Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, О сферичности жестких гиперповерхностей
в $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 391–403

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:16:07

УДК 514.764.274

О СФЕРИЧНОСТИ ЖЕСТКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^2$

А. В. Лобода

В заметке обсуждается сферичность гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}_{z,w}^2$, представимых (локально) уравнениями вида $\operatorname{Im} v = F(z, \bar{z})$. С привлечением понятия мозеровской нормальной формы для таких поверхностей строится необходимое и достаточное условие сферичности. Оно представляет собой уравнение в частных производных 3-го порядка относительно функции $\mu(z, \bar{z}) = F_{z\bar{z}\bar{z}}/F_{z\bar{z}}$. Сходство этого уравнения с критерием сферичности трубчатых гиперповерхностей позволяет свести изучаемый вопрос к известному описанию сферических трубок. Редуцирующие отображения явно выписываются в статье. В качестве частного случая приводится описание сферических поверхностей Рейнхарта, задающихся уравнениями $\operatorname{Im} w = \alpha(|z|^2)$.

Библиография: 5 названий.

В настоящей статье приводится описание жестких гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}_{(z,w)}^2$, голоморфно эквивалентных в каждой своей точке сфере $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Следуя [1], *жесткой* мы называем гиперповерхность, уравнение которой не зависит от одной из 4-х вещественных переменных пространства $\mathbb{C}_{(x+iy, u+iv)}^2$ (в традиционной геометрии такие поверхности называют цилиндрическими).

Задача описания жестких сферических поверхностей достаточно тесно связана с работой [2], в которой классифицированы трубчатые сферические гиперповерхности. Отметим также не изученный до конца вопрос о голоморфно однородных гиперповерхностях комплексных пространств. Предлагаемое ниже описание может послужить опорой в построении общей классификации однородных жестких поверхностей подобно случаю поверхностей трубчатых (см. [3]).

Один из основных инструментов статьи – нормальная форма Мозера [4]. С ее помощью в статье выводится условие омбиличности всюду для жестких поверхностей. Известно, что омбиличность гиперповерхности в каждой точке равносильна ее сферичности. Для жестких поверхностей в $\mathbb{C}^2$ это утверждение вытекает из приводимых в статье рассуждений.

Условие омбиличности всюду обсуждается в § 1 статьи. В § 2 подробно рассматриваются два частных случая сферических жестких поверхностей, а именно трубчатые поверхности и поверхности Рейнхарта. Наконец, в § 3 доказывается основной результат статьи – теорема 2. Согласно этой теореме любая жесткая сферическая поверхность сводится простым преобразованием к поверхности одного из двух частных видов, названных выше.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант NCE000.

Автор выражает благодарность за полезные обсуждения, связанные с этой статьей, участникам семинара по многомерному комплексному анализу под руководством А. Г. Витушкина.

§ 1. Омбиличность жестких поверхностей

Рассмотрим жесткую поверхность Γ в пространстве $\mathbb{C}_{z,w}^2$, заданную без ограничения общности уравнением

$$v = F(z, \bar{z}), \quad (1)$$

не зависящим от переменной $u = \operatorname{Re} w$.

Функцию $F(z, \bar{z})$ считаем аналитически зависящей от своих аргументов и принимающей лишь вещественные значения. Целью статьи является изучение сферических, а, следовательно, невырожденных по Леви гиперповерхностей. Это означает, что тейлоровское разложение

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k,l \geq 0} F_{kl} (z - z_0)^k \overline{(z - z_0)}^l = \sum_{k,l \geq 0} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} F(z_0, \bar{z}_0)}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} (z - z_0)^k \overline{(z - z_0)}^l \quad (2)$$

в произвольной точке $P(z_0, w_0)$ поверхности Γ имеет ненулевой коэффициент

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}}(z_0, \bar{z}_0).$$

Уравнение невырожденной по Леви жесткой поверхности (1) мы хотим привести к нормальной форме Мозера. Для этого положим сначала

$$\alpha(z) = F(z, \bar{z}_0), \quad \beta(z) = \frac{1}{F_{11}} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}_0) - F_{01} \right) \quad (3)$$

и сделаем замену переменных

$$z^* = \beta(z), \quad w^* = \frac{1}{F_{11}} (w - 2i\alpha(z)). \quad (4)$$

Несложно убедиться, что в новых координатах уравнение поверхности Γ , по-прежнему, не зависит от u и имеет вид

$$v = |z|^2 + \sum_{k,l \geq 2} a_{kl} z^k \bar{z}^l. \quad (5)$$

Используя в дальнейшем отображения (4), будем говорить о жесткой нормализации обсуждаемых поверхностей.

Дальнейшая мозеровская нормализация уравнения (5) приводит его к виду

$$v = |z|^2 + (h_{420} z^4 \bar{z}^2 + h_{240} z^2 \bar{z}^4) + \sum_{\substack{k+l \geq 7 \\ \min\{k,l\} \geq 2}} h_{klm} z^k \bar{z}^l u^m, \quad (6)$$

не обладающему, вообще говоря, свойством жесткости.

В разложении (6) нас пока интересует лишь коэффициент h_{420} . Напомним, что поверхность (1) называется *омбилической* в обсуждаемой точке, если после приведения ее к виду (6) выполнено равенство $h_{420} = 0$. Свойство это является инвариантом при голоморфных преобразованиях.

Для любой точки сферической поверхности все коэффициенты h_{klm} нормального уравнения (6) равны 0, и потому сферическая поверхность омбилична всюду. Известно также, что поверхность, все точки которой омбиличны, является сферической.

Мы обсудим условие омбиличности всюду в случае жестких поверхностей. Для них справедливость последнего утверждения получается автоматически из рассуждений § 3 статьи.

Начнем со ссылки на работу [3]. В ней показано, что для уравнения (5) возможна мозеровская нормализация, после которой $h_{420} = a_{42}$.

Выразим коэффициент a_{42} уравнения (5) через определяющую функцию $F(z, \bar{z})$. Для этого будет удобно привлечь Тейлоровские разложения функций (3). Имеем с учетом (2)

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= F_{00} + F_{10}(z - z_0) + F_{20}(z - z_0)^2 + \dots, \\ \beta(z) &= F_{11}^{-1}(F_{11}(z - z_0) + F_{21}(z - z_0)^2 + \dots).\end{aligned}$$

Тогда из уравнения (5) получаем

$$\begin{aligned}& F_{11}^{-1}(v - \operatorname{Im} \alpha(z)) \\ &= \left| (z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots \right|^2 + a_{22} \left| (z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots \right|^4 \\ &+ a_{32} \left((z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots \right)^3 \left(\overline{(z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots} \right)^2 \\ &+ a_{42} \left((z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots \right)^4 \left(\overline{(z - z_0) + \frac{F_{21}}{F_{11}}(z - z_0)^2 + \dots} \right)^2 + \dots.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя исходное уравнение Γ , т.е.

$$v = F_{00} + F_{10}(z - z_0) + F_{01}\overline{(z - z_0)} + F_{20}(z - z_0)^2 + F_{11}|z - z_0|^2 + F_{02}\overline{(z - z_0)}^2 + \dots$$

в (7), можно выразить любые из коэффициентов a_{kl} через F_{st} . Например,

$$\begin{aligned}a_{22} &= \frac{F_{22}}{F_{11}} - \frac{F_{21}}{F_{11}} \frac{F_{12}}{F_{11}}, & a_{32} &= \left(\frac{F_{32}}{F_{11}} - \frac{F_{31}}{F_{11}} \frac{F_{12}}{F_{11}} \right) - 2a_{22} \frac{F_{21}}{F_{11}}, \\ a_{42} &= \left(\frac{F_{42}}{F_{11}} - \frac{F_{41}}{F_{11}} \frac{F_{12}}{F_{11}} \right) - a_{22} \left(\left(\frac{F_{21}}{F_{11}} \right)^2 + 2 \frac{F_{31}}{F_{11}} \right) - 3a_{32} \frac{F_{21}}{F_{11}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Последнее выражение для a_{42} мы упростим, вводя в рассмотрение функцию

$$\mu = \mu(z, \bar{z}) = \frac{F_{zz\bar{z}}}{F_{z\bar{z}}}.$$

Ясно, что все входящие в a_{42} слагаемые и множители выражаются через функцию $\mu(z, \bar{z})$ и ее частные производные. Опуская конкретные вычисления, сформулируем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $a_{42} = \frac{1}{48}(\mu_{zz\bar{z}} - 3\mu_{z\bar{z}}\mu - \mu_z\mu_{\bar{z}} + 2\mu_{\bar{z}}\mu^2)$.

СЛЕДСТВИЕ. Поверхность Γ вида (1) омбилична всюду тогда и только тогда, когда

$$\mu_{zz\bar{z}} - 3\mu_{z\bar{z}}\mu - \mu_z\mu_{\bar{z}} + 2\mu_{\bar{z}}\mu^2 = 0. \quad (9)$$

Отметим, что условие (9) омбиличности всюду для жесткой поверхности (1) естественно обобщает аналогичное условие

$$\mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2 = 0,$$

полученное в [3] для трубчатых поверхностей вида $u = \alpha(x)$. В последнем случае функция μ определялась как

$$\mu(x) = \frac{\alpha'''(x)}{\alpha''(x)}.$$

Пользуясь условием (9), можно оценить, например, насколько обширно семейство жестких омбилических всюду поверхностей.

Так как преобразованием (4) любая жесткая поверхность приводится к виду (5), будем обсуждать пока только такие уравнения. Заметим, что для вещественнозначных аналитических функций $F(z, \bar{z})$ вида

$$F(z, \bar{z}) = |z|^2 + \sum_{k,l \geq 2} a_{kl} z^k \bar{z}^l \quad (10)$$

отношение $\mu(z, \bar{z}) = F_{zz\bar{z}}/F_{z\bar{z}}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\mu(z, 0) = 0, \quad \mu_{\bar{z}} \text{ вещественнозначна.} \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mu(z, \bar{z})$ – аналитическая функция, для которой выполняются условия (11). Тогда существует единственная вещественнозначная аналитическая функция $F(z, \bar{z})$ вида (10) такая, что $F_{zz\bar{z}}/F_{z\bar{z}} = \mu(z, \bar{z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (11) означают, что разложение функции $\mu(z, \bar{z})$ в ряд Тейлора имеет вид

$$\mu(z, \bar{z}) = \sum_{k \geq 0, l \geq 1} \mu_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

причем

$$(l+1)\mu_{k,l+1} = \overline{(k+1)\mu_{l,k+1}}.$$

Тогда и ее первообразная

$$M(z, \bar{z}) = \int_0^z \mu(z, \bar{z}) dz = \sum_{k \geq 0, l \geq 1} \frac{\mu_{kl}}{k+1} z^{k+1} \bar{z}^l = \sum_{s \geq 1, t \geq 1} M_{st} z^s \bar{z}^t$$

также вещественнозначна. При этом вещественнозначная функция

$$E(z, \bar{z}) = e^{M(z, \bar{z})}$$

имеет тейлоровское разложение вида

$$1 + \sum_{k,l \geq 1} E_{kl} z^k \bar{z}^l.$$

Полагая тогда

$$F(z, \bar{z}) = \int_0^z \int_0^{\bar{z}} E(z, \bar{z}) d\bar{z} dz = |z|^2 + \sum_{k, l \geq 1} \frac{E_{kl}}{(k+1)(l+1)} z^{k+1} \bar{z}^{l+1},$$

получаем для вещественнозначной функции $F(z, \bar{z})$ представление вида (10).

Кроме того, $F_{z\bar{z}} = E(z, \bar{z})$, так что

$$\frac{F_{zz\bar{z}}}{F_{z\bar{z}}} = \frac{(E(z, \bar{z}))'_z}{E(z, \bar{z})} = (\ln E(z, \bar{z}))'_z = (M(z, \bar{z}))'_z = \mu(z, \bar{z}).$$

Существование требуемой функции $F(z, \bar{z})$ доказано. Единственность ее вытекает из той же схемы рассуждений. В самом деле, $\ln E(z, \bar{z})$ находится из уравнения

$$(\ln E(z, \bar{z}))'_z = \mu(z, \bar{z})$$

с точностью до произвольной функции $C_0(z)$.

Но $F_{z\bar{z}}|_{z=0} = 1$ для функции $F(z, \bar{z})$ вида (10), следовательно, $F_{z\bar{z}} = e^{M(z, \bar{z})}$ для построенной ранее функции $M(z, \bar{z})$.

Восстановить $F(z, \bar{z})$ по известной $F_{z\bar{z}}$ можно в общей ситуации с точностью до суммы $(\varphi(z) + \psi(\bar{z}))$ произвольных функций. Но из (10) легко получить $\varphi(z) = 0$, $\psi(\bar{z}) = 0$, чем окончательно доказывается предложение 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякое аналитическое решение $\mu(z, \bar{z})$ уравнения (9), удовлетворяющее условиям (11), определяется набором своих производных $\mu_{\bar{z}}(0)$, $\mu_{z\bar{z}}(0)$, $\mu_{zz\bar{z}}(0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По известным значениям $\mu_{\bar{z}}(0)$, $\mu_{z\bar{z}}(0)$, а также по $\mu(0) = 0$, $\mu_z(0) = 0$ определим из уравнения (9)

$$\mu_{zz\bar{z}}(0) = (3\mu_{z\bar{z}}\mu + \mu_z\mu_{\bar{z}} - 2\mu_{\bar{z}}\mu^2)|_0.$$

Аналогично, дифференцируя (9) по переменной z , мы можем вычислить любую производную

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1}\mu}{\partial z^k \partial \bar{z}}(0, 0) = \mu_{k1}$$

при $k \geq 3$.

Пользуясь вещественностью $\mu_{\bar{z}}$, т.е. равенствами

$$\mu_{k, l+1} = \left(\frac{k+1}{l+1} \right) \overline{\mu_{l, k+1}}, \quad (12)$$

мы сможем далее определить коэффициенты μ_{0l} разложения

$$\mu(z, \bar{z}) = \sum_{k \geq 0, l \geq 1} \mu_{k, l} z^k \bar{z}^l = \sum \frac{1}{k! l!} \frac{\partial^{k+l}\mu}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(0, 0). \quad (13)$$

По заданному $\mu_{zz\bar{z}}(0)$ и вычисленным $\mu_{\bar{z}}(0)$, $\mu_{z\bar{z}}(0)$ мы можем с помощью дифференцирования того же уравнения (9) определить при $k \geq 2$

$$\frac{\partial^{k+2}\mu}{\partial z^k \partial \bar{z}^2}(0, 0) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-2} \partial \bar{z}}(\mu_{zz\bar{z}})|_{(0,0)}.$$

Далее, сочетая дифференцирование (9), т.е. увеличение первого индекса у коэффициента μ_{kl} , с использованием равенства (12), позволяющего увеличивать второй индекс, мы можем вычислить любой из коэффициентов μ_{kl} разложения (13). Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3 доказывает единственность решения уравнения (9) при фиксированных значениях “начальных данных” $\mu_{\bar{z}}(0), \mu_{z\bar{z}}(0), \mu_{zz\bar{z}}(0)$. Существование такого решения следует из результатов § 3 статьи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для функций $F(z, \bar{z})$ вида (10) и $\mu(z, \bar{z}) = F_{zz\bar{z}}/F_{z\bar{z}}$ справедливы равенства

$$\mu_{\bar{z}}(0) = 4a_{22}, \quad \mu_{z\bar{z}}(0) = 12a_{32}, \quad \mu_{zz\bar{z}}(0) = 36a_{33} - 32a_{22}^2. \quad (14)$$

Доказательство этого предложения является чисто техническим. Если

$$F(z, \bar{z}) = |z|^2 + a_{22}|z|^4 + a_{32}z^3\bar{z}^2 + a_{33}|z|^6 + \dots,$$

то, например,

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} &= 1 + 4a_{22}|z|^2 + 6a_{32}z^2\bar{z} + \dots, \\ F_{zz\bar{z}} &= 4a_{22}\bar{z} + 12a_{32}|z|^2 + \dots, \quad F_{zzz\bar{z}} = 4a_{22} + \dots. \end{aligned}$$

Но

$$\mu_{\bar{z}} = \frac{F_{zzz\bar{z}}F_{z\bar{z}} - F_{zz\bar{z}}F_{zzz\bar{z}}}{(F_{z\bar{z}})^2},$$

так что $\mu_{\bar{z}}(0) = (4a_{22} - 0)/1 = 4a_{22}$. Остальные два равенства (14) проверяются аналогично.

Заметим, что a_{22}, a_{33} , как и $\mu_{\bar{z}}(0), \mu_{z\bar{z}}(0)$, — вещественные числа, в то время как a_{32} и $\mu_{zz\bar{z}}(0)$ могут быть комплексными.

Объединяя предложения 1–4, мы можем сформулировать основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Существует не более, чем 4-параметрическое семейство жестких аналитических омбилических всюду гиперповерхностей вида

$$v = |z|^2 + a_{22}|z|^4 + a_{32}z^3\bar{z}^2 + a_{33}|z|^6 + \dots.$$

Каждая такая поверхность полностью определяется набором коэффициентов (a_{22}, a_{32}, a_{33}) .

§ 2. Частные виды жестких гиперповерхностей

2.1. Трубочатые гиперповерхности. Как известно, *трубочатой* в пространстве $\mathbb{C}_{(x+iy, u+iv)}^2$ называют гиперповерхность T вида

$$T = \gamma + i\mathbb{R}_{(y, v)}^2,$$

где γ — некоторая кривая в $\mathbb{R}_{(x, u)}^2$. Будем считать, что основание трубки, т.е. кривая γ , задано уравнением $u = \xi(x)$. Линейным преобразованием пространства $\mathbb{R}_{(x, u)}^2$, а значит, и $\mathbb{C}_{(z, w)}^2$, можно привести уравнение основания невырожденной по Леви трубочатой поверхности T к виду

$$u = 2x^2 + \xi_3x^3 + \xi_4x^4 + \xi_5x^5 + \dots. \quad (15)$$

Заметим, что для любого набора (ξ_3, ξ_4, ξ_5) существует единственная омбилическая всюду поверхность вида (15). Объясняется это тем, что условие омбиличности для трубчатых поверхностей представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение 6-го порядка относительно определяющей функции $\xi(x)$ основания γ . Любая такая омбилическая всюду трубка является сферической поверхностью (см., например, [3]).

Заменяя в уравнении (15) переменную u на v , можно рассматривать его как жесткое уравнение

$$v = \xi(x) = \xi\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right).$$

Мы будем называть и само уравнение (15) жестким, не оговаривая каждый раз эту замену. Общие принципы нормализации, изложенные в § 1, применим к поверхности (15).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для любого вещественного набора (a_{22}, a_{32}, a_{33}) с $a_{32} \neq 0$ существует единственная сферическая трубка (15), жесткая нормализация которой приводит к данному набору коэффициентов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (15) в комплексной форме:

$$v = 2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \xi_3\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^3 + \xi_4\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^4 + \xi_5\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^5 + \dots$$

Тогда в обозначениях § 1 имеем

$$F_{11} = 1, \quad F_{21} = \frac{3}{8}\xi_3, \quad F_{22} = \frac{6}{16}\xi_4 = \frac{3}{8}\xi_4.$$

Следовательно, приводя (15) к виду (5), получаем, например,

$$a_{22} = \frac{F_{22}}{F_{11}} - \frac{F_{21} F_{12}}{F_{11} F_{11}} = \frac{3}{8}\xi_4 - \left(\frac{3}{8}\xi_3\right)^2 = \frac{3}{64}(8\xi_4 - 3\xi_3^2). \quad (16)$$

Аналогично получаются и более громоздкие формулы для a_{32} и a_{33} :

$$a_{32} = \frac{1}{256}(80\xi_5 - 96\xi_3\xi_4 + 27\xi_3^3), \quad (17)$$

$$a_{33} = \frac{1}{512}(40\xi_5\xi_3 + 96\xi_4^2 - 120\xi_4\xi_3^2 + 27\xi_3^4). \quad (18)$$

Ясно, что все коэффициенты a_{22} , a_{32} , a_{33} получаются здесь вещественными. В целом же, несмотря на сложную структуру, формулы (16)–(18) обладают одним простым свойством: ξ_3 , ξ_4 , ξ_5 выражаются из них через a_{22} , a_{32} , a_{33} , если $a_{32} \neq 0$.

В самом деле, из уравнений (16), (17) выразим ξ_4 и ξ_5 :

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \frac{8}{3}a_{22} + \frac{3}{8}\xi_3^2, \\ \xi_5 &= \frac{1}{80}\left(256a_{32} + 96\xi_3\left(\frac{8}{3}a_{22} + \frac{3}{8}\xi_3^2\right)27\xi_3^3\right) = \frac{1}{80}(256a_{32} + 96a_{22}\xi_3 + 9\xi_3^3). \end{aligned}$$

Тогда соотношение (18) примет вид

$$512a_{33} = A_0 + A_1\xi_3 + A_2\xi_3^2 + A_4\xi_3^4$$

с некоторыми коэффициентами A_0, A_1, A_2, A_4 . Конкретно,

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{40}{80} 9 + 96 \frac{9}{64} - 120 \frac{3}{8} + 27 = 0, \\ A_2 &= \frac{40}{80} 256 a_{22} + 96 \frac{8}{3} 2 a_{22} \frac{3}{8} - 120 \frac{8}{3} a_{22} = 0, \\ A_1 &= \frac{40}{80} 256 a_{32} = 128 a_{32}, \quad A_0 = 96 \frac{64}{9} a_{22}^2. \end{aligned}$$

Это означает, что (18) превращается в линейное относительно ξ_3 уравнение

$$a_{32} \xi_3 = 4 \left(a_{33} - \frac{4}{3} a_{22}^2 \right).$$

В случае ненулевого a_{32} из этого уравнения находится ξ_3 , а затем из предыдущих формул вычисляются ξ_4 и ξ_5 . Предложение 5 доказано.

2.2. Поверхности Рейнхарта. Жесткую поверхность $v = F(z, \bar{z})$ мы называем здесь *поверхностью Рейнхарта* (или *$|z|$ -симметричным цилиндром*), если правая часть ее уравнения зависит только от $|z|^2$. Самый простой пример этого рода – так называемая сфера (или квадрика) Мозера $v = |z|^2$. Ниже мы приведем полное описание локально заданных аналитических омбилических в каждой точке гиперповерхностей Рейнхарта.

Пусть R – поверхность указанного типа. Это означает, что вблизи некоторой своей точки $P(z_0, w_0)$ она задана уравнением $v = \xi(|z|^2)$, где $\xi(t)$ – аналитическая функция.

Поставленная нами задача описания подобных поверхностей решается по-разному в зависимости от выделенной точки $P(z_0, w_0)$. Без ограничения общности можно считать, что $w_0 = 0$. А вот в зависимости от значения первой координаты точки P , т.е. z_0 , по существу различаются два случая:

- а) $z_0 = 0$;
- б) $z_0 \neq 0$.

Начнем со случая б). Известна связь областей и поверхностей Рейнхарта с трубчатыми областями и поверхностями. В нашем случае отображение

$$\phi = \begin{cases} z^* = 2 \ln z, \\ w^* = -iw, \end{cases} \quad (19)$$

определенное вблизи выделенной точки $P(z_0, w_0)$, переводит исходную поверхность R в трубчатую

$$T = \{u^* = \xi(\exp(x^*))\}.$$

Ссылаясь на описание сферических трубчатых гиперповерхностей, данное в работе [2], и учитывая совпадение понятий омбиличности всюду и сферичности для трубок, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Омбилическая всюду поверхность Рейнхарта $\{v = \xi(|z|^2)\}$ является вблизи точки $P(z_0, w_0)$ с ненулевой первой координатой образом одной из трубчатых поверхностей $u = x^2$, $u = e^x$, $u = \ln(\sin x)$, $u = \ln(\operatorname{sh} x)$ под действием отображения $(\phi^{-1} \circ A)$, где ϕ – отображение (19), а A – некоторое аффинное преобразование вещественной двумерной плоскости $\mathbb{R}_{(x,u)}^2$.

В случае а), т.е. при $z_0 = 0$, непосредственное использование отображения (19) невозможно. Частично с этим связан несколько иной характер предлагаемого ниже описания ситуации $z_0 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Любая невырожденная по Леви омбилическая всюду гиперповерхность Рейнхарта $v = \xi(|z|^2)$, содержащая начало координат, есть с точностью до сжатия $\{z^* = \lambda z, w^* = \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus 0\}$ одна из поверхностей следующего списка ($A \in \mathbb{R}$):

- 1) $|z|^2 = v \exp(Av)$;
- 2) $|z|^2 = \sin v \exp(Av)$;
- 3) $|z|^2 = \operatorname{sh} v \exp(Av)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Содержащую начало координат поверхность $v = \xi(|z|^2)$ с невырожденной формой Леви линейным преобразованием $w^* = \lambda w$ можно привести к виду

$$v = |z|^2 + \xi_2 |z|^4 + \xi_3 |z|^6 + \dots \quad (20)$$

Но вид (20) есть частный случай уравнения (5). Тогда в силу теоремы 1 омбилическая всюду поверхность вида (20) полностью определяется парой коэффициентов (ξ_2, ξ_3) .

Мы сейчас покажем, что названные в формулировке предложения поверхности омбиличны всюду. Кроме того, их линейными образами

$$\begin{cases} z^* = \lambda z, \\ w^* = \mu w \end{cases}$$

накрываются все возможные пары коэффициентов (ξ_2, ξ_3) .

Омбиличность этих поверхностей вытекает из их сферичности. В самом деле, первая поверхность $|z|^2 = v \exp Av$ переводится в мозеровскую квадртку $v^* = |z^*|^2$ отображением

$$z^* = z \exp\left(i \frac{Aw}{2}\right), \quad w^* = w.$$

Для поверхностей 2) и 3) аналогичные отображения имеют соответственно вид

$$z^* = z \exp\left(\frac{1 + iA}{2} w\right), \quad w^* = \exp w - 1$$

и

$$z^* = \frac{i}{\sqrt{2}} z \frac{\exp(iAw/2)}{\cos(w/2)}, \quad w^* = \operatorname{tg}(w/2).$$

Переходим к вычислению пар коэффициентов (ξ_2, ξ_3) для этих поверхностей. Заметим для этого, что неявное уравнение $|z|^2 = \zeta(v)$ можно переписать в виде

$$v = \zeta^{-1}(|z|^2) = \xi(|z|^2)$$

в случае обратимой функции $\zeta(v)$. Если при этом

$$\zeta(v) = v + \zeta_2 v^2 + \zeta_3 v^3 + \dots,$$

то

$$\xi(|z|^2) = \zeta^{-1}(|z|^2) = |z|^2 - \zeta_2 |z|^4 + (-\zeta_3 + 2\zeta_2^2) |z|^6 + \dots.$$

Другими словами, пара (ξ_2, ξ_3) равна $(-\zeta_2, -\zeta_3 + 2\zeta_2^2)$.

Для поверхности 1) имеем в таком случае

$$(\xi_2, \xi_3) = \left(-A, \frac{3}{2}A^2\right), \quad (21)$$

так как $v \exp(Av) = v + Av^2 + (A^2/2)v^3 + \dots$.

Для поверхности 2) в силу разложения

$$\begin{aligned} \sin v \exp(Av) &= \left(v - \frac{1}{6}v^3 + \dots\right) \left(1 + Av + \frac{A^2}{2}v^2 + \frac{A^3}{6}v^3 + \dots\right) \\ &= v + Av^2 + \left(\frac{A^2}{2} - \frac{1}{6}\right)v^3 + \dots \end{aligned}$$

имеем

$$(\xi_2, \xi_3) = \left(-A, \frac{3}{2}A^2 + \frac{1}{6}\right). \quad (22)$$

Наконец, для последней поверхности $|z|^2 = \operatorname{sh} v \exp(Av)$ имеем разложение

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} v \exp(Av) &= \left(v + \frac{1}{6}v^3 + \dots\right) \left(1 + Av + \frac{A^2}{2}v^2 + \dots\right) \\ &= v + Av^2 + \left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{6}\right)v^3 + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$(\xi_2, \xi_3) = \left(-A, \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{6}\right). \quad (23)$$

Для образа любой из поверхностей вида (20) при сжатии

$$\begin{cases} z^* = \lambda z, & \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ w^* = \lambda^2 w \end{cases} \quad (24)$$

имеем аналогичное уравнение

$$v^* = |z^*|^2 + \frac{\xi_2}{\lambda^2} |z^*|^4 + \frac{\xi_3}{\lambda^4} |z^*|^6 + \dots.$$

Это означает, что пару коэффициентов (ξ_2, ξ_3) поверхности вида (20) с ненулевым ξ_2 отображением (24) можно довести до состояния $(\pm 1, \xi_3/\xi_2^2)$. Если $\xi_2 = 0$, но $\xi_3 \neq 0$, то эта пара доводится, например, до состояния $(0, \pm 1/6)$.

Выписанные нами пары (21)–(23) дадут после таких сжатий

$$\begin{aligned} A = 0: & \quad (0, 0), \left(0, \frac{1}{6}\right), \left(0, -\frac{1}{6}\right); \\ A \neq 0: & \quad \left(\pm 1, \frac{3}{2}\right), \left(\pm 1, \frac{3}{2} + \frac{1}{6A^2}\right), \left(\pm 1, \frac{3}{2} - \frac{1}{6A^2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Так как график функции $1/(6x^2)$ имеет образом промежутков $(0, \infty)$, все возможные “сжатые” пары (ξ_2, ξ_3) накрываются парами (25), соответствующими сферическим поверхностям 1)–3). Предложение 7 доказано.

§ 3. Классификация жестких сферических гиперповерхностей

В этом параграфе мы обсуждаем жесткие омбилические в каждой точке поверхности, заданные вблизи начала координат уравнением вида (2), т.е.

$$v = F(z, \bar{z}) = \sum_{k+l \geq 1} F_{kl} z^k \bar{z}^l. \quad (26)$$

Вычислим по уравнению (26) величину

$$D = F_{32}F_{11}^2 - F_{31}F_{12}F_{11} - 2F_{21}F_{22}F_{11} + 2F_{21}^2F_{12}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если для жесткой омбилической всюду поверхности Γ величина D равна 0, то преобразованием (4) Γ превращается в одну из поверхностей Рейнхарта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к поверхности Γ вида (26) преобразование (4). Согласно формулам (8) коэффициент a_{32} нового уравнения этой поверхности будет равен в точности D и, значит, обратится в 0; коэффициенты a_{22} и a_{33} примут некоторые вещественные значения.

По предложению 7 существует сферическая поверхность Рейнхарта R , имеющая уравнение

$$v = |z|^2 + a_{22}|z|^4 + a_{33}|z|^6 + \dots$$

с теми же коэффициентами a_{22} , a_{33} .

В силу теоремы 1 жесткая и омбилическая всюду поверхность R совпадает с образом Γ при преобразовании (4). Предложение 8 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если для жесткой омбилической всюду поверхности Γ величина D отлична от 0, то голоморфным преобразованием

$$z^* = \varphi(z), \quad w^* = \frac{1}{F_{11}}w + \psi(z)$$

таким, что $\varphi'(0) = D/|D|$, поверхность Γ превращается в некоторую сферическую трубку $\{v = \xi(x) = 2x^2 + \xi_3x^3 + \dots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся, как и в предыдущем случае, преобразованием Φ_1 вида (4), т.е.

$$z^* = \beta(z), \quad w^* = \frac{1}{F_{11}}w - \frac{2i}{F_{11}}\alpha(z).$$

После этой замены, как и ранее, $a_{32} = D$, но теперь этот коэффициент отличен от 0. Подвергнем поверхность Γ дополнительному преобразованию

$$\Lambda = \begin{cases} z^* = \lambda z, \\ w^* = w, \end{cases}$$

где

$$\lambda = \exp(i \arg a_{32}) = \frac{a_{32}}{|a_{32}|}.$$

При такой замене, как легко видеть, коэффициент a_{32} уравнения (5) превращается в

$$a_{32}^* = \frac{a_{32}}{\lambda^3 \bar{\lambda}^2} = |a_{32}|$$

и, следовательно, становится вещественным положительным числом. Коэффициенты a_{22} и a_{33} не изменяются и остаются вещественными.

В силу предложения 5 существует единственная сферическая трубка T вида (15), жесткая нормализация Φ_2 которой дает в уравнении (5) набор коэффициентов $(a_{22}, |a_{32}|, a_{33})$. Это означает по теореме единственности 1 совпадение Λ -образа поверхности Γ со сферической трубкой T .

Так как переход от уравнения (15) к уравнению вида (5) осуществляется у нас преобразованием (4) с коэффициентом F_{11} равным 1, то композиция $(\Phi_2^{-1} \circ \Lambda \circ \Phi_1)$ имеет вид, требуемый в предложении 9.

Объединяя два последних предложения, можно сформулировать основной результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая жесткая сферическая поверхность Γ является голоморфным образом либо сферической трубки, либо сферической поверхности Рейнхарта при преобразовании вида*

$$\begin{cases} z^* = \phi(z), & |\phi'(0)| = 1, \\ w^* = Aw + \psi(z), & A > 0. \end{cases} \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложения 8 и 9 доказаны нами для жестких поверхностей, омбилических в каждой своей точке. Следовательно, они справедливы для сферических поверхностей (так как при этом всякая поверхность, предполагавшаяся омбилической, оказывалась сферической, два этих понятия в жестком случае эквивалентны друг другу).

Как отображение (4), так и композиция $(\Phi_2^{-1} \circ \Lambda \circ \Phi_1)$ из предложения 8, имеют вид (27), требуемый в теореме. При этом во всех случаях $z^* = \phi(z)$ — обратимая функция. Тогда и сами отображения (4) и (27) обратимы, причем их обратные также имеют требуемый вид (27). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. С точки зрения голоморфной эквивалентности сферические поверхности Рейнхарта не различаются между собой и не отличаются от сферических трубок. Теорема 2 показывает лишь, как из конкретных известных поверхностей несложными преобразованиями получается любая жесткая сферическая гиперповерхность.

Развивая это замечание, отметим также, что, действуя преобразованием вида (27) на любую трубчатую поверхность, мы получаем поверхность жесткую. В то же время произвольное преобразование такого вида, примененное к произвольной же поверхности Рейнхарта, не обязано давать жесткую поверхность.

В связи с этим упомянем одну задачу о гармонических функциях, возникающую в данном круге вопросов и, возможно, имеющую другие приложения.

ЗАДАЧА. Описать все пары гармонических функций $(h(u, v), g(u, v))$, для которых произведение $h(u, v) \exp(g(u, v))$ зависит только от переменной v .

Решение этой задачи, по существу, содержится в предложении 7, описывающем сферические поверхности Рейнхарта. Дело в том, что любую такую поверхность можно нормализовать по Мозеру, т.е. привести к виду $v = |z|^2$, отображением

$$z^* = z\varphi(w), \quad w^* = \psi(w).$$

При этом отношение

$$\frac{\operatorname{Im} \psi(w)}{|\varphi(w)|^2}$$

оказывается зависящим только от переменной v . Переходя от голоморфных функций $i \ln \varphi(w)$, $\psi(w)$ к их мнимым частям, легко получить упомянутую выше формулировку.

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. После принятия к печати этой статьи вышла работа А. В. Исаева [5], в которой рассматриваются близкие вопросы и, в частности, получен критерий сферичности жестких гиперповерхностей в комплексных пространствах $\mathbb{C}^n$ произвольной размерности. Методы и цели настоящей работы, выполненной вне связи с работой [5], отличаются от рассуждений Исаева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stanton N. K. A normal form for rigid hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ // Amer. J. Math. 1991. V. 113. № 5. P. 877–910.
- [2] Dadok J. Yang P. Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces // Amer. J. Math. 1985. V. 107. № 4. P. 999–1013.
- [3] Loboda A. V. On homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ // International Conference “Complex Analysis: Geometrical Methods”. St.-Petersburg, 1994.
- [4] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. № 3. P. 219–271.
- [5] Isaev A. V. Rigid spherical hypersurfaces // Complex Variables. Theory Appl. 1996. V. 31. P. 141–163.

Воронежская инженерно-строительная академия
E-mail: lob@vgasa.voronezh.su

Поступило
19.01.96