Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Матвеев, Об одном методе интерполирования функций на хаотических сетках, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 404–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:16:55

УДК 517.518

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА ХАОТИЧЕСКИХ СЕТКАХ

О. В. Матвеев

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \equiv n \pmod{2}$, $K(x) = |x|^m$ при нечетном m , $K(x) = |x|^m \ln |x|$ при четном m ($x \in \mathbb{R}^n$), $\mathcal{P}$ – множество вещественных полиномов от n переменных степени $\leq m/2$ по совокупности переменных и $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$. Строится функция вида

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j K(x - x_j) + P(x), \quad \text{где } \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad P \in \mathcal{P}, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j Q(x_j) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P},$$

совпадающая с заданной функцией $f(x)$ в точках $x_1, \dots, x_N$. Для этого метода интерполирования получены оценки погрешности приближения функций $f \in W_p^k(\Omega)$ и их производных порядка l в нормах $L_q(\Omega_\varepsilon)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Библиография: 14 названий.

Хорошо изученным методом приближения функций одной переменной является интерполирование кусочно-полиномиальными сплайнами $s(x)$ нечетной степени m дефекта 1 (т.е. класса C^{m-1}) на сетке узлов $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, удовлетворяющими краевым условиям $s^{(l)}(x_1) = s^{(l)}(x_N) = 0$ при $(m+1)/2 \leq l \leq m-1$ (см. [1], [2]). Такой сплайн может быть представлен в виде

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j |x - x_j|^m + P(x),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, P – полином степени $\leq (m-1)/2$,

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j Q(x_j) = 0$$

для любого полинома Q степени $\leq (m-1)/2$. Мы рассмотрим следующее обобщение этого метода на случай n переменных. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \equiv n \pmod{2}$, $K(x) = |x|^m$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 95-01-00287а, № 93-011-196.

при нечетном m и $K(x) = |x|^m \ln |x|$ при четном m ($x \in \mathbb{R}^n$), при $t \geq 0$ $\mathcal{P}_t$ – множество полиномов (вещественных) от n переменных степени $\leq t$ по совокупности переменных, при $t < 0$ $\mathcal{P}_t = \{0\}$, где 0 – нулевой полином, $\Delta = \{x_1, \dots, x_N\}$ – произвольное непустое конечное подмножество $\mathbb{R}^n$. Строится функция вида

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j K(x - x_j) + P(x), \quad (1)$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R}, \quad P \in \mathcal{P}_{m/2}, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j Q(x_j) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{m/2},$$

совпадающая с заданной функцией $f(x)$ в точках $x_1, \dots, x_N$. Такой метод интерполирования рассматривался ранее Ж. Дюшоном [3]. В данной статье исследуются аппроксимативные свойства функций (1). Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая сильному условию конуса [4, с. 118] (или, что эквивалентно, ограниченная область с минимально гладкой границей [5, с. 224]). Заметим, что функция (1) имеет наиболее простой вид при $m = 1$

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j |x - x_j| + c, \quad \lambda_j, c \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 0, \quad (2)$$

(“multi-conic functions” в [3]). Из наших результатов следует, в частности, что при нечетном n существует единственная функция $s_1(f, \Delta)$ вида (2), интерполирующая f на Δ , и если f непрерывна и имеет ограниченные обобщенные производные порядка $n + 1$ на Ω , Δ_j – непустое конечное подмножество Ω ($j \in \mathbb{N}$),

$$h_j = \sup_{x \in \Omega} \inf_{y \in \Delta_j} |x - y| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

то для любой точки $x \in \Omega$ $f(x) - s_1(f, \Delta_j)(x) = O(h_j^{n+1})$ при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, порядок поточечной сходимости функций (2) к достаточно гладкой интерполируемой функции f возрастает вместе с размерностью.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mu = (m + n)/2$, $m' = [m/2] + 1$; если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами и $x = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n$, то $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $x^\alpha = e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$ (считаем $0^0 = 1$); $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, $B_\zeta(a, r) = B(a, r) \cap \zeta\Omega$, $\text{dist}(F, F') = \inf\{|x - y| : x \in F, y \in F'\}$, $\text{dist}(a, F) = \text{dist}(\{a\}, F)$,

$$\overline{h}(F) = \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, F), \quad \underline{h}(F) = \inf\{|x - y| : x, y \in F, x \neq y\}$$

($\underline{h}(F) = +\infty$, если F состоит из одной точки), $\Omega_r = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r, \zeta > 0$, $F, F' \subset \mathbb{R}^n$, $F, F' \neq \emptyset$; $\mathcal{A}_t$ – множество таких множеств $F \subset \mathbb{R}^n$, что $(P \in \mathcal{P}_t, P(x) = 0 \forall x \in F) \implies (P(x) \equiv 0)$, где $t \in \mathbb{R}$; $\mathcal{L}$ – оператор Лапласа, $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье; $\mathcal{D}(G)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих компактные в G носители, $C(G)$ – пространство непрерывных

функций $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ с топологией, порожденной семейством полунорм $\|g\|_{L_\infty(U)}$, где U пробегает все компактные в G множества, $L_p^k(G)$ – множество локально суммируемых функций $g: G \rightarrow \mathbb{R}$, у которых все обобщенные производные порядка k принадлежат $L_p(G)$, $W_p^k(G)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|g\|_{W_p^k(G)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)},$$

где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$; при $g \in L_p^k(G)$, $r > 0$

$$\|D^k g\|_{L_p(G)} = \begin{cases} \left(\int_G \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha g|^p dx \right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha g\|_{L_\infty(G)} & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

$$\omega(D^k g, r)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{|a| \leq r} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(x-a)\|_{L_p(G \cap (a+G))},$$

$$\tilde{\omega}(D^k g, r)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(y)\|_{L_p(F_r)},$$

где $F_r = \{(x, y) : x, y \in G, |x - y| \leq r\} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Введем в $L_p^k(\mathbb{R}^n)$ норму

$$\|g\|_{L_p^k(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L_p(B(0,1))} + \|D^k g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

(эквивалентные функции отождествляются); тогда $L_p^k(\mathbb{R}^n)$ – банахово пространство (см., например, [6, с. 134]). Обозначим через $\mathring{L}_p^k(\mathbb{R}^n)$ замыкание $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $L_p^k(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $\mu > n/2$, оператор вложения $L_2^\mu(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ непрерывен [4, с. 128, 145]. Учитывая теорему продолжения [5, с. 214], функции из $W_2^\mu(\Omega)$ будем считать непрерывными на $\overline{\Omega}$.

ТЕОРЕМА 1. *Допустим, что $\Delta \in \mathcal{A}_{m/2}$. Тогда существует единственная функция $s_m(f, \Delta)$ вида (1), интерполирующая заданную функцию $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ на Δ . При этом $s_m(f, \Delta)$ является единственным решением вариационной задачи*

$$\min\{\|D^\mu g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} : g \in \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n), g(x) = f(x) \ \forall x \in \Delta\}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p = 2n$ при нечетном n и $p = n$ при четном n . Заметим, что

$$L_2^\mu(\mathbb{R}^n) \cap L_p^{m'}(\mathbb{R}^n) = \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

Действительно, обозначим через α_j мультииндекс, у которого j -я компонента равна μ , а все остальные компоненты равны 0, через X – пространство локально суммируемых функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, у которых обобщенные производные $D^{\alpha_j} g$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$ ($j = \overline{1, n}$), с нормой

$$\|g\|_X = \|g\|_{L_2(B(0,1))} + \sum_{j=1}^n \|D^{\alpha_j} g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

(см. [4, с. 128]). В [4, с. 223–224] для произвольной функции $g \in X$ определен полином $Q(g)$, не содержащий членов степени $\leq m/2$, такой, что $g - Q(g) \in L_2^\mu(\mathbb{R}^n) \cap L_p^{m'}(\mathbb{R}^n)$ (очевидно, этими условиями $Q(g)$ определяется однозначно). Положим $Y = \{g \in X : Q(g) = 0\}$. Ясно, что $Y = L_2^\mu(\mathbb{R}^n) \cap L_p^{m'}(\mathbb{R}^n)$. Нормы $\|\cdot\|_{L_2^\mu(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_X$ эквивалентны на Y [4, с. 224], а значит, и на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ совпадает с замыканием $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в X , которое согласно [4, с. 226] совпадает с Y , и мы получаем (4). Минимизирующий элемент в (3) существует и единственный, если не существует ненулевого полинома $P \in L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, равного 0 на Δ [6, с. 136–137]. Это условие выполнено, так как ввиду (4) любой полином, принадлежащий $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, имеет степень $\leq m/2$ по совокупности переменных. Обозначим решение задачи (3) через u . Для любого $\varphi \in \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha \varphi \, dx = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi(x_j), \quad (5)$$

где $\xi_j \in \mathbb{R}$ не зависят от φ (так как по определению u левая часть (5) равна 0, если $\varphi \in L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(x_j) = 0, j = \overline{1, N}$). В силу (4), (5)

$$\sum_{j=1}^N \xi_j Q(x_j) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{m/2}. \quad (6)$$

Далее, в [7, с. 113–114] показано, что если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $D^\alpha \varphi(0) = 0$ при $|\alpha| \leq m$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} K \cdot \mathcal{F} \varphi \, dx = A_1 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-m-n} \varphi(x) \, dx, \quad (7)$$

где $A_1 = A_1(m, n)$ – ненулевая константа. Обозначим функцию

$$\sum_{j=1}^N \xi_j K(x - x_j)$$

через $v(x)$. Используя (7) и учитывая, что на основании (6) все производные функции $\sum_{j=1}^N \xi_j e^{-ixx_j}$ порядка $\leq m/2$ в точке $x = 0$ равны 0, для любого мультииндекса α с $[(m+1)/2] \leq |\alpha| < m+n$ и любой функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha v \cdot \mathcal{F} \psi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x) \cdot \mathcal{F} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j e^{-ixx_j} (ix)^\alpha \psi(x) \right) dx \\ &= A_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j e^{-ixx_j} \right) (ix)^\alpha |x|^{-m-n} \psi(x) \, dx, \end{aligned} \quad (8)$$

поэтому при $|\alpha| = \mu$ $|\mathcal{F} D^\alpha v| \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и при $|\alpha| = m'$ $|\mathcal{F} D^\alpha v| \in L_q(\mathbb{R}^n)$, где $q = p/(p-1)$. Отсюда получаем $v \in L_2^\mu(\mathbb{R}^n) \cap L_p^{m'}(\mathbb{R}^n)$ [8, с. 201] и согласно (4)

$v \in \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Функция $K(x - y)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с фундаментальным решением уравнения $\mathcal{L}^\mu g(x) = 0$ [9, с. 520–521], так что при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha v D^\alpha \varphi dx = (-1)^\mu \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \mathcal{L}^\mu v dx = A_2 \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi(x_j),$$

где $A_2 = A_2(m, n)$ – ненулевая константа. Следовательно, при $\varphi \in \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha (A_2^{-1} v) D^\alpha \varphi dx = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi(x_j). \quad (9)$$

Вычитая (9) из (5), полагая $\varphi = u - A_2^{-1} v$ и учитывая (4), получаем $u - A_2^{-1} v \in \mathcal{P}_{m/2}$. Нам остается показать, что не могут существовать две различные функции вида (1), совпадающие на Δ . Предположим, что $s(x)$ имеет вид (1) и $s(x) = 0$ на Δ . Тогда по доказанному $s \in \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|D^\mu s\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j K(x - x_j) \right) D^\alpha s(x) dx = A_2 \sum_{j=1}^N \lambda_j s(x_j) = 0.$$

Отсюда, из (4) и из условия $\Delta \in \mathcal{A}_{m/2}$ заключаем, что $s(x) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из рассуждений, приведенных выше для обоснования равенства (4), вытекает также (известное) равенство $L_2^\mu(\mathbb{R}^n) = \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n) + \mathcal{P}_{\mu-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ и $\sum_{j=1}^N \xi_j Q(x_j) \neq 0$ для некоторого $Q \in \mathcal{P}_{m/2}$, то

$$\sum_{j=1}^N \xi_j K(x - x_j) \notin L_2^\mu(\mathbb{R}^n).$$

Это следует из того, что равенства (8) справедливы в случае, когда

$$v(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j K(x - x_j),$$

$|\alpha| = \mu$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $D^\beta \psi(0) = 0$ при $|\beta| \leq m$ (не все производные функции

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j e^{-ixx_j}$$

порядка $\leq m/2$ в точке $x = 0$ равны 0, поэтому $|\eta(x)|x^\alpha|x|^{-m-n} \notin L_2(\mathbb{R}^n)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Факт существования и единственности функции вида (1), интерполирующей заданную функцию f на множестве $\Delta \in \mathcal{A}_{m/2}$, другим способом установлен в [3]. Но второе утверждение теоремы 1 является новым.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функция $f \in W_p^k(\Omega)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, $\Delta \subset \overline{\Omega}$, $h = \overline{h}(\Delta)$, $\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$ и выполняются вложения*

- 1) $W_p^k(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$, $l - n/q < m$, $\underline{h}(\Delta) > \varkappa h$, либо
- 2) $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_2^\mu(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$.

Если $h < C_0$, то справедливы неравенства

$$\|D^l(f - s_m(f, \Delta))\|_{L_q(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1(h^\theta \omega(D^k f, h)_{L_p(\Omega)} + C_2^{1/h} \|f\|_{L_1(\Omega)}) \quad \text{при } k < m + n, \quad (10)$$

$$\|D^l(f - s_m(f, \Delta))\|_{L_q(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1(h^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} + C_2^{1/h} \|f\|_{L_1(\Omega)}) \quad \text{при } k = m + n, \quad (11)$$

где $\theta = k - l + n/q - n/p$ при $p \leq q$ и $\theta = k - l$ при $p > q$. Здесь $C_0 = C_0(\Omega, m)$, $C_j = C_j(\Omega, m, p, q, \varepsilon, \varkappa)$ ($j = 1, 2$) – положительные константы, $C_2 < 1$.

Нам потребуются следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Если $\zeta \geq 1$, $g \in W_p^k(\zeta\Omega)$ и $a \in \zeta\Omega$, то существуют такие полиномы $P_1 \in \mathcal{P}_k$ и $P_2 \in \mathcal{P}_{k-1}$, что для любого $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \|g - P_1\|_{W_p^k(B_\zeta(a, r))} &\leq C_3 r^{C_4} \tilde{\omega}(D^k g, C_6)_{L_p(B_\zeta(a, C_5 r))}, \\ \|g - P_2\|_{W_p^k(B_\zeta(a, r))} &\leq C_3 r^{C_4} \|D^k g\|_{L_p(B_\zeta(a, C_5 r))}, \end{aligned}$$

где $C_j = C_j(\Omega, k)$ ($j = 3, 4, 5, 6$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы установлено в [6, лемма 3] с той разницей, что в левых частях неравенств вместо $B_\zeta(a, r)$ стоит связная компонента $B_\zeta(a, r)$, содержащая a . Нужно только заметить, что при наших условиях две различные точки $x, y \in \Omega$ можно соединить ломаной, содержащейся в $\Omega \cap B(x, A|x - y|)$, где $A = A(\Omega)$ (в [6] допускаются неограниченные области Ω).

ЛЕММА 2. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $l - n/q < m$, $\zeta > 0$, $\zeta \underline{h}(\Delta) > \rho > 0$,

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j K(x - x_j) + P(x),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$ и $P \in \mathcal{P}_{2\mu-1}$, $\tilde{u}(x) = u(x/\zeta)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{u} \in W_q^l(B(a, 1))$ и

$$\|\tilde{u}\|_{W_q^l(B(a, 1))} \leq C_7 \|\tilde{u}\|_{L_1(B(a, 2))},$$

где $C_7 = C_7(m, n, q, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $K(x)$ – полигармоническая порядка μ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ [9, с. 520–521] и $K \in W_q^l(B(0, 1))$. Далее, если g – некоторая полигармоническая функция порядка μ на шаре $B(0, r)$, то для любого мультииндекса α

$$|D^\alpha g(0)| \leq A_1 \|g\|_{L_1(B(0, r))}, \quad (12)$$

где $A_1 = A_1(m, n, r, \alpha)$ (это вытекает из существования функции $\varphi \in \mathcal{D}(B(0, r/2))$, зависящей только от m, n, r такой, что $g = g * \varphi$ на $B(0, r/2)$ [10, с. 132–135]). Поэтому достаточно установить, что если $\mathcal{L}^\mu g(x) = 0$ на $B(0, 2)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\|\lambda K + g\|_{W_q^l(B(0, 1))} \leq A_2 \|\lambda K + g\|_{L_1(B(0, 2))},$$

где $A_2 = A_2(m, n, q)$. Если это неверно, то существуют такие $g_j(x)$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$), что $\mathcal{L}^\mu g_j(x) = 0$ на $B(0, 2)$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\lambda_j K + g_j\|_{W_q^l(B(0, 1))} = \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\lambda_j K + g_j\|_{L_1(B(0, 2))} = 0.$$

В случае

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = 0$$

получаем противоречие с (12), а в противном случае имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|K + \lambda_j^{-1} g_j\|_{L_1(B(0, 2))} = 0,$$

откуда в силу (12) следует бесконечная дифференцируемость $K(x)$ на $B(0, 2)$, что неверно.

ЛЕММА 3 [6, лемма 5]. *Допустим, что $\zeta > 0$, $F \subset \zeta\Omega$, $\Phi \subset W_2^\mu(\zeta\Omega)$, $0 < r_0 < C_8\zeta$ и выполнены условия:*

- 1) для любых $g \in \Phi$, $x \in \zeta\Omega$ найдется такое $y \in \bar{\zeta\Omega}$, что $g(y) = 0$, $|x - y| \leq r_0$;
- 2) если $\varphi \in W_\infty^\mu(\zeta\Omega)$, φ бесконечно дифференцируема на $\zeta\Omega$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in F$, то $g\varphi \in \Phi$ для любого $g \in \Phi$;
- 3) существует такое $u \in \Phi$, что $\|D^\mu u\|_{L_2(\zeta\Omega)} = \inf_{g \in \Phi} \|D^\mu g\|_{L_2(\zeta\Omega)}$.

Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$

$$\|u\|_{W_2^\mu(V_r)} \leq C_9 C_{10}^{r/r_0} (1 + r_0)^\mu \|D^\mu u\|_{L_2(\zeta\Omega)},$$

где $V_r = \{x \in \zeta\Omega : \text{dist}(x, F) > r\}$. Здесь $C_j = C_j(\Omega, m)$ – положительные константы ($j = 8, 9, 10$), $C_{10} < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим сначала, что $k < m + n$. Зафиксируем некоторую функцию $\varphi = \varphi_n \in \mathcal{D}(B(0, 1))$, удовлетворяющую условиям: $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1/3$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$. Положим

$$\psi(x) = \varphi(x) \left(\sum_{y \in \frac{1}{2^n} \mathbb{Z}^n} \varphi(x + y) \right)^{-1}.$$

Будем считать, что $h < \min(d/4, C_8/6)$, где d – диаметр Ω , C_8 – константа из леммы 3 и $(U \subset \overline{\Omega}, U \neq \emptyset, \bar{h}(U) = h) \implies (U \in \mathcal{A}_{m/2})$. Заметим, что для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x \in \Omega} \inf_{x' \in \Delta \setminus B(y, h)} |x - x'| \leq 6h. \quad (13)$$

Действительно, если $x \in \Omega \setminus B(y, 2h)$, то для некоторого $x' \in \Delta$ $|x - x'| \leq h$, и тогда $x' \in \Delta \setminus B(y, h)$. Если же $x \in \Omega \cap B(y, 2h)$, то ввиду $d > 4h$ найдется точка $a \in \Omega \cap B(y, 3h) \setminus B(y, 2h)$; для некоторого $x' \in \Delta$ имеем $|a - x'| \leq h$, следовательно, $x' \in \Delta \setminus B(y, h)$ и

$$|x - x'| \leq |x - y| + |y - a| + |a - x'| \leq 2h + 3h + h \leq 6h.$$

Ниже A_j – некоторые положительные константы, зависящие от $\Omega, m, p, q, \varepsilon, \kappa$. Продолжим функцию f на $\mathbb{R}^n$ так, чтобы $f \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} \leq A_1 \|f\|_{W_p^k(\Omega)} \quad (14)$$

(см. [5, с. 214]), и положим $\zeta = \max(1, 3/\varepsilon, 1/h, C_6/h)$, где C_6 – константа из леммы 1, $s = s_m(f, \Delta)$, $\tilde{f}(x) = f(x/\zeta)$, $\tilde{s}(x) = s(x/\zeta)$.

Обозначим через E множество $\{x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}^n : \text{dist}(x, \zeta\Omega_\varepsilon) \leq 1\}$ и возьмем некоторую точку $z \in E$; ввиду $\zeta\varepsilon \geq 3$

$$B(z, 2) \subset \zeta\Omega. \quad (15)$$

Пусть P_1 – полином из леммы 1, соответствующий функции $g = \tilde{f}$ при $a = z$ ($\zeta \geq 1$), и $P = \chi P_1$, где χ есть свертка φ с характеристической функцией множества $\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \zeta\Omega) \leq 1\}$. Как легко видеть,

$$\|P_1\|_{W_p^k(B(z, 1))} \leq A_2 \|\tilde{f}\|_{W_p^k(B(z, A_3))}. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \pi_y &= \text{dist}(B(z, 2), B_\zeta(y, 1) \cup \zeta(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2})), \\ f_y(x) &= (\tilde{f}(x) - P(x))\psi(x - y), \\ s_y &= s_m(f_y, \zeta\Delta), \quad v = P - s_m(P, \zeta\Delta), \end{aligned}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$. Сейчас с помощью леммы 3 мы установим неравенства

$$\|s_y\|_{W_2^\mu(B(z, 2))} \leq A_4 A_5^{\pi_y} \|D^\mu s_y\|_{L_2(\zeta\Omega)}, \quad (17)$$

$$\|v\|_{W_2^\mu(B(z, 2))} \leq A_4 A_5^{1/h} \|D^\mu v\|_{L_2(\zeta\Omega)}, \quad (18)$$

где $A_5 < 1$. Из теоремы 1 вытекает, что s_y является решением вариационной задачи

$$\min \{ \|D^\mu g\|_{L_2(\zeta\Omega)} : g \in \Phi \}, \quad (19)$$

где $\Phi = \{g \in W_2^\mu(\zeta\Omega) : g(x) = s_y(x) \forall x \in \zeta(\Delta \cup (\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}))\}$. Поскольку любая функция $g \in \Phi$ равна 0 на $(\zeta\Delta) \setminus B(y, 1)$, в силу (13) имеем

$$\sup_{x \in \zeta\Omega} \inf_{x' \in (\zeta\Delta) \setminus B(y, 1)} |x - x'| \leq 6\zeta h.$$

Применяя лемму 3 с $F = B_\zeta(y, 1) \cup \zeta(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2})$, $r_0 = 6\zeta h$ ($r_0 < C_8\zeta$, так как $h < C_8/6$), $u = s_y$, получаем (17). Аналогичным образом можно применить лемму 3 и к функции v , положив $\Phi = \{g \in W_2^\mu(\zeta\Omega) : g(x) = v(x) \forall x \in \zeta(\Delta \cup (\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}))\}$, $F = \zeta(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2})$, $r_0 = \zeta h$. Нужно только учесть, что

- а) v является решением вариационной задачи вида (19) при указанном здесь Φ ;
- б) в силу $z \in E$ выполнено $\text{dist}(B(z, 2), \zeta(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2})) \geq A_6 h^{-1} - A_7$.

Для проверки утверждения а) заметим, что оно эквивалентно равенству

$$\int_{\zeta\Omega} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha v D^\alpha g \, dx = 0, \quad (20)$$

выполняющемуся для любой функции $g \in W_2^\mu(\zeta\Omega)$, равной 0 на $\zeta(\Delta \cup (\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}))$. Поскольку $P(x) = P_1(x)$ при $x \in \zeta\Omega$, $P_1 \in \mathcal{P}_{2\mu-1}$, имеем

$$\int_{\zeta\Omega} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha P D^\alpha g \, dx = (-1)^\mu \int_{\zeta\Omega} \mathcal{L}^\mu P \cdot g \, dx = 0.$$

Соотношение вида (20) с заменой v на $s_m(P, \zeta\Delta)$ справедливо ввиду соответствующего экстремального свойства функции $s_m(P, \zeta\Delta)$ (теорема 1). Таким образом, неравенство (18) доказано.

Далее, если имеет место случай 1) в теореме 2, то, используя лемму 2, неравенство $\zeta h(\Delta) > \varkappa$ и (15), запишем

$$\|s_y\|_{W_q^l(B(z, 1))} \leq A_8 \|s_y\|_{W_2^\mu(B(z, 2))}, \quad (21)$$

$$\|v\|_{W_q^l(B(z, 1))} \leq A_8 \|v\|_{W_2^\mu(B(z, 2))}. \quad (22)$$

Кроме того, применяя теорему 1 и учитывая вложение $W_p^k(B(0, 1)) \rightarrow L_\infty(B(0, 1))$, которое выполняется в силу теоремы продолжения [5, с. 214], получаем

$$\begin{aligned} \|D^\mu s_y\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| D^\mu \left(\sum_{a \in \zeta\Delta} f_y(a) \varphi\left(\frac{x-a}{\varkappa}\right) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq A_9 \|f_y\|_{L_\infty(B(y, 1))} \\ &\leq A_{10} \|f_y\|_{W_p^k(B(y, 1))}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|D^\mu s_y\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq A_{11} \|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(B(y, 1))}. \quad (23)$$

В случае 2) неравенства (21), (22) справедливы согласно вложению $W_2^\mu(B(0, 1)) \rightarrow W_q^l(B(0, 1))$, а для того чтобы получить (23), необходимо оценить $\|D^\mu s_y\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ через $\|D^\mu f_y\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ и использовать вложение $W_p^k(B(0, 1)) \rightarrow W_2^\mu(B(0, 1))$. На основании (14), (16)

$$\max(\|\tilde{f}\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)}, \|P\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)}, \|P\|_{W_2^\mu(\mathbb{R}^n)}) \leq A_{12}h^{-A_{13}}\|f\|_{W_p^k(\Omega)}. \quad (24)$$

Пусть $Y_1(Y_2)$ – множество точек $y \in \frac{1}{2n}\mathbb{Z}^n$ таких, что $|y - z| < \zeta\varepsilon - 2$ (соответственно $|y - z| \geq \zeta\varepsilon - 2$, $B_\zeta(y, 1) \neq \emptyset$), и $Y = Y_1 \cup Y_2$. Из условия $z \in E$ следует, что при $y \in Y_1$ $\pi_y \geq A_{14}|y - z| - A_{15}$ и $B(y, 1) \subset \zeta\Omega$, а при $y \in Y_2$ $\pi_y \geq A_{16}h^{-1} - A_{17}$. Учитывая это и обозначая $r_{yz} = |y - z| + 1$, согласно (17), (21), (23), (24) имеем

$$\begin{aligned} \|s_y\|_{W_q^l(B(z, 1))} &\leq A_{18}A_{19}^{r_{yz}}\|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(B(y, 1))} \\ &\leq A_{20}A_{21}^{r_{yz}}\tilde{\omega}(D^k\tilde{f}, C_6)_{L_p(B_\zeta(z, A_{22}r_{yz}))} \quad \forall y \in Y_1, \end{aligned} \quad (25)$$

где $A_{19}, A_{21} < 1$, и

$$\|s_y\|_{W_q^l(B(z, 1))} \leq A_{23}A_{24}^{1/h}\|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(B(y, 1))} \leq A_{25}A_{26}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)} \quad \forall y \in Y_2, \quad (26)$$

где $A_{24}, A_{26} < 1$. В силу (18), (22), (24) и теоремы 1

$$\|v\|_{W_q^l(B(z, 1))} \leq A_{27}A_{28}^{1/h}\|D^\mu v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq 2A_{27}A_{28}^{1/h}\|D^\mu P\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq A_{29}A_{30}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad (27)$$

где $A_{28}, A_{30} < 1$. Рассматриваемый метод интерполирования является линейным и коммутирует с преобразованием подобия (по теореме 1), так что

$$\tilde{f} - \tilde{s} = \tilde{f} - P - \sum_{y \in Y} s_y + v. \quad (28)$$

Обозначим $\tau_{ar} = \tilde{\omega}(D^k\tilde{f}, C_6)_{L_p(B_\zeta(a, r))}$. Теперь, используя вложение $W_p^k(B(0, 1)) \rightarrow W_q^l(B(0, 1))$, (15) и то, что Y_2 содержит $\leq A_{31}h^{-n}$ точек, из (25)–(28) получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - \tilde{s}\|_{W_q^l(B(z, 1))} &\leq \|\tilde{f} - P\|_{W_q^l(B(z, 1))} + \sum_{y \in Y} \|s_y\|_{W_q^l(B(z, 1))} + \|v\|_{W_q^l(B(z, 1))} \\ &\leq A_{32}\|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(B(z, 1))} + \sum_{y \in Y_1} A_{20}A_{21}^{r_{yz}}\tilde{\omega}(D^k\tilde{f}, C_6)_{L_p(B_\zeta(z, A_{22}r_{yz}))} \\ &\quad + \sum_{y \in Y_2} A_{25}A_{26}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)} + A_{29}A_{30}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)} \\ &\leq A_{33}\left(\tau_{zA_{34}} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j\tau_{zj} + A_{36}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)}\right) \\ &\leq A_{37}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j\tau_{zj} + A_{36}^{1/h}\|f\|_{W_p^k(\Omega)}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

где $A_{35}, A_{36} < 1$.

Положим $i = 0$ при $p \leq q$, $i = 1$ при $p > q$ и обозначим через $\xi_r(x, y)$ количество точек $z \in E$ таких, что $|x - z| < r$, $|y - z| < r$. Ввиду того, что E содержит $\leq A_{38}h^{-n}$ точек и $\xi_r(x, y) \leq A_{39}r^n$ при $r \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{z \in E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \tau_{zj} \right)^q \right)^{1/q} \leq A_{40} h^{i(n/p-n/q)} \left(\sum_{z \in E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \tau_{zj} \right)^p \right)^{1/p} \\
 & \leq A_{41} h^{i(n/p-n/q)} \left(\sum_{z \in E} \sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \tau_{zj}^p \right)^{1/p} \\
 & \leq A_{41} h^{i(n/p-n/q)} \left(\sum_{z \in E} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} A_{35}^j \iint_{\substack{x, y \in B_{\zeta}(z, j) \\ |x-y| \leq C_6}} |D^{\alpha} \tilde{f}(x) - D^{\alpha} \tilde{f}(y)|^p dx dy \right)^{1/p} \\
 & = A_{41} h^{i(n/p-n/q)} \left(\sum_{|\alpha|=k} \iint_{\substack{x, y \in \zeta \Omega \\ |x-y| \leq C_6}} |D^{\alpha} \tilde{f}(x) - D^{\alpha} \tilde{f}(y)|^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \xi_j(x, y) \right) dx dy \right)^{1/p} \\
 & \leq A_{42} h^{i(n/p-n/q)} \tilde{\omega}(D^k \tilde{f}, C_6)_{L_p(\zeta \Omega)} \leq A_{43} h^{i(n/p-n/q)} \omega(D^k \tilde{f}, C_6)_{L_p(\zeta \Omega)} \quad (30)
 \end{aligned}$$

(считаем, что $p, q < \infty$, но это ограничение несущественно). Из (29), (30) получаем

$$\begin{aligned}
 \|D^l(\tilde{f} - \tilde{s})\|_{L_q(\zeta \Omega_{\varepsilon})} & \leq \left(\sum_{z \in E} \|D^l(\tilde{f} - \tilde{s})\|_{L_q(B(z, 1))}^q \right)^{1/q} \\
 & \leq A_{44} \left(\sum_{z \in E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \tau_{zj} + A_{36}^{1/h} \|f\|_{W_p^k(\Omega)} \right)^q \right)^{1/q} \\
 & \leq A_{44} \left(\sum_{z \in E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{35}^j \tau_{zj} \right)^q \right)^{1/q} + A_{44} \left(\sum_{z \in E} (A_{36}^{1/h} \|f\|_{W_p^k(\Omega)})^q \right)^{1/q} \\
 & \leq A_{45} (h^{i(n/p-n/q)} \omega(D^k \tilde{f}, C_6)_{L_p(\zeta \Omega)} + A_{46}^{1/h} \|f\|_{W_p^k(\Omega)}),
 \end{aligned}$$

где $A_{46} < 1$. Применяя преобразование подобия, находим, что

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{\varepsilon})} \leq A_{47} (h^{\theta} \omega(D^k f, h)_{L_p(\Omega)} + A_{48}^{1/h} \|f\|_{W_p^k(\Omega)}), \quad (31)$$

где $A_{48} < 1$ ($C_6/\zeta \leq h$). Из леммы 1 следует, что

$$\inf_{Q \in \mathcal{P}_k} \|f - Q\|_{W_p^k(\Omega)} \leq A_{49} h^{-A_{50}} \omega(D^k f, h)_{L_p(\Omega)}, \quad (32)$$

откуда вытекает неравенство

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} \leq A_{51} h^{-A_{50}} (\omega(D^k f, h)_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_1(\Omega)}). \quad (33)$$

Наконец, из (31), (33) получаем оценку (10).

В случае $k = m + n$ рассуждения аналогичны. Нужно лишь вместо полинома P_1 использовать P_2 , когда применяем лемму 1 к функции $\tilde{f}$, и заменить ω , $\tilde{\omega}$ на соответствующие нормы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Теорема 2 останется в силе, если заменить в ней условия $k < m+n$, $k = m+n$ на $k \leq m/2$, $k = [m/2] + 1$ соответственно и в правых частях неравенств (10), (11) убрать член $C_2^{1/h} \|f\|_{L_1(\Omega)}$. Это следует из того, что $s_m(P, \Delta) = P$ при $P \in \mathcal{P}_{m/2}$, $\Delta \in \mathcal{A}_{m/2}$, а также из неравенства (32) и

$$\inf_{Q \in \mathcal{P}_{k-1}} \|f - Q\|_{W_p^k(\Omega)} \leq A \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}, \quad (34)$$

где $A = A(\Omega, k)$ (лемма 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В [3] показано, что если $f \in W_2^\mu(\Omega)$ и Δ_j – конечное подмножество $\bar{\Omega}$ ($j \in \mathbb{N}$), $\Delta_j \in \mathcal{A}_{m/2}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{h}(\Delta_j) = 0$, то $s_m(f, \Delta_j) \rightarrow f$ в $W_2^\mu(\Omega)$ при $j \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Как показано в [11], вариационная задача, получающаяся из (3) заменой $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ на $L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, имеет единственное решение $\sigma_m(f, \Delta)$, если $\Delta \in \mathcal{A}_{\mu-1}$, причем

$$\sigma_m(f, \Delta)(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j K(x - x_j) + P(x),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $P \in \mathcal{P}_{\mu-1}$. Функции $\sigma_m(f, \Delta)$ обычно называют D^μ -сплайнами, но точнее было бы назвать $\sigma_m(f, \Delta)$ D^μ -сплайном в $L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, а $s_m(f, \Delta)$ – D^μ -сплайном в $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Аппроксимативные свойства сплайнов $\sigma_m(f, \Delta)$ изучались Ж. Дюшоном [11], [12] и автором [13]. В случае интерполяции сплайнами $\sigma_m(f, \Delta)$ проходят рассуждения, по существу не отличающиеся от доказательства теоремы 2, так что эта теорема останется справедливой, если заменить в ней $s_m(f, \Delta)$ на $\sigma_m(f, \Delta)$ (этот результат был анонсирован в [13]).

В заключение отметим связь наших результатов с теорией условно положительно определенных функций, изложенной в работе У. Мэдича, С. Нельсона [14]. Область определения некоторой функции g будем обозначать X_g . Пусть $M(M')$ – множество всех функций со значениями в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$), области определения которых являются непустыми конечными подмножествами $\mathbb{R}^n$. Для любых $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in M'$ положим

$$S(g, \nu)(x) = \sum_{y \in X_\nu} \nu(y) g(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$R_1(g, \nu) = \sum_{x \in X_\nu} \nu(x) g(x), \quad R_2(g, \nu) = \sum_{x, y \in X_\nu} \nu(x) \overline{\nu(y)} g(x - y).$$

Множество функций $\nu \in M$ ($\nu \in M'$) таких, что $R_1(Q, \nu) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_t$, обозначим через M_t (соответственно M'_t). Функция $w \in C(\mathbb{R}^n)$ называется *условно положительно определенной порядка t* , если $R_2(w, \nu) \geq 0 \quad \forall \nu \in M'_{t-1}$, где $t \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим множество всех условно положительно определенных функций порядка t через Π_t . В [14] показано (в [14] рассматриваются комплекснозначные функции, но все рассуждения из этой работы проходят также в вещественном случае, и мы приводим вещественный аналог результатов [14]), что в случае $w \in \Pi_t$ существует единственное линейное

пространство $H_t(w) \subset C(\mathbb{R}^n)$ с неотрицательной симметрической билинейной формой $(g_1, g_2): H_t(w) \times H_t(w) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям:

- а) пространство $H_t(w)$, снабженное полунормой $\|g\|_{H_t(w)} = (g, g)^{1/2}$, полно;
- б) если $\nu \in M_{t-1}$, $P \in \mathcal{P}_{t-1}$, то $S(w, \nu) + P \in H_t(w)$ и $(S(w, \nu) + P, g) = R_1(g, \nu) \forall g \in H_t(w)$.

При этом условие $w \in \Pi_t$ необходимо для существования пространства $H_t(w)$, обладающего указанными свойствами, и в случае $w \in \Pi_t$

$$H_t(w) = \left\{ g \in C(\mathbb{R}^n) : \sup_{\substack{\nu \in M_{t-1} \\ R_2(w, \nu) \leq 1}} R_1(g, \nu) < +\infty \right\}. \quad (35)$$

Кроме того, в [14] показано, что если $w \in \Pi_t$, $\Delta \in \mathcal{A}_{t-1}$, $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция и допустимое множество вариационной задачи

$$\min \{ \|g\|_{H_t(w)} : g \in H_t(w), g(x) = f(x) \forall x \in \Delta \} \quad (36)$$

непусто, то эта задача имеет единственное решение, которое имеет вид $S(w, \nu) + P$, где $\nu \in M_{t-1}$, $X_\nu = \Delta$, $P \in \mathcal{P}_{t-1}$.

Далее, пространство, состоящее из тех же функций, что и $L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, снабженное полунормой $\|D^\mu g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$, полно (это вытекает из неравенства (34) и из полноты фактор-пространства банахова пространства). Ввиду замечания 1.1 пространство $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ с полунормой $\|D^\mu g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ тоже полно. Из доказательства теоремы 1 и из замечания 1.1 следует, что указанное выше условие б) будет выполнено, если взять $w(x) = C_{mn}K(x)$, где C_{mn} – ненулевая константа,

$$(g_1, g_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu!}{\alpha!} D^\alpha g_1 D^\alpha g_2 dx$$

и либо $t = m'$, $H_t(w) = \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, либо $t = \mu$, $H_t(w) = L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $C_{mn}K \in \Pi_{m'} \subset \Pi_\mu$ и $H_{m'}(C_{mn}K) = \mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, $H_\mu(C_{mn}K) = L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $C_{mn}K(x)$ можно рассматривать как условно положительно определенную функцию порядка m' или порядка $\mu \geq m'$; в первом случае решением соответствующей вариационной задачи (36) является D^μ -сплайн в $\mathring{L}_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ $s_m(f, \Delta)$, а во втором случае – D^μ -сплайн в $L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ $\sigma_m(f, \Delta)$. Подчеркнем, что m' есть наименьшее $t \in \mathbb{Z}_+$, при котором $K \in \Pi_t$ или $-K \in \Pi_t$. Действительно, допустим, что $K \in \Pi_{m'-1}$ или $-K \in \Pi_{m'-1}$. Если $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$, $t_1 \leq t_2$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $w \in \Pi_{t_1}$, $Cw \in \Pi_{t_2}$, то в силу (35) $H_{t_1}(w) \subset H_{t_2}(Cw)$, поэтому для любого $\nu \in M_{m'-2}$ $S(K, \nu) \in H_\mu(C_{mn}K) = L_2^\mu(\mathbb{R}^n)$, а это неверно по замечанию 1.2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
- [2] Шадрин А. Ю. О приближении функций интерполяционными сплайнами, заданными на неравномерных сетках // Матем. сб. 1990. Т. 181. №9. С. 1236–1255.
- [3] Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces // Lecture Notes in Math. 1977. V. 571. P. 85–100.
- [4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука 1975.
- [5] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [6] Матвеев О. В. Сплайн-интерполяция функций нескольких переменных и базисы в пространствах Соболева // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 125–152.
- [7] Schwartz L. Théorie des distributions. V. 2. Paris: Hermann, 1951.
- [8] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [9] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
- [10] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [11] Duchon J. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces // RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 1976. V. 10. №12. P. 5–12.
- [12] Duchon J. Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m -splines // RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 1978. V. 12. №4. P. 325–334.
- [13] Матвеев О. В. Аппроксимативные свойства интерполяционных D^m -сплайнов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. №1. С. 14–18.
- [14] Madych W. R., Nelson S. A. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions // Approx. Theory Appl. (N.S.) 1988. V. 4. №4. P. 77–89.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: matveev@apprekat.imm.intec.ru

Поступило
 28.04.94

Исправленный вариант
 28.02.96