Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Оманадзе, Сложностные свойства рекурсивно перечислимых множеств и sQ -полнота, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 425–429

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:38:24

УДК 510

СЛОЖНОСТНЫЕ СВОЙСТВА РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И sQ -ПОЛНОТА

Р. Ш. Оманадзе

В работе вводятся понятия эффективно субкреативного множества и сильно эффективно ускоряемого множества. Доказано, что понятия эффективно субкреативного множества, сильно эффективно ускоряемого множества и sQ -полного рекурсивно перечислимого множества эквивалентны.

Библиография: 7 названий.

В работе [1] введены понятия субкреативного множества и эффективно ускоряемого множества и доказано, что рекурсивно перечислимое (РП) множество является субкреативным тогда и только тогда, когда оно является эффективно ускоряемым. Гиллом и Моррисом [2] дана простая и интересная характеристика эффективно ускоряемых множеств в терминах Q -полных множеств. Они доказали, что РП множество является эффективно ускоряемым тогда и только тогда, когда оно Q -полно.

В данной работе вводятся понятия эффективно субкреативного множества и сильно эффективно ускоряемого множества. Доказано, что понятия эффективно субкреативного множества, сильно эффективно ускоряемого множества и sQ -полного РП множества эквивалентны. Все употребляемые без определения понятия и обозначения можно найти в монографии [3].

Будем говорить, что множество A sQ -сводится к множеству B ($A \leq_{sQ} B$), если существуют общерекурсивные функции (ОРФ) f, g такие, что

$$(\forall x)(\forall y)[(x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B) \& (y \in W_{f(x)} \implies y < g(x))].$$

РП множество A называется sQ -полным, если каждое РП множество sQ -сводится к множеству A .

Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $(\varphi_i)_{i \in \omega}$ — эффективная нумерация всех частично рекурсивных функций (ЧРФ) и последовательность ЧРФ $(\Phi_i)_{i \in \omega}$ удовлетворяет аксиомам Блюма [4]:

- 1) функция $\varphi_i(x)$ определена $\iff$ функция $\Phi_i(x)$ определена;
- 2) функция

$$M(i, n, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_i(n) = m, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является общерекурсивной.

Естественным образом вводятся следующие понятия.

РП множество A назовем *эффективно субкреативным*, если существуют ОРФ f и g такие, что для каждого i существует число a_i такое, что

- 1) $W_{f(i)} = A \cup \{a_i\}$,
- 2) $a_i \in (W_i \cap A) \cup (\overline{W_i \cup A})$,
- 3) $a_i \in \overline{W_i \cup A} \implies a_i < g(i)$.

РП множество A назовем *эффективно ускоряемым*, если существуют ОРФ h и g такие, что для всех натуральных чисел i и l , если φ_i частично характеристическая функция множества A (эквивалентно, $W_i = A$) и φ_l – ОРФ, то

- 1) $W_{h(i,l)} = A$,
- 2) $(\exists \infty x)(x \in A \implies \Phi_i(x) > \varphi_l(x, \Phi_{h(i,l)}(x)))$,
- 3) $(\forall i)(\forall l)(\forall y)(y \in W_{h(i,l)} \setminus A \implies y < gc(i, l))$,

где c – нумерационная функция, т.е. c является рекурсивным взаимно однозначным отображением множества $\omega \times \omega$ на ω .

Если в этих определениях выполняются 1) и 2), то получаются соответственно понятия субкреативного множества и эффективно ускоряемого множества.

Основным результатом этой работы является теорема, анонсированная в [5],

ТЕОРЕМА. Пусть A – РП множество. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (I) A есть эффективно субкреативное множество;
- (II) A есть sQ -полное множество;
- (III) $(\exists f \text{ ОРФ})(\exists g \text{ ОРФ})(\forall x)(\forall y)((W_x \cap A = \emptyset \implies A \subseteq W_{f(x)} \subsetneq \overline{W_x}) \& (y \in W_{f(x)} \setminus A \implies y < g(x)))$;
- (IV) A есть сильно эффективно ускоряемое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что (I) $\iff$ (II). Допустим, что A эффективно субкреативное множество, f и g ОРФ из определения эффективно субкреативного множества, K – креативное множество и t – ОРФ такая, что

$$W_{t(y)} = \begin{cases} \omega, & \text{если } y \in K, \\ \emptyset, & \text{если } y \notin K. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y \in K &\implies W_{t(y)} = \omega \implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \& x \in A \cap W_{t(y)} \implies W_{ft(y)} \subseteq A, \\ y \notin K &\implies W_{t(y)} = \emptyset \implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \& x \in \overline{A \cup W_{t(y)}} \\ &\implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \& x \in \overline{A} \& x < gt(y). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество

$$W_{f_1(y)} = \{z : z \in W_{ft(y)} \& z < gt(y)\}.$$

Тогда

$$(\forall x)(\forall y)[(x \in K \iff W_{f_1(x)} \subseteq A) \& (y \in W_{f_1(x)} \implies y < gt(x))].$$

Пусть теперь РП множество A является sQ -полным. Тогда из критерия Фридберга и Роджерса [6] следует, что

$$(\exists f \text{ ОРФ})(\exists g \text{ ОРФ})(\forall x)(\forall y)((W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \iff W_{f(x)} \subseteq A) \& (y \in W_{f(x)} \implies y < g(x))). \quad (1)$$

Рассмотрим множество $W_{f_1(i)} = A \cup \{x : x \text{ есть первый элемент, который вычислится в } W_{f(i)}, \text{ но никогда не вычислится в } A\}$. Тогда ОРФ f_1 и g удовлетворяют условиям определения эффективно субкреативного множества, т.е. A является эффективно субкреативным множеством.

Теперь покажем, что $(II) \iff (III)$. Если РП множество A является sQ -полным, то выполняется (1). Отсюда получается, что $(II) \implies (III)$.

Если для РП множества A выполняется (III), то sQ -полнота множества A доказывается точно так же, как это делается в теореме 1.(4) из работы В. К. Булитко [7].

Наконец докажем, что $(III) \iff (IV)$. При доказательстве импликации $(III) \implies (IV)$ использована конструкция из доказательства теоремы 2 [2].

Пусть f, g – ОРФ такие, что

$$(\forall x)(\forall y)((W_x \cap A = \emptyset \implies A \subseteq W_{f(x)} \subsetneq \overline{W_x}) \& (y \in W_{f(x)} \setminus A \implies y < g(x))).$$

Определим РП множество $W_{i(j,l)}$ и ОРФ s, t следующим образом.

I. 1. Перечисляем $W_{fs(n)}$, пока новый элемент не появится (если существует); пусть этот элемент есть x .

2. Передаем x в $W_{t(n)}$.

3. Вычисляем $\varphi_l(x, \Phi_i(x))$ до тех пор, пока не вычислится (если когда-нибудь вычислится).

4. Смотрим $\Phi_j(x) > \varphi_l(x, \Phi_i(x)) + n$? Если да, то передаем x в $W_{s(n)}$ и останавливаемся. В противном случае возвращаемся к п. 1.

II. Пусть

$$W_i = \{y : y \in W_j \& y < gc(j, l)\} \cup A \cup \left(\bigcup_{n \in \omega} W_{t(n)} \right),$$

где c – нумерационная функция.

Допустим, что $W_j = A$ и φ_l – ОРФ. Для каждого n множество $W_{s(n)}$ либо пусто, либо состоит из единственного элемента. Из II и I.2 ясно, что для каждого n пункт I.3 определен. Кроме того, имеем $W_{s(n)} \cap A \neq \emptyset$. В противном случае

$$A \subsetneq W_{fs(n)} \subseteq \overline{W_{s(n)}}.$$

Тогда $W_{s(n)}$ не может быть пустым множеством, так как в $W_{fs(n)}$ содержится элемент из $\overline{A}$. Но если $W_{s(n)} \neq \emptyset$, то $W_{fs(n)} \cap W_{s(n)} \neq \emptyset$ в силу нашей конструкции. Противоречие. Отсюда следует, что $(\forall n)(W_{s(n)} \subset A)$. Следовательно,

$$(\forall n)(W_{t(n)} \subset A) \& W_i = A.$$

Если $x \in W_{s(n)}$, то $\Phi_j(x) > n$. Поэтому существует бесконечно много x таких, что

$$x \in \bigcup_{n \in \omega} W_{s(n)}.$$

Но когда $x \in W_{s(n)}$, имеем

$$\Phi_j(x) > \varphi_l(x, \Phi_i(x))$$

и по определению W_i будем иметь

$$(\forall y)(y \in W_i \setminus A \implies y < gc(i, l)).$$

Следовательно, A сильно эффективно ускоряемое множество.

В доказательстве обратной импликации использована конструкция из доказательства теоремы 3.1 из [1].

Пусть A сильно эффективно ускоряемое множество, т.е. существуют ОРФ h, g такие, что для каждого j и l если $W_j = A$ и φ_l – ОРФ, то

- 1) $W_{h(j, l)} = A$,
- 2) $(\exists \tilde{x})(x \in A \implies \Phi_j(x) > \varphi_l(x, \Phi_{h(j, l)}(\tilde{x})))$,
- 3) $(\forall j)(\forall l)(\forall y)(y \in W_{h(j, l)} \setminus A \implies y < gc(j, l))$.

В дальнейшем i будет обозначать индекс частично характеристической функции множества A . Определим ЧРФ $\varphi_{l(j)}$ следующим образом.

Для каждой пары (x, y) мы можем определить, имеет ли место $\Phi_{h(i, l)}(x) = y$. Для всякой пары (x, y) , такой, что $\Phi_{h(i, l)}(x) \neq y$, положим $\varphi_l(x, y) = 0$. Пусть $\Gamma = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ эффективно перечисление всех пар (x, y) таких, что $\Phi_{h(i, l)}(x) = y$.

I. Для каждого x из области определения Γ начинаем вычислять $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$. Когда одна из этих функций вычислится на некотором x_k , то выбрасываем пару (x_k, y_k) из Γ и переходим к II.

II. 1. Если $\varphi_i(x_k)$ вычислилось, то пусть $\varphi_l(x_k, y_k) = 1 + \Phi_i(x_k)$ и возвращаемся к I.

2. Если $\varphi_j(x_k)$ вычислилось, то пусть $\varphi_l(x_k, y_k) = 0$. Вычисляем $\varphi_i(x_k)$, найдем наименьшую пару $(u, v) \in \Gamma$, на которой φ_l пока еще не определена, выбрасываем (u, v) из Γ и положим $\varphi_l(u, v) = 0$. Когда $\varphi_i(x_k)$ вычислится, возвращаемся к I.

Покажем, что $\varphi_i(x)$ вычислится в II.2. Допустим противное. Тогда φ_l – ОРФ и $W_{h(i, l)} = W_i$, $\varphi_{h(i, l)}(x_k)$ вычислится, так как x_k принадлежит области определения Γ . Поэтому $\varphi_i(x_k)$ тоже вычислится. Противоречие.

Допустим, что $W_j \cap W_i = \emptyset$. Тогда II.2 не имеет места, так как когда $\varphi_j(x_k)$ вычислится, то и $\varphi_i(x_k)$ вычислится, поэтому $x_k \in W_j \cap W_i$.

Покажем, что φ_l – не ОРФ. Допустим, что φ_l – ОРФ. Тогда $W_{h(i, l)} = W_i$, следовательно, $\varphi_i(x)$ определено для каждого x из области определения Γ . Так как II.2 не имеет места, II.1 будет иметь место почти для каждого x из области определения Γ . Тогда для каждого $x \in A$

$$\varphi_l(x, \Phi_{h(i, l)}(x)) > \Phi_i(x).$$

Но это означает, что A не является эффективно ускоряемым множеством. Противоречие.

Итак, φ_l не является ОРФ. Тогда из определения φ_l вытекает, что $\varphi_l(x_k, y_k)$ не определено для некоторой пары $(x_k, y_k) \in \Gamma$. Для такой пары имеем $\Phi_{h(i, l)}(x_k) = y_k$ и $\varphi_i(x_k), \varphi_j(x_k)$ не определены. Поэтому

$$(\exists a)(a \in W_{h(i, l)} \ \& \ a \in \overline{W_i \cup W_j}). \quad (2)$$

Из II.2 и из $W_j \cap W_i = \emptyset$ вытекает, что

$$W_{h(i, l)} \cap W_j = \emptyset. \quad (3)$$

Тогда из (2) и (3) получается, что $ОР\Phi p$, определенная равенством

$$W_{p(j)} = W_{h(i,j)} \cup A,$$

удовлетворяет условию пункта (III) теоремы. Поэтому A является sQ -полным и, следовательно, A является эффективно субкреативным множеством.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Существует эффективно ускоряемое (субкреативное), но не сильно эффективно ускоряемое (эффективно субкреативное) множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует Q -полное, но не sQ -полное РП множество, например, Q -полное гиперпростое множество. Из этого факта, из выше доказанной теоремы, из теоремы 3.1 [1] и из теоремы 2 [2] получается следствие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blum M., Marques I. Complexity properties of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1973. V. 38. № 4. P. 579–593.
- [2] Gill J. T., Morris P. H. On subcreative sets and s -reducibility // J. Symbolic Logic. 1974. V. 39. № 4. P. 669–677.
- [3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [4] Blum M. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions // J. Assoc. Comput. Mach. 1967. V. 14. P. 322–336.
- [5] Оманадзе Р. III. Сложностные свойства рекурсивно перечислимых множеств и sQ -полные множества // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 146. № 1. С. 9–12.
- [6] Friedberg R. M., Rogers H. Reducibility and completeness for sets of integers // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1959. V. 5. P. 117–125.
- [7] Булитко В. К. О способах характеристики полных множеств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 2. С. 227–253.

Тбилисский государственный университет им. И. А. Джавахишвили
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа

Поступило
15.11.95
Исправленный вариант
24.10.96