$$

причем

$$\tilde{e}_i = e_i + \Gamma B e_i + O(\|B_0\|_2^2), \quad (15)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - (B e_i, e_i) - (B \Gamma B e_i, e_i) + O(\|B_0\|_2^3) \quad (16)$$

и

$$\sin(e_i, \tilde{e}_i) = \frac{\|\Gamma X e_i\|}{\sqrt{1 + \|\Gamma X e_i\|^2}} \leq \frac{2.35 \|\Gamma B e_i\|}{\sqrt{1 + 2.35^2 \|\Gamma B e_i\|^2}}. \quad (17)$$

Доказательство. Поскольку оператор $A - B$ подобен нормальному оператору $A - JX$, то $A - B$ – спектральный оператор скалярного типа. Непосредственной проверкой легко убедиться, что вектор $\tilde{e}_i$, определяемый формулой (13), является собственным вектором оператора $A - B$, отвечающим собственному значению $\tilde{\lambda}_i$. Формулы (16), (15) получаются из (14) и (13), если в качестве неизвестного оператора X взять второе приближение к нему по методу простых итераций. При выводе формулы (17) учтено, что отображение $\Phi(X)$, определенное правой частью уравнения (2), является сжимающим в шаре с центром в нуле и радиусом $r = 2.35 \|B\|$ (см. [2]). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены условия (10) и (11) следствия 2. Тогда векторы e_i и $\tilde{e}_i$ связаны равенством:

$$\tilde{e}_i = e_i + \sum_{i \neq k} \delta_i e_i, \quad (18)$$

где

$$|\delta_i| \leq \text{const} \left| \frac{r_i}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \alpha_i \beta_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (18) немедленно следует из (12) и (13).

Рассмотрим теперь несколько другой тип возмущения. Пусть $B = R^{-1}B_0$, где B_0 – ограниченный линейный оператор.

Введем в рассмотрение функцию $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условиям

- 1) $\alpha(0) = 1$;
- 2) $\sum_n \alpha(n) = M_1 < \infty$;
- 3) $\sum_k \alpha(i-k)\alpha(k-j) \leq M_2\alpha(i-j)$, $M_2 > 0$.

Определим подалгебру $\text{End}_\alpha H$ операторов из $\text{End } H$ следующим образом. Оператор $X \in \text{End } H$ отнесем к $\text{End}_\alpha H$, если существует константа c такая, что имеют место оценки

$$\|X_{ij}\|_\infty = \|P_i X P_j\|_\infty \leq c\alpha(i-j),$$

при этом норма определяется так:

$$\|X\|_* = \inf\{c: \|X_{ij}\|_\infty \leq c\alpha(i-j) \quad \forall i, j \geq 1\}.$$

С учетом условий 1)–3) на функцию α легко показать, что M_* является банаховой алгеброй.

Следуя терминологии из [6], можно сказать, что M_* состоит из операторов $X \in \text{End } H$, матричные элементы X_{ij} которых убывают по закону, определяемому функцией α .

ТЕОРЕМА 4. Пусть спектр нормального компактного оператора A представим в виде (3), $P_i = P(\sigma_i, A)$, $B = R^{-1}B_0$, $B_0 \in \text{End } H$ и выполняется неравенство

$$5\|B_0\|_\infty < 1. \quad (19)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - \sum_{i=1}^\infty P_i X P_i$, где оператор X , являющийся решением уравнения (2), также имеет вид $X = R^{-1}X_0$ и $X_0 \in \text{End } H$.

Более того, при выполнении условий

$$\begin{aligned} \|B_{0ij}\|_\infty &\leq c_1\alpha(i-j) \quad \forall i, j \geq 1, \quad c_1 > 0, \\ \max\{M_1, M_2\} \cdot \|B_0\|_* &< \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (20)$$

оператор $X = R^{-1}X_0$ такой, что

$$\|X_{0ij}\|_\infty \leq c_2\alpha(i-j) \quad \forall i, j \geq 1, \quad c_2 > 0,$$

и

$$\|\Gamma X_{ij}\|_\infty \leq c_3\alpha(i-j) \quad \forall i, j \geq 1, \quad c_3 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первое утверждение теоремы 4. Допустимым пространством возмущений M_∞ в этом случае удобно взять пространство операторов вида $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \text{End } H$ с нормой $\|X\|_{M_\infty} = \|X_0\|_\infty$. Тогда выполнение аксиомы 1) определения 2 очевидно. Трансформатор $J: M_\infty \rightarrow M_\infty$ так же зададим формулой (6) и ΓX так же определим на операторных блоках ΓX_{mn} , но в этом случае трансформатор Γ действует из M_∞ в $\text{End } H$. Тогда для оператора ΓX_{mn} имеет место оценка

$$\|\Gamma X_{mn}\|_\infty \leq 5r_m(\text{dist}(\sigma_m, \sigma_n))^{-1}\|X_{0mn}\|_\infty.$$

Так как (см. [6, теорема 1.6]) любой оператор $Z \in \text{End } H$ можно представить как

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|p| \leq n} \left(1 - \frac{|p|}{n}\right) Z_p, \quad Z_p = \sum_{i-j=p} Z_{ij},$$

и норма

$$\|Z_p\|_\infty = \sup_{i-j=p} \|Z_{ij}\|_\infty,$$

то для оператора ΓX имеем

$$\begin{aligned} \|\Gamma X_p\|_\infty &\leq 5 \sup_{m-n=p} r_m(\text{dist}(\sigma_m, \sigma_n))^{-1} \|X_{0mn}\|_\infty \\ &\leq 5 \sup_{m-n=p} \|X_{0mn}\|_\infty = 5\|X_{0p}\|_\infty, \\ \|\Gamma X\|_\infty &\leq 5 \sum_p \|X_{0p}\|_\infty = 5\|X_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \Gamma X_p$ абсолютно сходится в $\text{End } H$ по операторной норме и оператор $\Gamma: M_\infty \rightarrow \text{End } H$ построен. Проверим выполнение свойств допустимой тройки, относящихся к нему.

Пусть $X \in M_\infty$, $Y \in M_\infty$, тогда очевидно, что $X(\Gamma Y) \in M_\infty$ и

$$\|X(\Gamma Y)\|_{M_\infty} \leq \|X\|_{M_\infty} \|Y\|_{M_\infty}.$$

Рассмотрим теперь оператор $(\Gamma Y)X$, представив его в виде

$$Z = (\Gamma Y)X = R^{-1}R\Gamma YX = R^{-1}Z_0;$$

покажем, что $Z_0 \in \text{End } H$, и посчитаем его норму. Так как

$$\begin{aligned} Z_{0ij} &= \sum_k (R\Gamma Y)_{ik} X_{kj} = \sum_k R_{ii} \Gamma Y_{ik} R_{kk}^{-1} X_{kj}, \\ \|Z_{0ij}\|_\infty &\leq 5 \sum_k r_i r_i^{-1} \|Y_{0ik}\|_\infty (\text{dist}(\sigma_i, \sigma_k))^{-1} r_k \|X_{0kj}\|_\infty \\ &\leq 5 \sum_k \|Y_{0ik}\|_\infty \|X_{0kj}\|_\infty, \end{aligned}$$

и $Y_0 \in \text{End } H$, $X_0 \in \text{End } H$, то

$$\|Z_0\|_\infty \leq 5\|Y_0\|_\infty \|X_0\|_\infty.$$

Таким образом, все аксиомы допустимой тройки выполнены и $\gamma = 5$. Условие (19) обеспечивает выполнение условий теоремы 2. Следовательно, $A - B$ подобен $A - JX$ и $X \in M_\infty$, т.е. $X = R^{-1}X_0$, где $X_0 \in \text{End } H$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы 4.

Строим пространство допустимых возмущений для случая, если $B = R^{-1}B_0$ и элементы $P_i B_0 P_j$ допускают оценку (20). Оператор $Y \in \text{End } H$ отнесем к пространству M_α , если $Y = R^{-1}Y_0$ и $Y_0 \in \text{End}_\alpha H$, с нормой $\|Y\|_{M_\alpha} = \|Y_0\|_*$. Проверку аксиомы 1) можно найти в [7] для пространства $\text{End}_\alpha H$, а отсюда автоматически следует и выполнение ее и для пространства M_α . Трансформаторы $J: M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ и $\Gamma: M_\alpha \rightarrow \text{End } H$ строятся так, как показано выше; при этом

$$\begin{aligned}\|\Gamma X_p\|_\infty &\leq 5 \sup_{i-j=p} \|X_{0ij}\|_\infty \leq 5\|X\|_{M_\alpha} \alpha(p), \\ \|\Gamma X\|_\infty &\leq 5 \sum_p \|X\|_{M_\alpha} \alpha(p) \leq 5M_1\|X\|_{M_\alpha},\end{aligned}$$

т.е. $\Gamma X \in \text{End}_\alpha H$.

Пусть теперь $X \in M_\alpha$ и $Y \in M_\alpha$. Тогда рассмотрим оператор

$$Z = X\Gamma Y = R^{-1}X_0\Gamma Y = R^{-1}Z_0,$$

где

$$\begin{aligned}\|Z_{ij}\|_\infty &\leq \sum_k \|X_{0ik}\|_\infty \|\Gamma Y_{kj}\|_\infty \\ &\leq 5 \sum_k \|X\|_{M_\alpha} \alpha(i-k) \|Y\|_{M_\alpha} \alpha(k-j) \leq 5M_2\|X\|_{M_\alpha} \|Y\|_{M_\alpha},\end{aligned}$$

т.е. $Z_0 \in \text{End}_\alpha H$ и $\|X\Gamma Y\| \leq 5M_2\|X\|_{M_\alpha} \|Y\|_{M_\alpha}$. Рассмотрим теперь оператор

$$C = (\Gamma Y)X = R^{-1}(R(\Gamma Y))R^{-1}X_0 = R^{-1}C_0$$

и оценим норму оператора C_0 :

$$\begin{aligned}\|C_{0ij}\|_\infty &\leq \sum_k \|R_{ii}\Gamma X_{ik}R_k^{-1}X_{0kj}\| \\ &\leq 5 \sum_k \|X\|_{M_\alpha} \alpha(k-j) \|Y\|_{M_\alpha} \alpha(i-k) \leq 5M_2\|X\|_{M_\alpha} \|Y\|_{M_\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, все аксиомы допустимой тройки выполнены и в этом случае, причем $\gamma = 5 \max\{M_1, M_2\}$. Применяя теорему 2, получаем, что операторы $A - B$ и $A - JX$ подобны, и так как $X \in M_\alpha$, то $X_0 \in \text{End}_\alpha H$.

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для данного типа возмущений также можно сформулировать и доказывать результаты, аналогичные результатам следствий 2 и 3 теоремы 3. Мы не приводим соответствующие формулировки ввиду их полной аналогии.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть все собственные значения λ_i , $i \geq 1$, оператора A простые и выполняются условия теоремы 4. Тогда собственные векторы e_k , $k \geq 1$, невозмущенного оператора A и собственные векторы $\tilde{e}_k$, $k \geq 1$, возмущенного оператора $A - B$ связаны равенством

$$\tilde{e}_k = e_k + \sum_{i \neq k} d_i e_i,$$

где

$$|d_i| = \text{const} \left| \frac{r_i}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \alpha(i - k).$$

Рассмотрим теперь обратную задачу спектрального анализа. Пусть известны некоторые оценки коэффициентов Фурье собственных векторов возмущенного оператора $A - B$ в базисе из собственных векторов невозмущенного оператора A , а сам оператор B не известен. Приводимая ниже теорема 5 позволяет в этом случае определить некоторые характеристики оператора B .

Сначала наложим на функцию $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$ еще одно условие:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k|^{-1} |\ln \alpha(k)| = 0$$

и будем считать в дальнейшем его выполненным. Это условие гарантирует наполненность банаховой алгебры $\text{End}_\alpha H$ [6, теорема 1], т.е. каждый обратимый в $\text{End } H$ оператор $X \in \text{End}_\alpha H$ обратим и в $\text{End}_\alpha H$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть собственные значения λ_i , $i \geq 1$, оператора A простые и возмущение B представимо в виде $B = R^{-1}B_0$, $B_0 \in \text{End } H$,

$$5 \|B_0\|_\infty < \frac{1}{4}.$$

Пусть собственные векторы $\tilde{e}_k$, $k \geq 1$, возмущенного оператора $A - B$ и собственные векторы e_k , $k \geq 1$, невозмущенного оператора A связаны равенством

$$\tilde{e}_k = e_k + \sum_{i \neq k} \beta_{ik} e_i, \quad (21)$$

причем

$$|\beta_{ik}| \leq c \alpha(i - k) \gamma(i, k), \quad \gamma(i, k) = \frac{r_i}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

Тогда для элементов b_{0ij} матрицы оператора B_0 имеют место оценки

$$|b_{0ij}| \leq c \alpha(i - j), \quad c > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве допустимой тройки в данном случае возьмем тройку (M_∞, J, Γ) , построенную в теореме 4. Тогда собственные векторы $\tilde{e}_k$ и e_k связаны равенством

$$\tilde{e}_k = e_k + \Gamma X e_k = e_k + \sum_{i \neq k} (\Gamma X)_{ik} e_i. \quad (22)$$

Так как собственные векторы оператора A (или оператора $A - JX$) образуют базис, а разложение любого вектора по базису единственно, то из (21) и (22) следует, что

$$|\Gamma X_{ik}| \leq c\gamma(i, k)\alpha(i - k).$$

С другой стороны,

$$(\Gamma X)_{ik} = \begin{cases} r_i \frac{X_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}, & i \neq k, \\ 0, & i = k; \end{cases}$$

следовательно,

$$X_{0ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_k}{r_i} (\Gamma X)_{ik},$$

откуда

$$|X_{0ij}| \leq c \frac{\lambda_i - \lambda_k}{r_i} \cdot \frac{r_i}{\lambda_i - \lambda_k} \alpha(i - k).$$

Таким образом, X_0 есть элемент пространства $\text{End}_\alpha H$ и

$$X = R^{-1} X_0 \in M_\alpha.$$

Вернемся к нелинейному уравнению (2) и перепишем его в виде:

$$B = (X + \Gamma X - JX)(I + \Gamma X)^{-1}. \quad (23)$$

Так как $\Gamma X \in \text{End}_\alpha H$ и $\text{End}_\alpha H$ — наполненная алгебра, то $(I + \Gamma X)^{-1} \in \text{End}_\alpha H$. Операторы, стоящие в правой части равенства (23), принадлежат M_α , следовательно, $B \in M_\alpha$, т.е. $B = R^{-1} B_0$, $B_0 \in \text{End}_\alpha H$ и $|b_{0ij}| < c\alpha(i - j)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
- [2] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1987.
- [3] Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 3–32.
- [4] Баскаков А. Г. Спектральный анализ относительно конечномерных возмущений спектральных операторов // Изв. вузов. Матем. 1991. № 1. С. 3–11.
- [5] Ускова Н. Б. О спектре некоторых классов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 350–352.
- [6] Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 3–26.
- [7] Ускова Н. Б. Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 3. С. 712–721.