Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Минкин, Краевая задача первого порядка с краевым условием в четном числе точек, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 418–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:05:17

УДК 517.512.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ В СЧЕТНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

А. М. Минкин

Пусть $E = \{E_n\}$ – семейство подпространств, натянутых на собственные и присоединенные функции краевой задачи

$$-i \frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad -a \leq x \leq a, \quad U(y) \equiv \int_{-a}^a y(t) d\sigma(t) = 0,$$

отвечающие “близким” (в смысле расстояния, равного максимуму из евклидовой и гиперболической метрик) собственным значениям. Для чисто дискретной меры $d\sigma$ показано, что система E не образует безусловного базиса из подпространств в $L^2(-a, a)$, если хотя бы один из концов $\pm a$ не несет масс.

Библиография: 21 название.

0. Введение. В работе изучается и решается вопрос о безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций (СПФ) краевой задачи

$$\begin{aligned} -i \frac{dy}{dx} &= \lambda y, \quad -a \leq x \leq a, \\ U(y) &\equiv \int_{-a}^a y(t) d\sigma(t) \equiv \sum_j c_j y(a_j) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $d\sigma(t)$ – чисто дискретная мера на $[-a, a]$ ограниченной вариации со скачками в точках $a_j \in [-a, a]$. Сумма во втором уравнении задачи (1) предполагается бесконечной.

Положим $L(\lambda) = U(\exp(i\lambda t))$ и пусть $k_L(\lambda)$ – дивизор нулей порождающей функции $L(\lambda)$, т.е. неотрицательная целочисленная функция $\lambda \rightarrow k_L(\lambda)$ с носителем $\Lambda = L^{-1}(0)$. Она равна m , если λ – нуль $L(\cdot)$ порядка m , и равна 0 в противном случае.

Положим $e_\lambda^j(x) = x^j \cdot \exp(i\lambda x)$, $-a \leq x \leq a$. Тогда множество

$$R(\Lambda) := \{e_\lambda^j, j = 0, \dots, k_L(\lambda) - 1\}_{\lambda \in \Lambda} \tag{2}$$

образует семейство СПФ задачи (1).

В основополагающих работах [1], [2] Б. Я. Левин и В. Д. Головин установили базисные свойства систем экспонент, у которых порождающая функция является функцией типа синуса. Из их результатов, в частности, вытекают следующие свойства системы (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00014.

ТЕОРЕМА А (Левин, Головин). *Предположим, что*

$$\sigma(a) - \sigma(a - 0) \neq 0, \quad \sigma(-a) - \sigma(-a + 0) \neq 0. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup\{|\operatorname{Im} \lambda| \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty, \\ \sum_{s \leq \operatorname{Re} \lambda \leq s+1} k_L(\lambda) = O(1), \quad -\infty < s < \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

и существует такое разбиение $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектра Λ :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \Lambda, \quad \Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset, \quad n \neq m,$$

что семейство подпространств $E = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n := \operatorname{span} R(\Lambda_n)$, образует безусловный базис в $L^2(-a, a)$.

Впоследствии Б. С. Павлов нашел простое геометрическое доказательство теоремы А в рамках функциональной модели линейных операторов [3]. В этой же работе им получена безусловная базисность СПФ задачи (1) при условии кусочной абсолютной непрерывности меры $d\sigma$.

Для задачи (1) с произвольной мерой $d\sigma$ также подробно исследованы вопросы сходимости, равносходимости и равносуммируемости разложений по СПФ (см. [4], [5], а также обзор [6]). Случай абсолютно непрерывной меры $d\sigma$ в большой общности изучен в [7], [8].

В настоящей работе нас будет интересовать случай чисто дискретной меры $d\sigma$. Конечность ее вариации означает, что порождающая функция $L(\lambda)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд из экспонент $\exp(ia_j \lambda)$ с показателями на отрезке $[-a, a]$. Тогда $L(\lambda)$ – целая почти-периодическая функция [9, с. 346], числа a_j называются ее спектром. Для таких целых функций известна подробная информация о распределении нулей. Ниже мы приведем только ту часть, которая потребуется в дальнейшем.

Для краткости будем писать $\operatorname{Im} \Lambda$ вместо $\{\operatorname{Im} \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и использовать аналогичную запись для $-\Lambda$, комплексного сопряжения и прочих поэлементных операций, а также для $\inf \Lambda$, $\sup \Lambda$ и т.д. Тогда, объединяя теорему Бора [9, с. 349] и следствие 2 [9, с. 350], имеем

$$\begin{aligned} \inf \operatorname{Im} \Lambda &= -\infty, \quad \sup \operatorname{Im} \Lambda < +\infty, \quad \text{если } -a \in \{a_j\}, a \notin \{a_j\}; \\ \inf \operatorname{Im} \Lambda &> -\infty, \quad \sup \operatorname{Im} \Lambda = +\infty, \quad \text{если } -a \notin \{a_j\}, a \in \{a_j\}; \\ \inf \operatorname{Im} \Lambda &= -\infty, \quad \sup \operatorname{Im} \Lambda = +\infty, \quad \text{если } \pm a \notin \{a_j\}. \end{aligned}$$

Что касается безусловной базисности в $L^2(-a, a)$, то имеющиеся результаты относятся только к случаю выполнения условий (3) (см. [6], [10]). С другой стороны, сегодня известны два критерия безусловной базисности экспонент на конечном интервале. Один

установлен Б. С. Павловым [11], Н. К. Никольским [12] и С. В. Хрущёвым [13] для полуограниченного спектра (подробное изложение в [14]) и нами в общем случае [15]. Другой дан С. А. Авдониным, И. Йо и М. Хорватом в случае спектра, лежащего в горизонтальной полосе (4) (см. [16], [17]). Для случая частот λ , лежащих на вещественной прямой, отметим также результат Г. М. Губреева [18], равно как и глубокое описание таких частот в терминах поведения критических точек (нулей производной) порождающей функции А. Э. Ерёмченко и М. Л. Содиным [19].

Все эти подходы связаны с использованием информации о порождающей функции и распределении спектра. В то же время с точки зрения краевых задач важно установить результат непосредственно в терминах самих краевых условий. Ясно, что это является самостоятельной задачей, такой же трудной, как и исходная. Поэтому в настоящей работе мы ограничиваемся не самым общим видом краевого условия, однако, проводим полное исследование вопроса о безусловной базисности. Основной результат статьи дает отрицательное решение данной проблемы, а именно, при нарушении (3) безусловная базисность даже со скобками отсутствует (теоремы 1, 2).

Ниже вводятся необходимые определения и обозначения и формулируются результаты. Теорема 1 относится к случаю, когда только один из концов несет ненулевую массу, а теорема 2 к случаю, когда они оба свободны от масс.

1. Обозначения и определения. Пусть $k(\lambda)$ – дивизор в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, носитель которого Λ – дискретное множество с единственной предельной точкой на ∞ . Пусть

$$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

– его разбиение на непересекающиеся подмножества Λ_n . Положим

$$k_n(\lambda) = \begin{cases} k(\lambda), & \lambda \in \Lambda_n, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и предположим, что

$$\Lambda_n \subset K_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \xi_n| \leq r_n\}, \quad r_n \leq C \cdot (1 + |\operatorname{Im} \xi_n|),$$

$$\sup_n \operatorname{Card} \Lambda_n = N < \infty. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в приведенных выше обозначениях

$$E_n = \operatorname{span}(e_{\lambda}^j \mid j = 0, \dots, k(\lambda) - 1, \lambda \in \Lambda_n)$$

и $E := \{E_n\}$ – безусловный базис из подпространств в $L^2(-a, a)$. Тогда будем говорить, что система E образует блок-базис в $L^2(-a, a)$ ($E \in (\text{BB})$).

Ниже нам потребуется обобщение критерия из [15] на случай базисности со скобками. Пусть Λ_- – объединение всех Λ_n таких, что $\sup \operatorname{Im} K_n < 0$, Λ_+ – его дополнение в Λ , а $k_{\pm}(\lambda)$ – их дивизоры.

ТЕОРЕМА В [20]. Введенное выше семейство подпространств $E \in (BB)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- A) $k(\lambda)$ является дивизором нулей некоторой целой функции $L(z)$ экспоненциального типа a (ПФЭТ);
- B) $\text{dist}(\Lambda_n, \Lambda_m) \geq \varepsilon > 0, n \neq m$;
- C) $\Lambda_h^\pm := \{\Lambda_n \mid \inf(\pm \text{Im } K_n) \geq h\} \in (CV)$ для некоторого фиксированного $h > 0$;
- D) $|M(\cdot - iy)|^2 \in (A_2)$ для некоторого $y > 0$.

Здесь $\text{dist}(X, Y) := \inf\{|x - y| \mid x \in X, y \in Y\}$, (A_2) и (CV) обозначают условия Макенгаупта и Карлесона–Васюнина [21] соответственно, а $M(z)$ – целая функция порядка 1 с дивизором нулей

$$k_M(\lambda) := k_+(\lambda) + k_-(\bar{\lambda}). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\Theta_{\pm a} \equiv \exp(\pm iaz)$ и пусть $B(z, k)$ – произведение Бляшке, построенное по дивизору k . Тогда в теореме В можно заменить условие D) на следующее:

$$\text{dist}_{L^\infty}(\Theta_a^2 \overline{B}(\cdot, k_M(\cdot - iy)), H_\pm^\infty) < 1.$$

Положим также $\mathbb{C}_\pm := \{\pm \text{Im } z \geq 0\}$ и $\mathbb{C}_q := \{\text{Im } z \geq q\}$.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что выполнены соотношения

$$\sigma(a) - \sigma(a - 0) \neq 0, \quad \sigma(-a) - \sigma(-a + 0) = 0. \quad (7)$$

Тогда

- i) $\inf \text{Im } \Lambda > -\infty$,
- ii) $E \notin (BB)$.

Аналогичное утверждение имеет место, когда точки $-a$ и a меняются местами с заменой i) на $\sup \text{Im } \Lambda < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что выполнены соотношения

$$\sigma(-a) - \sigma(-a + 0) = 0, \quad \sigma(a) - \sigma(a - 0) = 0.$$

Тогда $E \notin (BB)$.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим для определенности случай $a \in \{a_j\}$. Тогда соотношение i) известно (см. [9, с. 349]).

Далее, не ограничивая общности, считаем, что $\inf \text{Im } \Lambda > 0$. В противном случае домножить $d\sigma(t)$ на $\exp(-yt)$, “подняв” спектр на величину iy с достаточно большим y . Тогда справедливо соотношение

$$|L(z)| \asymp \exp(iaz), \quad z \in \mathbb{C}_-. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем запись $A \asymp B$ означает, что $d_1 \leq |A/B| \leq d_2$ с некоторыми положительными постоянными d_1, d_2 , не зависящими от переменных A, B .

Допустим теперь от противного, что $E \in (BB)$. По теореме В $\Lambda \in (CV)$. Это влечет известную двустороннюю оценку

$$|B(z, k_\Lambda)| \asymp 1, \quad z \in K_\delta, \quad K_\delta := \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \mid |z - \lambda| \geq \delta \cdot |\operatorname{Im} \lambda|, \lambda \in \Lambda \}. \quad (9)$$

Так как $|L(t)|^2$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяет условию Макенхаупта, то $L(z)$ – функция класса Картрайт с индикаторной диаграммой $[-ia, ia]$. Отсюда

$$L(z) = \text{v. p.} \prod \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{k(\lambda)},$$

где произведение берется в смысле главного значения по всем $\lambda \in \Lambda$.

Положим $\tilde{L}(z) = \overline{L(\bar{z})}$. Тогда $L(z)/\tilde{L}(z) = B(z, k_\Lambda)$. Из (8) следует, что $\tilde{L}(z) \asymp \exp(-iaz)$, $z \in \mathbb{C}_+$. Тогда, используя (9), имеем

$$|L(z)| \asymp |\Theta_{-a}(z)|, \quad z \in K_\delta. \quad (10)$$

С другой стороны,

$$L(z) = \left(\int_{-a+\varepsilon}^a + \int_{-a}^{-a+\varepsilon} \right) e^{izt} d\sigma(t) = L_\varepsilon(z) + L^\varepsilon(z).$$

Первое слагаемое $L_\varepsilon(z)$ – ЦФЭТ, оно $\leq a - \varepsilon$ в $\mathbb{C}_+$. Второе слагаемое допускает оценку

$$|L^\varepsilon(z)| \leq \exp(a \cdot \operatorname{Im} z) \cdot \int_{-a}^{-a+\varepsilon} |d\sigma(t)|, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (11)$$

Второй множитель справа в (11) стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку конец a не несет массы. Пришли к противоречию с (10) и теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Известно [9, с. 347], что в каждом квадрате

$$\{ |\operatorname{Re} z - t| \leq h, |\operatorname{Im} z| \leq h \},$$

h фиксированное положительное число, $L(z)$ имеет с учетом кратности $O(1)$ нулей и вне их δ -окрестности $L(z)$ допускает равномерную оценку снизу

$$|L(z)| \geq \varepsilon > 0, \quad z \in S_\delta(h, \Lambda) := \{ |\operatorname{Im} z| \leq h \} \setminus S_\delta(\Lambda), \quad (12)$$

$$S_\delta(\Lambda) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{ |z - \lambda| \leq \delta \}.$$

Выберем здесь $h > 0$ так, чтобы $-h/2 < \inf \operatorname{Im} \Lambda_+$. Отражая Λ_- в верхнюю полуплоскость, приходим к новой порождающей функции $M(z)$ с дивизором нулей $k_M(z)$, определенным формулой (6). При этом

$$\inf M^{-1}(0) > -\frac{h}{2},$$

$$\frac{M(z)}{L(z)} = B(z, k_{\Lambda_-}). \quad (13)$$

Нули $B(z, k_{\Lambda_-})$ лежат в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяют условию Карлесона–Васюнина. Поэтому

$$B(z, k_{\Lambda_-}) \asymp 1, \quad z \in S_\delta(2h, \bar{\Lambda}_-).$$

Учитывая (13), получаем, что

$$M(z) \asymp L(z), \quad z \in S_\delta(2h, \bar{\Lambda}_-),$$

откуда в силу (12)

$$M(z) \asymp 1, \quad z \in S_\delta(2h, \Lambda). \quad (14)$$

Но у $M(z)$ нет нулей при $\operatorname{Im} z \leq -h/2$. Выберем теперь число δ в (12) так, чтобы $2\delta < \min(\varepsilon, h/2)$. Рассмотрим связные компоненты объединения кружков $\{|z - \lambda| \leq \delta\}$ по всем $\lambda \in \Lambda$ таким, что

$$-2h + \delta < \operatorname{Im} \lambda < -\frac{h}{2} - \delta. \quad (15)$$

Каждая компонента состоит не более, чем из N кружков (см. (5)) и целиком лежит в области $-2h < \operatorname{Im} z < -h/2$. На ее границе выполнено двустороннее неравенство (14), причем внутри компоненты $M(z)$ не имеет нулей. Тогда по принципу максимума модуля (14) справедливо и внутри каждой из компонент.

Следовательно,

$$M(z) \asymp 1, \quad -2h + 2\delta < \operatorname{Im} \lambda < -\frac{h}{2} - 2\delta, \quad (16)$$

так как кружки, не лежащие полностью в области (15), заведомо не пересекают область (16). Тем более, $M(z) \asymp 1$, $\operatorname{Im} z = -h$.

Однако, функция $M(z - ih)/\Theta_a(z - ih)$ внешняя в $\mathbb{C}_-$. Отсюда

$$M_1(z) := M(z - ih) \asymp \Theta_a(z), \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

С другой стороны, используя (13) с аргументом $z - ih$, получаем, что

$$M_1(z) \cdot \Theta_a(z) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty,$$

поскольку это так для $L(z - ih) \cdot \Theta_a(z - ih)$, раз точка $-a$ не несет массы. Рассуждая далее, как в теореме 1, получаем доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. О базисах показательных функций в L_2 // Записки матем. отд. физ.-матем. фак-та Харьковского университета и Харьковского матем. общества. 1961. Т. 27. № 4. С. 39–48.
- [2] Головин В. Д. Биортогональные разложения в L^2 по линейным комбинациям показательных функций // Записки матем. отд. физ.-матем. фак-та Харьковского университета и Харьковского матем. общества. 1963. Т. 30. № 4. С. 18–29.
- [3] Павлов Б. С. Спектральный анализ дифференциального оператора с “размазанным” граничным условием // Проблемы матем. физики. Вып. 6. Л.: ЛГУ, 1973. С. 101–109.
- [4] Молоденков В. А. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи // Дифференц. уравнения и вычислительная матем. Вып. 2. Саратов, 1975. С. 56–65.
- [5] Молоденков В. А., Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования // Дифференц. уравнения и вычислительная матем. Вып. 1. Саратов, 1972. С. 17–26.
- [6] Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на конечном интервале вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5 (227). С. 51–95.
- [7] Седлецкий А. М. Разложение по собственным функциям оператора дифференцирования с размазанным краевым условием // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 70–76.
- [8] Седлецкий А. М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
- [9] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [10] Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1236–1268.
- [11] Павлов Б. С. Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 37–40.
- [12] Никольский Н. К. Базисы из экспонент и значений воспроизводящих ядер // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 6. С. 1316–1320.
- [13] Хрущёв С. В. Теоремы возмущения для базисов из экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 44–48.
- [14] Pavlov B. S., Nikolskii N. K., Hrushev S. V. Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels // Lecture Notes in Math. 1981. V. 864. P. 214–335.
- [15] Минкин А. М. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 110–135.
- [16] Avdonin S. A., Joó I. Riesz bases of exponentials and sine-type functions // Acta Math. Hungar. 1988. V. 51. № 1–2. P. 3–14.
- [17] Авдонин С. А., Йо И., Хорват М. Базисы Рисса из элементов вида $x^k e^{i\lambda_n x}$ // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1989. № 4 (22). С. 3–7.
- [18] Губреев Г. М., Игнатенко Т. Р. Об одном классе ортогонализаторов семейств экспонент с вещественными частотами // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 8. С. 1031–1044.
- [19] Eremenko A. E., Sodin M. L. Parametrization of entire functions of sine-type by their critical values // Adv. Soviet Math. 1992. V. 11. P. 237–242.
- [20] Минкин А. М. Метод проектирования и безусловные базисы // Алгебраические и топологические методы в математической физике. Кацивели (Украина), 1994.
- [21] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

Саратовский государственный университет
 E-mail: minkin@scnit.saratov.su

Поступило
 07.07.95
 Исправленный вариант
 05.12.96