Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Иванков, О линейной независимости некоторых чисел, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 383–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:18:21

УДК 511.361

О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

П. Л. Иванков

В работе с помощью одного из вариантов метода Зигеля установлена линейная независимость значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами и их производных в достаточно общей ситуации и получены соответствующие количественные результаты.

Библиография: 9 названий.

1. Две теоремы. Изучение арифметических свойств значений гипергеометрических функций обычно начинается с построения линейной приближающей формы, имеющей при $z = 0$ нуль достаточно высокого порядка. Метод построения такой формы основывается на применении принципа Дирихле или на использовании эффективной конструкции. В работе [1] предложен новый подход к задаче построения приближающей формы, сочетающей в себе элементы обоих методов. В дальнейшем этот подход был использован в работе [2]. С помощью дополнительных соображений можно расширить область применимости указанного подхода.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_k(x)$, $b_k(x)$ – многочлены, все корни которых рациональны, а коэффициенты при старших степенях равны 1; $\deg a_k(x) = r_k$, $\deg b_k(x) = u_k$, $u_k - r_k = v_k \geq 0$, $k = 1, \dots, t$; $d_1, \dots, d_t$ – такие делители соответственно чисел $v_1, \dots, v_t$, что $\lambda = v_k/d_k$ не зависит от k (если $v_k \neq 0$, то можно, например, положить $d_k = v_k$). Пусть далее, $b(x) = (x + \beta_1) \cdots (x + \beta_u)$ – многочлен с коэффициентами из некоторого мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$, $\beta_1, \dots, \beta_u$ – алгебраические числа степеней соответственно $\kappa_1, \dots, \kappa_u$,

$$\tau = 1 - \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{1}{\kappa_i}.$$

Предположим, что $r_k < m_k = u_k + d_k u$, и рассмотрим при $k = 1, \dots, t$ функции

$$\psi_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{d_k \nu} \omega_k^{d_k \nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} \prod_{x=1}^{d_k \nu} \frac{1}{b(x)}, \quad (1)$$

где ω_k – числа из поля $\mathbb{I}$. Если функции

$$1, \psi_k^{(j_k)}(z), \quad k = 1, \dots, t, \quad j_k = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант MHS000.

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого нетривиального набора h_0, h_{kj_k} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ при $H = \max |h_{kj_k}| > H_0(\psi_k(z), \mathbb{I}(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^t \sum_{j_k=0}^{m_k-1} h_{kj_k} \psi_k^{(j_k)}(1) \right| > H^{-\frac{m(\lambda+u)+u\tau}{\lambda+u-u\tau}-\varepsilon},$$

где $m = m_1 + \dots + m_t$.

Если в сформулированной теореме положить $a_k(x) \equiv 1, u_1 = \dots = u_t, d_1 = \dots = d_t = 1$, то получится первое утверждение теоремы из работы [1], а если $v_1 = \dots = v_t, d_1 = \dots = d_t = 1$, то получится теорема 1 из [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы,

$$a_k(x) \equiv 1, \quad b_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, t.$$

Относительно функций $\psi_k^{(j_k)}(z)$, $k = 1, \dots, t, j_k = 0, 1, \dots, m_k - 1$, предположим, что они линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого нетривиального набора h_{kj_k} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ при $H = \max |h_{kj_k}| \geq 3$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^t \sum_{j_k=0}^{m_k-1} h_{kj_k} \psi_k^{(j_k)}(1) \right| > H^{1-m-\frac{\gamma}{\sqrt{\ln \ln H}}},$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, зависящая от параметров функций $\psi_k(z)$ и от поля $\mathbb{I}$: $m = m_1 + \dots + m_t$.

Последняя теорема обобщает второе утверждение теоремы из [1]. Заметим еще, что для исследования арифметической природы значений функции (1) нельзя непосредственно применить метод Зигеля (см. [4, гл. 3]), так как эти функции не сводятся к E -функциям (см. по этому поводу работу работу [5]).

2. Доказательство теоремы 1. Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от функций $\psi_1(z), \dots, \psi_t(z)$ и от поля $\mathbb{I}$. При $0 < \varepsilon < 1$ положим $N_\varepsilon = [(1-\varepsilon)n/m]$, n — натуральный параметр.

ЛЕММА 1. Для любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, при достаточно большом n существует такой нетривиальный набор $y_s, s = 0, 1, \dots, n$, целых чисел из поля $\mathbb{I}$, по модулю не превосходящих $n^{\varepsilon n}$, что

$$\sum_{s \equiv g_k(d_k)} \frac{y_s}{\omega_k^s} \left(\frac{n!}{s!} \right)^\lambda \prod_{N_\varepsilon+1 \leq d_k x \leq N_\varepsilon+n-s} \frac{1}{b_k(x)} \times \prod_{d_k \leq d_k x \leq n+1-s} \frac{a_k(x) s(s-1) \cdots (s-\mu_k+1)}{\mu_k!} = 0, \quad (3)$$

$$g_k = 0, 1, \dots, d_k - 1, \quad \mu_k = 0, 1, \dots, M_k, \quad M_k = \left[2m_k + \frac{(N_\varepsilon - 1)m_k}{d_k} - 1 \right],$$

$$k = 1, \dots, t,$$

где сумма распространена на все $s, 0 \leq s \leq n$, сравнимые с d_k по модулю d_k , а произведения — на все целые неотрицательные значения x , удовлетворяющие указанным ограничениям.

Доказательство леммы проводится стандартным способом. Рассматривая равенства (3) как систему линейных однородных уравнений относительно y_s , нетрудно установить, что общий наименьший знаменатель и абсолютная величина коэффициентов этой системы растут при $n \rightarrow \infty$ медленнее любой положительной степени выражения n^n ; число уравнений в системе не превосходит $\gamma_1 + (1 - \varepsilon)n$. Из этих фактов легко выводится существование чисел y_s с требуемыми свойствами (см., например, доказательство леммы 11 из [4, с. 109]).

Пусть

$$\begin{aligned}\psi_{kj_k}(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{d_k\nu} \omega_k^{d_k\nu} \nu^{j_k-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} \prod_{x=1}^{d_k\nu} \frac{1}{b(x)}, \\ p_s &= y_s \left(\frac{n!}{s!} \right)^{\lambda} \prod_{x=N_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon+n-s} b(x), \quad s = 0, 1, \dots, n, \\ P(z) &= \sum_{s=0}^n p_s z^s, \quad P(z) \psi_{kj_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{kj_k\nu} z^\nu, \quad j_k = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, t.\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства $w_{kj_k\nu} = 0$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$, $\nu = n+1, \dots, n+N_\varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}w_{kj_k\nu} &= \sum_{s \equiv \nu(d_k)} p_s \omega_k^{\nu-s} \left(\frac{\nu-s}{d_k} \right)^{j_k-1} \prod_{x=1}^{(\nu-s)/d_k} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)} \\ &= \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{b(x)} \prod_{d_k \leq d_k x \leq N_\varepsilon} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{s \equiv \nu(d_k)} \frac{y_s}{\omega_k^s} \left(\frac{n!}{s!} \right)^{\lambda} \\ &\quad \times \prod_{d_k \leq d_k x \leq n+1-s} a_k(x) \prod_{N_\varepsilon+1 \leq d_k x \leq n+N_\varepsilon-s} \frac{1}{b_k(x)} \left(\frac{\nu-s}{d_k} \right)^{j_k-1} \\ &\quad \times \prod_{x_1=0}^{X_1} a_k \left(\frac{\nu-s}{d_k} - x_1 \right) \prod_{x_2=1}^{X_2} b_k \left(\frac{\nu-s}{d_k} + x_2 \right) \prod_{x=\nu+1}^{n+N_\varepsilon} b(x-s), \quad (4)\end{aligned}$$

где $X_1 = -[(n+1-\nu)/d_k] - 1$, $X_2 = [(n+N_\varepsilon-\nu)/d_k]$ (по поводу сумм и произведений см. замечание в формулировке леммы 1).

Мы видим, что в каждое слагаемое входит многочлен от символа s (образованный множителем $(\nu-s)/d_k^{j_k-1}$ и произведениями по x_1 и x_2). Степень его не превосходит, очевидно, M_k , поэтому его можно представить в виде

$$\sum_{\mu_k=0}^{M_k} \theta_{\mu_k} \frac{s(s-1) \cdots (s-\mu_k+1)}{\mu_k!}$$

с некоторыми коэффициентами θ_{μ_k} . Выберем теперь число g_k , $0 \leq g_k \leq d_k - 1$, сравнимое с ν по модулю d_k , умножим равенство (3), отвечающее выбранному g_k и числу μ_k , на θ_{μ_k} и сложим все получившиеся равенства (при выбранном g_k и $\mu_k = 0, 1, \dots, M_k$). Левая часть полученного таким способом равенства будет с точностью до вынесенного за знак суммы множителя совпадать с правой частью равенства (4), а правая часть будет равна нулю. Из предположения о линейной независимости функций $1, \psi_{kj_k}(z)$ следует, что $\omega_k \neq 0$, $k = 1, \dots, t$. Поэтому сумма из правой части равенства (4) равна нулю, а тогда и лемма 2 доказана.

Обозначим

$$P_{kj_k}(z) = \sum_{\nu=0}^n w_{kj_k\nu} z^\nu, \quad k = 1, \dots, t, \quad j_k = 1, \dots, m_k.$$

$$R_{kj_k}(z) = P(z)\psi_{kj_k}(z) - P_{kj_k}(z),$$

Таким образом, мы получаем совместные приближения для совокупности функций $\psi_{kj_k}(z)$. Пользуясь тем, что эти функции удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений, построим целую совокупность таких совместных приближений с отличным от тождественного нуля определителем с помощью метода, предложенного в работе [6]. Затем, повторив соответствующие рассуждения указанной работы, перейдем от функциональных приближающих форм к числовым. Получающийся при этом результат сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n существует набор чисел q_{lkj_k} , q_l , $l = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$, из поля $\mathbb{I}$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) $\det(q_l, q_{lkj_k})_{k=1, \dots, t; j_k=1, \dots, m_k; l=0, 1, \dots, m} \neq 0$ (строки определителя идут в порядке возрастания l , а столбцы – в порядке возрастания k и в порядке возрастания j_k при равных k);
- 2) $|q_l| \leq n^{(\lambda+u+\varepsilon)n}$;
- 3) $|q_l \psi_{kj_k}(1) - q_{lkj_k}| \leq n^{-((\lambda+u)/m-\varepsilon)n}$, $l = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$;
- 4) числа q_l являются целыми в поле $\mathbb{I}$;
- 5) существует отличное от нуля целое число G из поля $\mathbb{I}$ такое, что все числа Gq_{lkj_k} , $l = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$, являются целыми в поле $\mathbb{I}$, и $|G| \leq n^{(u\tau/m+\varepsilon)n}$.

С помощью леммы 3 можно стандартным способом (см., например, соответствующее место работы [6]) оценить снизу модуль произвольной линейной формы от чисел $\psi_{kj_k}(z)$, а отсюда уже нетрудно получить утверждение теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 4. *При любом достаточно большом натуральном n существует такой нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$*

$$y_{kg_k\mu_k}, \quad k = 1, \dots, t, \quad g_k = 0, 1, \dots, d_k - 1,$$

$$\mu_k = 0, 1, \dots, M_k, \quad M_k = \left\lfloor \frac{m_k n}{d_k} - m_k - 1 \right\rfloor,$$

что при $0 \leq \nu \leq mn - n/\sqrt{\ln n} - 1$, $g_k \equiv \nu(d_k)$, $k = 1, \dots, t$, выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^t \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{[\nu/d_k]} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{\mu_k=0}^{M_k - g_k} y_{kg_k\mu_k} \frac{\nu(\nu-1) \cdots (\nu - \mu_k + 1)}{\mu_k!} \prod_{x=1}^{g_k} b(\nu - g_k + x) = 0. \quad (5)$$

При этом

$$|y_{kg_k\mu_k}| \leq e^{\gamma_2 n \sqrt{\ln n}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим каждое из равенств (5) на $(\nu!)^\lambda$ и будем рассматривать эти равенства как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $y_{kg_k\mu_k}$. Общий наименьший знаменатель коэффициентов такой системы и модули этих коэффициентов ограничены сверху величиной $e^{\gamma_3 n}$ (при доказательстве используется рациональность корней многочленов $b_k(x)$; см., например, лемму 2 из [4, с. 186]). Количество уравнений в системе не превосходит, очевидно, $mn - n/\sqrt{\ln n}$, количество неизвестных не меньше $mn - \gamma_4$. Применяя [4, гл. 3, лемма 13], легко завершаем доказательство леммы. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Для любого k , $1 \leq k \leq t$, и для любого g_k , $0 \leq g_k \leq d_k - 1$, существует $p_{kj_k s}$ — набор чисел из поля $\mathbb{I}$ ($j_k = 1, \dots, t_k$, а s пробегает все числа множества $0, 1, \dots, n$, сравнимые с g_k по модулю d_k) такой, что тождественно по ν выполняется равенство

$$\begin{aligned} & (n!)^{\lambda+u} \sum_{\mu_k=0}^{M_k - g_k} y_{kg_k\mu_k} \frac{\nu(\nu-1) \cdots (\nu - \mu_k + 1)}{\mu_k!} \prod_{x=1}^{g_k} b(\nu - g_k + x) \\ &= \sum_{s \equiv g_k(d_k)} \sum_{j_k=1}^{m_k} p_{kj_k s} \left(\frac{\nu - s}{d_k} \right)^{j_k - 1} \prod_{x=1}^{[s/d_k]} b_k \left(\frac{\nu - s}{d_k} + x \right) \prod_{x=1}^s b(\nu - s + x). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом при всех допустимых значениях индексов выполняется неравенство

$$|p_{kj_k s}| \leq \left(\frac{n!}{s!} \right)^{\lambda+u} e^{\gamma_5 n \sqrt{\ln n}},$$

а общий наименьший знаменатель чисел $p_{kj_k s}$ ограничен сверху величиной $e^{\gamma_6 n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем k и g_k , сократим обе части равенства (6) на общий множитель

$$\prod_{x=1}^{g_k} b(\nu - g_k + x)$$

и в получившееся равенство подставим столько различных натуральных значений ν , сколько имеется чисел $p_{kj_k s}$. Получим систему линейных уравнений, которой должны удовлетворять числа $p_{kj_k s}$. Определитель этой системы отличен от нуля (он легко сводится к определителю Вандермонда). Отсюда следует, что числа, для которых равенство (6) выполняется тождественно по ν , существуют, определяются этим равенством

однозначно и лежат в поле $\mathbb{I}$. Рассмотрим теперь совокупность многочленов от z первой степени

$$1, \frac{z}{d_k} + \beta_{k1}, \dots, \frac{z}{d_k} + \beta_{ku_k}, \\ z + \beta_1, z + \beta_1 - 1, \dots, z + \beta_1 - d_k + 1, \dots, z + \beta_u, z + \beta_u - 1, \dots, z + \beta_u - d_k + 1$$

$(-\beta_{k1}, \dots, -\beta_{ku_k}$ — корни многочлена $b_k(x)$). Занумеруем их в каком-нибудь порядке и обозначим через $\sigma_1(z), \dots, \sigma_{m_k+1}(z)$, где $m_k = u_k + d_k u$. Определим, далее, многочлены

$$\varkappa_{kj_k}(z) = \prod_{l=1}^{j_k-1} \sigma_l(z), \quad j_k = 1, \dots, m_k + 1,$$

и запишем равенство, получающееся из (6) заменой $((\nu - s)/d_k)^{j_k-1}$ на $\varkappa_{kj_k}(\nu - s)$, $p_{kj_k s}$ на $p'_{kj_k s}$ и сокращением на указанный выше общий множитель. Легко видеть, что правая часть полученного таким способом равенства есть разложение многочлена от ν

$$\varphi(\nu) = (n!)^{\lambda+u} \sum_{\mu_k=0}^{M_k-g_k} y_{kg_k\mu_k} \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu_k+1)}{\mu_k!}$$

в ряд Ньютона (см., например, 2.2 главы 2 из [7]). Поэтому числа $p'_{kj_k s}$ определяются однозначно и могут быть записаны в виде контурных интегралов

$$p'_{kj_k s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\varkappa_{j_k+1}((\zeta - s)/d_k)} \frac{1}{\prod_{x=1}^{[s/d_k]} b_k((\zeta - s)/d_k + x)} \prod_{x=1}^s \frac{1}{b(\zeta - s + x)} d\zeta, \quad (7)$$

где контур интегрирования Γ охватывает все особые точки подынтегральной функции. Числа $p_{kj_k s}$ легко выражаются через числа $p'_{kj_k s}$, а отсюда уже без труда можно вывести оставшиеся утверждения леммы; при этом для оценки общего наименьшего знаменателя чисел $p_{kj_k s}$ достаточно заметить, что интеграл из правой части равенства (7) равен (с точностью до знака) вычету подынтегральной функции относительно $\zeta = \infty$. Лемма 5 доказана.

Пусть

$$P_{kj_k}(z) = \sum_{s=0}^n \omega_k^s p_{kj_k s} z^s,$$

где числа $p_{kj_k s}$ определены в предыдущей лемме.

ЛЕММА 6. Линейная форма

$$R(z) = \sum_{k=1}^t \sum_{j_k=1}^{m_k} P_{kj_k}(z) \psi_{kj_k}(z)$$

имеет при $z = 0$ порядок нуля не меньше $tn - n/\sqrt{\ln n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} z^{\nu}.$$

Зафиксируем $\nu \geq 0$ и рассмотрим коэффициент w_{ν} при z^{ν} . Имеем

$$w_{\nu} = \sum_{k=1}^t \sum_{j_k=1}^{m_k} \sum_{s_k \equiv \nu(d_k)} \omega_k^{s_k} p_{kj_k} s_k \omega_k^{\nu-s_k} \left(\frac{\nu-s}{d_k} \right)^{j_k-1} \prod_{x=1}^{(\nu-s_k)/d_k} \frac{1}{b_k(x)} \prod_{x=1}^{\nu-s_k} \frac{1}{b(x)},$$

где сумма по s_k распространена на все значения s_k из множества $0, 1, \dots, \min(n, \nu)$, сравнимые с ν по модулю d_k . Пусть $\nu \equiv g_k(d_k)$, $0 \leq g_k \leq d_k - 1$, $k = 1, \dots, t$. Преобразуем выражение для w_{ν} следующим образом

$$w_{\nu} = \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \sum_{k=1}^t \omega_k^{\nu} \prod_{x=1}^{[\nu/d_k]} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{j_k=1}^{m_k} \sum_{s_k \equiv g_k(d_k)} p_{kj_k} s_k \left(\frac{\nu-s_k}{d_k} \right)^{j_k-1} \times \prod_{x=1}^{[s_k/d_k]} b_k \left(\frac{\nu-s_k}{d_k} + x \right) \prod_{x=1}^{s_k} b(\nu-s_k+x),$$

где без ограничения общности можно считать, что индекс суммирования s_k пробегает все числа множества $0, 1, \dots, n$, сравнимые с g_k по модулю d_k , так как в силу условия $b_k(0) = 0$ все слагаемые, отвечающие значениям s_k большим ν , равны нулю. По лемме 5 отсюда получаем, что w_{ν} с точностью до отличного от нуля множителя равно выражению

$$\sum_{k=1}^t \omega_k^{\nu} \prod_{x=1}^{[\nu/d_k]} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{\mu_k=0}^{M_k-g_k} y_k g_k \mu_k \frac{\nu(\nu-1) \cdots (\nu-\mu_k+1)}{\mu_k!} \prod_{x=1}^{g_k} b(\nu-g_k+x).$$

Последнее выражение равно нулю по лемме 4. Лемма 6 доказана.

С помощью лемм 4–6 нетрудно доказать теорему 2, повторив с очевидными изменениями соответствующую часть доказательства теоремы 1 из [5, с. 411].

4. Приложения. Чтобы построить примеры на применение доказанных теорем, заметим прежде всего, что функции (1) можно записать в виде

$$\psi_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{d_k \nu} (d_k^{\nu} \omega_k^{d_k})^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_k(x)}{B_k(x)},$$

где

$$B_k(x) = b_k(x) \prod_{l=0}^{d_k-1} \left(x + \frac{\beta_1 - l}{d_k} \right) \cdots \left(x + \frac{\beta_u - l}{d_k} \right).$$

Далее, легко видеть, что если q – натуральное число, то из линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций

$$1, \psi_k^{(j_k)}(z^q), \quad k = 1, \dots, t, \quad j_k = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (8)$$

следует линейная независимость над $\mathbb{C}(z)$ функций (2). Пусть $q = \lambda + u$, где λ определено в формулировке теоремы 1. Тогда пример линейно независимой совокупности функций вида (8) можно построить с помощью теоремы 8 из [8, с. 227] (см. также [9]). Отсюда, как было указано выше, вытекает линейная независимость совокупности функций (2), и к этой совокупности можно применить доказанные теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. № 2. С. 30–34.
- [2] Иванков П. Л. Об оценках некоторых линейных форм // Изв. вузов. Матем. 1993. № 2. С. 38–45.
- [3] Иванков П. Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 5. С. 53–62.
- [4] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1986.
- [5] Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E -функций // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 1. С. 3–14.
- [6] Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G -functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
- [7] Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [8] Салихов В. Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. ММО. 1988. Т. 51. С. 223–256.
- [9] Казаков В. В. О линейной неприводимости дифференциальных уравнений для гипергеометрических функций // Всесоюзная школа “Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел”. Тезисы докл. Минск: Изд-во АН БССР, 1989. С. 65.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
09.11.95