Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, 3-эллиптические решения уравнения “sine-Gordon”, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 440–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:53:15

УДК 517.95

3-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ “SINE-GORDON”

А. О. Смирнов

Полностью описаны все трехлистные накрытия, ассоциированные с эллиптическими конечнозонными решениями уравнения “sine-Gordon”.

Библиография: 20 названий.

Введение. Двоякопериодические решения уравнения “sine-Gordon” (СГ) играют большую роль при описании различных периодических процессов и периодических структур, возникающих в таких совершенно разных областях математики и физики, как физика твердого тела (магнитные вихри в джозефсоновских контактах [1], [2]), дифференциальная геометрия (поверхности постоянной средней кривизны [3]), нелинейная оптика, общая теория относительности, квантовая теория поля, теория струн и т.д. (см., например, монографию [4]). Однако, до последнего времени единственным эллиптическим решением, которым активно пользовались при изучении этих нелинейных явлений, был анзац Лэмба и его модификации [1], [4]–[8].

В то же время автором [9] были предложены анзацы гиперэллиптических кривых, по которым нетрудно, используя соответствующие формулы (см., например, [7]–[10]), построить вещественные конечнозонные эллиптические решения уравнения СГ, не сводящиеся к анзацу Лэмба.

В настоящей работе полностью описываются все трехлистные накрытия, удовлетворяющие условиям определенных в [9] анзацев I и II и ассоциированные с эллиптическими конечнозонными решениями уравнения СГ.

Автор благодарит В. Б. Матвеева и М. А. Салля за полезные обсуждения.

1. Двухзонное однопараметрическое 3-эллиптическое решение. Анзац I. Кривая Кричевера $\Gamma = \{(k, \alpha)\}$, ассоциированная с однопараметрическим семейством эллиптических решений уравнения СГ и удовлетворяющая условиям анзаца I (см. [9]), определяется уравнением

$$\Gamma_2^3: k^3 - ((s^2 + s + 1)\wp(\alpha) + H)k - \frac{s(s+1)}{2}\wp'(\alpha) = 0, \quad (1)$$

где

$$H = -\frac{(s-1)(2s+1)(s+2)}{3}(b(2s+1) - h(s+2)),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00686.

s, b, h – параметры, $\wp(\alpha)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса,

$$\begin{aligned} (\wp'(\alpha))^2 &= 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3 \equiv 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j), \\ g_2 &= \frac{4}{3}(b(2s+1)^2 - h(s+2)^2)^2 - \frac{16}{3}bh(s-1)^2(2s+1)(s+2), \\ g_3 &= -\frac{8}{27}(b^3(2s+1)^6 + 3b^2h(2s+1)^3(10-6s-9s^2-4s^3) \\ &\quad + 3bh^2(s+2)^3(10s^3-6s^2-9s-4) + h^3(s+2)^6). \end{aligned} \quad (2)$$

Дискриминант эллиптической кривой Γ_0 (2) равен

$$\Delta = -256bh(b-h)(b(2s+1)^3 - h(s+2)^3)^3.$$

Зафиксировав g_2 и g_3 ($\Delta \neq 0$), мы, следуя [9], получим однопараметрическое семейство двоякопериодических решений уравнения СГ.

Каноническая форма гиперэллиптической поверхности Γ_2^3 (1), (2) имеет вид

$$w^2 = E(E+h)(E^3 + A_1E^2 + B_1E + s^4bh^2), \quad (3)$$

где

$$A_1 = b(2s+1)^2 - 2hs(s+2), \quad B_1 = hs^2(h(s+2)^2 - 2b(2s+1)).$$

Связь между различными представлениями поверхности Γ_2^3 осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \wp(\alpha) &= \frac{E^3 + A_2E^2 + B_2E + s^2bh^2}{E(E+h)}, \quad k = -\frac{w}{E(E+h)}, \\ \wp'(\alpha) &= \frac{2w(E^3 + (s+2)hE^2 + (2s+1)bhE + sbh^2)}{E^2(E+h)^2}, \\ A_2 &= \frac{1}{3}(b(2s+1)^2 - 2h(s-1)(s+2)), \\ B_2 &= \frac{h}{3}(2b(2s+1)(s-1) + h(s+2)^2). \end{aligned}$$

Накрытие (1), (2) соответствует редукции ненормированного голоморфного дифференциала $d\alpha = ((E-sh)/(2w))dE$ и ненормированного абелева дифференциала с полюсами в точках $P_0 = (0, 0)$ и $P_\infty = (\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} d\Omega &= (1+s)\wp(\alpha)d\alpha - dk \\ &= \frac{dE}{2Ew} \left((s+2)E^3 + \frac{b(2s+1)^2(s+1) - h(s+2)^2(2s-1)}{3}E^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{sh(b(s-2)(2s+1)^2 + h(s+1)(s+2)^2)}{3}E - bh^2s^3(2s+1) \right). \end{aligned}$$

Положив $s = 1$, мы получим хорошо известную кривую

$$k^3 - 3\wp(\alpha)k - \wp'(\alpha) = 0,$$

ассоциированную с двухзонным потенциалом Ламе (см. [5], [7], [8], [11], [12]).

Связь спектральной поверхности двухзонного потенциала Ламе

$$\chi^2 = \frac{1}{4}(z^2 - 3g_2)(4z^3 - 9g_2z + 27g_3)$$

и гиперэллиптической поверхности (3) при $s = 1$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} g_2 &= 108(b-h)^2, & g_3 &= -216(b-h)^2(b+h), & \Delta &= -2^8 3^9 (b-h)^4 b h, \\ b &= -\frac{g_3}{4g_2} + \frac{\sqrt{3g_2}}{36}, & h &= -\frac{g_3}{4g_2} - \frac{\sqrt{3g_2}}{36}, \\ E &= -h \frac{z + \sqrt{3g_2}}{z - \sqrt{3g_2}}, & w &= \frac{(g_2 \sqrt{g_2} + 3\sqrt{3}g_3)^2}{108\sqrt{3g_2}g_2(z - \sqrt{3g_2})^3} \chi. \end{aligned}$$

В переменных χ, z редукция дифференциалов будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{3z dz}{2\chi}, \\ d\Omega &= -\frac{9(g_2 z^2 + 6g_3 z - g_2^2)}{4(z^2 - 3g_2)\chi} dz. \end{aligned} \quad (4)$$

При $b = -sh$ кривая $\Gamma_2^3(1)$ переходит в кривую

$$k^3 - (s^2 + s + 1)(\wp(\alpha) - e_j)k - \frac{s(s+1)}{2}\wp'(\alpha) = 0. \quad (5)$$

Инварианты тора $\Gamma_0(2)$ при $b = -sh$ довольно просто выражаются через s и h

$$e_j = -\frac{2h}{3}(s-1)(2s+1)(s+2), \quad e_{k,l} = -\frac{e_j}{2} \pm 2h(s^2 + s + 1)^{3/2}. \quad (6)$$

Кривая (5) также может быть заменой переменных преобразована в спектральную кривую двухзонного потенциала Ламе. Чтобы убедиться в этом, введем следующие обозначения:

$$\widehat{e}_j = \frac{2s+1}{3}h^{1/3}, \quad \widehat{e}_k = -\frac{s+2}{3}h^{1/3}, \quad \widehat{e}_l = -\frac{s-1}{3}h^{1/3} \quad (7)$$

или, что тоже самое,

$$s = -\frac{\widehat{e}_j - \widehat{e}_l}{\widehat{e}_k - \widehat{e}_l}, \quad h = (\widehat{e}_l - \widehat{e}_k)^3. \quad (8)$$

Теперь, положив

$$E = sh \frac{z + 3\widehat{e}_k}{z + 3\widehat{e}_j}, \quad w = \frac{3(\widehat{e}_j - \widehat{e}_k)^2(\widehat{e}_j - \widehat{e}_l)^2(\widehat{e}_k - \widehat{e}_l)^4}{(z + 3\widehat{e}_j)^3} \chi,$$

получим

$$\chi^2 = (z + 3\hat{e}_j)(z + 3\hat{e}_k)(z + 3\hat{e}_l)(z^2 - 3\hat{g}_2), \quad (9)$$

$$d\alpha = -\frac{3dz}{2\chi}, \quad (10)$$

$$d\Omega = \frac{3(\hat{e}_k - \hat{e}_j) dz}{2(\hat{e}_k - \hat{e}_l)(z + 3\hat{e}_j)(z + 3\hat{e}_k)\chi} \left((\hat{e}_k - \hat{e}_l)(\hat{e}_j - \hat{e}_l)z^3 + \frac{3}{2}(6\hat{e}_j\hat{e}_k - \hat{g}_2)\hat{e}_l z^2 - \frac{9}{4}(7\hat{g}_2\hat{e}_j\hat{e}_k + 3\hat{g}_3\hat{e}_l + \hat{g}_2^2)z - \frac{27}{4}(3\hat{g}_3\hat{e}_j\hat{e}_k - \hat{g}_2^2\hat{e}_l) \right).$$

Сравнивая (4) и (10), видим, что редукция обоих линейно независимых голоморфных дифференциалов, определенных на спектральной поверхности двухзонного потенциала Ламе (см. [5], [7], [8], [12]), является лишь частным случаем редукции голоморфного дифференциала, связанного с эллиптическим решением уравнения СГ.

Используя формулы (6)–(8), нетрудно также получить хорошо известные (см. [5], [7], [8], [12]) соотношения

$$e_j = -\frac{9}{2}\hat{g}_3, \quad e_{k,l} = \frac{9}{4}\hat{g}_3 \pm \frac{3}{4}\hat{g}_2\sqrt{3\hat{g}_2},$$

связывающие инварианты торов Γ_0 и $\hat{\Gamma}_0$.

2. Модификация анзаца II. Двухзонное решение. Пример 1. Рассмотрим риманову поверхность Γ_g^n рода g , n -листно накрывающую эллиптическую поверхность Γ_0 (2) и удовлетворяющую следующим требованиям (анзац IIa):

1) выполнено

$$\Gamma_g^n: \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + \sum_{i=1}^n r_i(\alpha)k^{n-i} = 0,$$

где $r_i(\alpha)$ – эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma_0$ с полюсами в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = \omega_j$;

2) в окрестности $\alpha = 0$ функция $\mathcal{R}(k, \alpha)$ представима в виде ($s \neq 0$)

$$\mathcal{R}(k, \alpha) = \left(k + \frac{s + n - 1}{\alpha} + b_n(\alpha) \right) \prod_{j=1}^{n-1} \left(k - \frac{1}{\alpha} + b_j(\alpha) \right),$$

где $b_j(\alpha)$ – регулярные функции α ;

3) в окрестности $\alpha = \omega_j$

$$\mathcal{R}(k, \alpha) = \left(k - \frac{s}{\varepsilon} + \tilde{b}_n(\varepsilon) \right) \prod_{j=1}^{n-1} (k + \tilde{b}_j(\varepsilon)),$$

где $\varepsilon = \alpha - \omega_j$, $\tilde{b}_j(\varepsilon)$ – регулярные функции ε ;

4) на Γ существует инволюция $\tau: (k, \alpha) \rightarrow (-k, -\alpha)$, имеющая $2g + 2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя формулу Римана–Гурвица [13], [7], [8], нетрудно получить, что род g поверхности Γ (2), удовлетворяющей требованиям 1)–4), равен $p + 1$, где $2p$ – число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = 0$ и $\alpha = \omega_j$ и отличных от нулей функции $\partial_\alpha \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

Аназ Па отличается от аназа II [9] другим выбором мероморфной функции $k(\alpha)$ и параметра s :

$$k_{\text{new}} = \frac{1}{1 + s_{\text{old}}} \left(k_{\text{old}} + \frac{s_{\text{old}} \wp'(\alpha)}{2(\wp(\alpha) - e_j)} \right), \quad s_{\text{new}} = -\frac{ns_{\text{old}}}{1 + s_{\text{old}}}.$$

Кривая Кричевера $\tilde{\Gamma}_2^3$ для первого двухзонного 3-эллиптического решения уравнения СГ (аназ Па) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2^3 : \quad & k^3 - s \frac{\wp'(\alpha)}{2(\wp(\alpha) - e_j)} k^2 - (3 + 2s)(\wp(\alpha) - e_k)k \\ & - \frac{s + 2}{2} \wp'(\alpha) + \frac{s + 2}{2} \cdot \frac{e_k - e_j}{\wp(\alpha) - e_j} \wp'(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Каноническая форма гиперэллиптической поверхности $\tilde{\Gamma}_2^3$ определяется уравнением

$$w^2 = E(E + (2t - 1)^2(e_j - e_l))(E^3 + A_1 E^2 + B_1 E + C_1),$$

где $t = (s + 2)/(s + 3)$, $s = -(3t - 2)/(t - 1)$,

$$\begin{aligned} A_1 &= (2t - 1)(6t - 1)e_j + (6t^2 - 4t - 1)e_k, \\ B_1 &= (e_j - e_l)(2(9t^2 - 10t + 3)e_j + (9t^2 - 16t + 6)e_k), \\ C_1 &= t^4(2t - 1)^2(e_j - e_k)(e_j - e_l)^2. \end{aligned}$$

Равенства

$$\begin{aligned} \wp(\alpha) &= \frac{E^3 + A_2 E^2 + B_2 E + C_2}{(E + a)^2}, \quad k = \frac{(s + 2)w}{E(E + a)}, \\ \wp'(\alpha) &= \frac{2w(E + t(3t - 2)(e_j - e_l))(E + t^2(e_j - e_l))}{(E + a)^3}, \\ a &= t^2(2t - 1)(e_j - e_l) = \frac{(s + 1)(s + 2)^2}{(s + 3)^3}(e_j - e_l), \\ A_2 &= (2t - 1)(6t - 1)e_j + 2t(3t - 2)e_k, \\ B_2 &= (e_j - e_l)(2(9t^2 - 10t + 3)e_j + (3t - 2)^2 e_k), \\ C_2 &= t^4(2t - 1)^2 e_j(e_j - e_l)^2, \end{aligned}$$

позволяют связать различные представления кривой $\tilde{\Gamma}_2^3$.

Накрытие (11), (2) соответствует редукции следующих абелевых дифференциалов:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{E + t(2t-1)(3t-2)(e_j - e_l)}{2w} dE, \\ d\Omega &= \wp(\alpha) d\alpha + dk \\ &= \left((s+3)E^3 + \frac{s^2(e_j - e_l) + s(5e_j + 2e_k) + 3e_j}{s+3} E^2 \right. \\ &\quad - \frac{(s+1)(s+2)(e_j - e_l)(s^2(e_j - e_k) + s(3e_j - 4e_k) + 3(e_j - e_k))}{(s+3)^3} E \\ &\quad \left. + \frac{(s+1)^3(s+2)^3(e_k - e_j)(e_j - e_l)^2}{(s+3)^5} \right) \frac{dE}{2Ew}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из формул, описывающих покрытие, параметр s не может принимать некоторое конечное число значений ($s \neq -1, -2, -3$). Каждый из таких случаев нуждается в индивидуальном рассмотрении. Однако, эти равенства допускают значение $s = 0$, запрещенное самим определением анзаца. Это доказывает, что для описания всех двоякопериодических решений уравнения СГ двух анзацев недостаточно. Определение новых классов эллиптических решений уравнения СГ будет дано в отдельной работе, здесь же мы рассмотрим конкретную кривую Γ из анзаца III:

$$k^3 - 3(\wp(\alpha) - e_k)k - \frac{\wp(\alpha) - e_k}{\wp(\alpha) - e_j} \wp'(\alpha) = 0, \quad (13)$$

получающуюся из кривой $\tilde{\Gamma}_2^3$ предельным переходом $s \rightarrow 0$.

Равенства

$$\begin{aligned} E &= \frac{2(e_j - e_l)\sqrt{3\hat{g}_2}}{9(z - \sqrt{3\hat{g}_2})}, \\ e_l &= -\frac{9}{2}\hat{g}_3, \quad e_j = \frac{9}{4}\hat{g}_3 + \frac{3}{4}\hat{g}_2\sqrt{3\hat{g}_2}, \quad e_k = \frac{9}{4}\hat{g}_3 - \frac{3}{4}\hat{g}_2\sqrt{3\hat{g}_2}, \end{aligned}$$

позволяют легко убедиться, что кривая (13) эквивалентна спектральной кривой (9) двухзонного потенциала Ламе. Дифференциал $d\Omega$ (12) имеет полюса в точках $z = 0$ и $z = \sqrt{3\hat{g}_2}$.

Зафиксировав в уравнении (11) параметр $s = -3/2$, мы получим кривую Кричевера

$$\Gamma: \quad k^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\wp'(\alpha)}{\wp(\alpha) - e_j} k^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\wp(\alpha) - e_k}{\wp(\alpha) - e_j} \wp'(\alpha) = 0,$$

которая удовлетворяет условиям анзаца IIa и эквивалентна спектральной кривой (9),

$$\begin{aligned} E &= \frac{(e_l - e_j)}{9} \cdot \frac{z + \sqrt{3\hat{g}_2}}{z - \sqrt{3\hat{g}_2}}, \\ e_j &= -\frac{9}{2}\hat{g}_3, \quad e_l = \frac{9}{4}\hat{g}_3 + \frac{3}{4}\hat{g}_2\sqrt{3\hat{g}_2}, \quad e_k = \frac{9}{4}\hat{g}_3 - \frac{3}{4}\hat{g}_2\sqrt{3\hat{g}_2}. \end{aligned}$$

Абелев дифференциал второго рода $d\Omega$ (12) имеет полюса в точках $z = \pm\sqrt{3\hat{g}_2}$.

3. Анзац Па. Двухзонное решение. Пример 2. Кривая Кричевера второго двухзонного эллиптического (анзац Па) решения определяется уравнением

$$\widehat{\Gamma}_2^3: \quad k^3 - \frac{s\wp'(\alpha)}{2(\wp(\alpha) - e_j)}k^2 - (3 + 2s)(\wp(\alpha) - H)k - \frac{s + 2}{2}\wp'(\alpha) = 0, \quad (14)$$

где

$$H = aq^4 \frac{(t-2)(t^2-4t+6)}{3(q-t+1)(q+t-1)(t-1)(t-3)} - 2aq^2 \frac{t(t^3-5t^2+12t-9)}{3(q-t+1)(q+t-1)(t-3)} + a \frac{t^3(t-1)^2}{3(q-t+1)(q+t-1)},$$

a, q, t – параметры,

$$e_j = -2a \frac{q^4(t-2) - q^2t(2t^2-4t+3) + t^3(t-1)^2}{3(q-t+1)(q+t-1)},$$

$$e_k - e_l = -\frac{4aq^3}{(q-t+1)(q+t-1)}, \quad s = -\frac{2t-3}{t-1}.$$

Сделав замену переменных

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \omega_j, \quad k = \tilde{k} + \frac{\wp'(\tilde{\alpha})}{2(\wp(\tilde{\alpha}) - e_j)}, \quad s = -\tilde{s} - 3,$$

мы получим второе уравнение, также удовлетворяющее условиям анзаца Па, для той же самой кривой $\widehat{\Gamma}_2^3$ (14):

$$\widehat{\Gamma}_2^3: \quad \tilde{k}^3 - \frac{\tilde{s}\wp'(\tilde{\alpha})}{2(\wp(\tilde{\alpha}) - e_j)}\tilde{k}^2 - (3 + 2\tilde{s})(\wp(\tilde{\alpha}) + H + e_j)\tilde{k} - \frac{\wp'(\tilde{\alpha})}{2(\wp(\tilde{\alpha}) - e_j)}((\tilde{s} + 2)\wp(\tilde{\alpha}) + (3 + 2\tilde{s})H + e_j) = 0.$$

Каноническая форма гиперэллиптической поверхности $\widehat{\Gamma}_2^3$ имеет вид

$$w^2 = E(E - E_1)(E - E_2)(E^2 + A_1E + B_1),$$

где

$$E_1 = a \frac{q(t-2) - t(t-1)}{q+t-1}, \quad E_2 = a \frac{q(t-2) + t(t-1)}{q-t+1},$$

$$A_1 = a(q^2(t-2) - t(t^2-3)), \quad B_1 = a^2(2t-3)(q^2-t^2).$$

Равенства

$$\begin{aligned}\wp(\alpha) &= \frac{E^3 + A_2 E^2 + B_2 E + C_2}{(E + a)^2}, \quad k = \frac{(s + 2)w}{E(E + a)}, \\ \wp'(\alpha) &= \frac{2w(E + a(t + q))(E + a(t - q))}{(E + a)^3}, \\ A_2 &= a \frac{q^4(t - 2) - 2q^2(t^3 - 2t^2 - 3) + t(t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 18t - 9)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)}, \\ B_2 &= a^2 \frac{q^4(2t - 1) - q^2(4t^3 - 14t^2 + 12t - 9) + t^2(2t^3 - 13t^2 + 20t - 9)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)}, \\ C_2 &= -2a^3 \frac{q^4(t - 2) - q^2t(2t^2 - 4t + 3) + t^3(t - 1)^2}{3(q - t + 1)(q + t - 1)},\end{aligned}$$

позволяют переходить от одного представления кривой $\widehat{\Gamma}_2^3$ к другому.

Редукция абелевых дифференциалов описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}d\alpha &= \frac{E + (3 - 2t)a}{2w} dE, \\ d\Omega &= \wp(\alpha) d\alpha + dk = \left(\frac{t}{t - 1} E^3 + A_3 E^2 + B_3 E + C_3 \right) \frac{dE}{2Ew}, \quad (15) \\ A_3 &= aq^4 \frac{(t - 2)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)} \\ &\quad - aq^2 \frac{(t - 2)(2t^3 - 2t^2 + 6t - 3)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)(t - 1)} + a \frac{t^2(t - 1)(t^2 - t - 3)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)}, \\ B_3 &= -a^2 q^4 \frac{(t - 2)(t - 4)(2t - 3)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)(t - 1)} \\ &\quad + a^2 q^2 \frac{t(t - 2)(2t - 3)(2t^2 - 2t - 3)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)(t - 1)} - a^2 \frac{t^3(t - 1)(t + 2)(2t - 3)}{3(q - t + 1)(q + t - 1)}, \\ C_3 &= -a^3 q^4 \frac{(t - 2)^2(2t - 3)}{(q - t + 1)(q + t - 1)(t - 1)} \\ &\quad + a^3 q^2 \frac{t^2(2t - 3)(2t^2 - 6t + 5)}{(q - t + 1)(q + t - 1)(t - 1)} - a^3 \frac{t^4(t - 1)(2t - 3)}{(q - t + 1)(q + t - 1)}.\end{aligned}$$

Кривая $\widehat{\Gamma}_2^3$ (14) при $q = 3(t - 1)$ или, что то же самое, при $H = e_l$ будет эквивалентна спектральной кривой (9) двухзонного потенциала Ламе

$$\begin{aligned}E &= a \frac{(2t - 3)z + t\sqrt{3\widehat{g}_2}}{z - \sqrt{3\widehat{g}_2}}, \quad e_k = -\frac{9}{2}\widehat{g}_3 = \frac{a}{3}t(8t^2 - 36t + 27), \\ e_j &= \frac{9}{4}\widehat{g}_3 - \frac{3}{4}\widehat{g}_2\sqrt{3\widehat{g}_2} = -\frac{a}{6}(32t^3 - 144t^2 + 189t - 81), \\ e_l &= \frac{9}{4}\widehat{g}_3 + \frac{3}{4}\widehat{g}_2\sqrt{3\widehat{g}_2} = \frac{a}{6}(16t^3 - 72t^2 + 135t - 81).\end{aligned}$$

Абелев дифференциал $d\Omega$ (15) будет иметь особенности в точках $z = -3\widehat{e}_j$ и $z = \sqrt{3\widehat{g}_2}$.

4. Анзац Па. Трехзонное решение. Кривая Кривевера $\Gamma = \{(k, \alpha)\}$ трехзонного 3-эллиптического решения уравнения СГ имеет вид

$$\Gamma_3^3: k^3 - \frac{s\wp'(\alpha)}{2(\wp(\alpha) - e_j)}k^2 - ((3 + 2s)\wp(\alpha) + se_j)k - \frac{s+2}{2}\wp'(\alpha) = 0. \quad (16)$$

Каноническая форма гиперэллиптической поверхности Γ_3^3 определяется уравнением

$$w^2 = E(E - E_1)(E - E_2)(E^2 + A_1E + B_1)(E^2 + C_1E + D_1), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{s+1}{s+3}(e_j - e_l), & E_2 &= -\frac{s+1}{s+3}(e_j - e_k), \\ A_1 &= 3\frac{s+1}{s+3}e_j, & B_1 &= \frac{s(s+2)}{(s+3)^2}H_j^2, \\ C_1 &= 3\left(\frac{s+2}{s+3}\right)^2 e_j, & D_1 &= \frac{(s+1)(s+2)^2}{(s+3)^3}H_j^2, & H_j^2 &= (e_j - e_k)(e_j - e_l). \end{aligned}$$

Связь между различными представлениями поверхности Γ_3^3 осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{s+3}\left(k^2 - \frac{s\wp'(\alpha)}{2(\wp(\alpha) - e_j)}k - (s+1)\wp(\alpha)\right) - 2e_j, \\ \wp(\alpha) &= \frac{E^3 + A_2E^2 + B_2E + C_2}{E^2 + C_1E + D_1}, & k &= \frac{2w}{E(E^2 + C_1E + D_1)}, \\ \wp'(\alpha) &= \frac{2w(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)}{(E^2 + C_1E + D_1)^2}, & \varepsilon_1 &= -\frac{s+2}{s+3}(e_j - e_k), & \varepsilon_2 &= -\frac{s+2}{s+3}(e_j - e_l), \\ A_2 &= 2\frac{2s+3}{s+3}e_j, & C_2 &= \frac{(s+1)(s+2)^2}{(s+3)^2}e_jH_j^2, & B_2 &= \frac{s(s+2)}{(s+3)^2}H_j^2 + 3\left(\frac{s+2}{s+3}\right)^2 e_j^2. \end{aligned}$$

Накрытие (16), (2) соответствует редукции голоморфного дифференциала

$$d\alpha = \left(E^2 + 3\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)^2}e_jE + \frac{s(s+1)(s+2)}{(s+3)^3}H_j^2\right)\frac{dE}{2w} \quad (18)$$

и абелева дифференциала второго рода с простыми полюсами в точках $P_0 = (0, 0)$ и $P_\infty = (\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} d\Omega &= \wp(\alpha) d\alpha + dk \\ &= \left((s+3)E^4 + (3s+4)e_jE^3 + \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)^2}(H_j^2 + 3e_j^2)E^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{s(s+1)(s+2)(3s+5)}{(s+3)^3}e_jH_j^2E - \frac{s(s+1)^2(s+2)^2}{(s+3)^4}H_j^4\right)\frac{dE}{2Ew}. \end{aligned} \quad (19)$$

Положив $s = -3/2$ и сделав замены

$$E = \frac{H_j}{3}z, \quad w = \frac{H_j^3 \sqrt{3H_j}}{81}\chi, \quad e_j = aH_j,$$

мы получим, как частный случай, трехлистную поверхность рода 3, описанную в примере 3 работы [9].

В новых переменных уравнения (17)–(19) примут вид

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{z}{3}(z^2 - 3az + 1)(z^2 - 3az - 3)(3z^2 + 3az - 1), \\ d\alpha &= \sqrt{\frac{3}{H_j}}(z^2 - az + 1)\frac{dz}{2\chi}, \\ d\Omega &= \frac{\sqrt{3H_j}}{4}\left(z^4 - az^3 - \frac{2}{3}(3a^2 + 1)z^2 - az + 1\right)\frac{dz}{z\chi}. \end{aligned}$$

5. Заключительные замечания. Приведенные в этой работе примеры показали, что по кривой, ассоциированной с двухзонным потенциалом Ламе, можно построить множество эллиптических решений уравнения СГ. Особенности абелева дифференциала второго рода $d\Omega$, определенного на этой кривой, могут находиться в любой паре точек ветвления. Двойкопериодичность решения может быть связана с редукцией одного из двух линейно независимых голоморфных дифференциалов (4), (10). Эти примеры иллюстрируют более общее утверждение, доказательство которого приведено в [14].

ТЕОРЕМА [14]. *По почти любой алгебраической кривой Γ рода 2, накрывающей эллиптическую, и любой паре точек ветвления на ней можно построить два разных эллиптических решения уравнения СГ.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каждому редуцируемому голоморфному дифференциалу и каждой паре точек соответствует одно эллиптическое решение. Всего, таким образом, по одной кривой рода 2 может быть построено шестьдесят различных эллиптических решений уравнения СГ.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существуют некоторые значения параметров кривой Γ_2^n , при которых существует только один редуцируемый абелев дифференциал второго рода с особенностями в заданной паре точек ветвления. В этом случае второй редуцируемый дифференциал второго рода будет иметь полюс только в одной из этих точек и, следовательно, Γ_2^n будет эквивалентна спектральной кривой одного из эллиптических двухзонных потенциалов оператора Шрёдингера [11], [15]–[20].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Costabile G., Parmentier R. D., Savo B., McLaughlin D. W., Scott A. C. Exact solutions of the sine-Gordon equation describing oscillations in a long (but finite) Josephson junction // Appl. Phys. Lett. 1978. V. 32. P. 587–589.
- [2] Pełka J., Zagrodoński J. Phenomenological electrodynamics of the Josephson junction // Phys. B. 1989. V. 154. P. 125–139.

- [3] Бобенко А. И. Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 3–42.
- [4] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
- [5] Белоколотос Е. Д., Энольский В. З. Обобщенный анзац Лэмба // ТМФ. 1982. Т. 53. № 2. С. 271–282.
- [6] Бобенко А. И. О периодических конечнозонных решениях уравнения “sine-Gordon” // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 3. С. 74–75.
- [7] Белоколотос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // УМН. 1986. Т. 41. № 2. С. 3–42.
- [8] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations. Springer Ser. Nonlinear Dynam. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1994.
- [9] Смирнов А. О. Вещественные эллиптические решения уравнения “sine-Gordon” // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 6. С. 804–812.
- [10] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения “sine-Gordon” // Функцион. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 27–43.
- [11] Смирнов А. О. Эллиптические решения уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 6. С. 66–73.
- [12] Итс А. Р., Энольский В. З. О динамике системы Калоджеро–Мозера и редукции гиперэллиптических интегралов к эллиптическим интегралам // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 1. С. 73–74.
- [13] Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903.
- [14] Смирнов А. О. Двухзонные эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 86–97.
- [15] Белоколотос Е. Д., Энольский В. З. Эллиптические солитоны Вердье и теория редукции Вейерштрасса // Функцион. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. № 1. С. 57–58.
- [16] Белоколотос Е. Д., Энольский В. З. Изоспектральные деформации эллиптических потенциалов // УМН. 1989. Т. 44. № 5. С. 155–156.
- [17] Смирнов А. О. Эллиптические по t решения уравнения КдФ // ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 183–198.
- [18] Smirnov A. O. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 125–166.
- [19] Enol'skii V. Z., Kostov N. A. On the geometry of elliptic solitons // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 57–86.
- [20] Belokolos E. D., Enol'skii V. Z. Reduction of the functions and elliptic finite-gap potentials // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 87–117.

Санкт-Петербургская государственная академия
аэрокосмического приборостроения
E-mail: smirnov@as.stoic.spb.su

Поступило
22.01.96