Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Поверхности Дель Пеццо с иррациональными особенностями, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 451–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:26:09

УДК 512.774.42

ПОВЕРХНОСТИ ДЕЛЬ ПЕЦЦО С НЕРАЦИОНАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

И. А. Чельцов

В данной работе классифицируются нормальные алгебраические поверхности X с $\mathrm{rk}(\mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$ и численно обильным каноническим классом, имеющие нерациональные особенности. В частности, доказывается, что все такие поверхности X есть стягивание “исключительного” сечения на возможно особой “относительно минимальной” линейчатой поверхности $\tilde{X}$ с нерациональной базой. Более того, $\tilde{X}$ однозначно определяется исходной поверхностью X .

Библиография: 6 названий.

Введение. Работы Ф. Сакая естественным образом переносят вопросы классификации алгебраических поверхностей в категорию нормальных алгебраических поверхностей. На таких поверхностях можно формально определить численный обратный образ дивизора Вейля, который обладает хорошими функториальными свойствами и позволяет построить пересечения $\mathbb{Q}$ -дивизоров Вейля над $\mathbb{Q}$ (см. [1]). Численные поверхности Дель Пеццо и “относительно минимальные” линейчатые поверхности играют в классификации Ф. Сакая ту же роль, что и гладкие поверхности с размерностью Кодаиры — ∞ в классификации гладких алгебраических поверхностей.

Заметим, что в работе [2] был классифицирован более узкий класс поверхностей Дель Пеццо с нерациональными особенностями.

Предполагается, что все рассматриваемые поверхности нормальные, комплексные и алгебраические. Автор очень признателен В. А. Исковских, Ю. Г. Прохорову за плодотворные обсуждения и интересные беседы.

1. Линейчатые поверхности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{X}$ — гладкая поверхность, $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ — сюръективный морфизм на гладкую кривую C такой, что каждый слой морфизма $\tilde{\pi}$ изоморфен $\mathbb{P}^1$. Тогда

- 1) $\tilde{X} \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 2 такой, что $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ и $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = 0$ для любого $\mathcal{F} \in \mathrm{Pic}(\tilde{X})$, $\deg(\mathcal{F}) < 0$;
- 2) $e = -\deg(\mathcal{E})$ является инвариантом поверхности $\tilde{X}$;
- 3) существует сечение C_0 линейчатой поверхности $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ такое, что $C_0^2 = -e$;
- 4) $\mathrm{Pic}(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}C_0 \oplus \tilde{\pi}^* \mathrm{Pic}(C)$;

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант № 90300.

- 5) $K_{\tilde{X}} \sim -2C_0 + \tilde{\pi}^*(K_C + \wedge^2 \mathcal{E})$, в частности, $K_{\tilde{X}} \equiv -2C_0 + (2g(C) - 2 - e)F$, где F – слой морфизма $\tilde{\pi}$;
 6) если $e > 2g(C) - 2$, то пучок $\mathcal{E}$ разложим;
 7) $C_\lambda^2 \geq -e$ для любого сечения C_λ линейчатой поверхности $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$.

Доказательство см. в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поверхность $\hat{X}$ называется *линейчатой*, если существует сюръективный морфизм $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$ на кривую C такой, что общий слой морфизма $\hat{\pi}$ изоморфен $\mathbb{P}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В определении 1 кривая C будет гладкой в силу нормальности поверхности $\hat{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейчатая поверхность $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ называется *относительно минимальной*, если каждый слой морфизма $\tilde{\pi}$ неприводим, но возможно приведен.

ЛЕММА 1. Для каждой линейчатой поверхности $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\rho} & \tilde{X} \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ C & \cong & C \end{array}$$

такая, что морфизм $\rho: \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ бирационален, а $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ есть относительно минимальная линейчатая поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – приводимый слой морфизма $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$, тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i \right)^2 \leq 0, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i \right)^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i = \lambda F,$$

где F_i – компоненты слоя F и $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{Q}$ (см. [4]). Значит, для любого собственного подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ форма пересечения дивизоров F_{i_j} ($j = 1, \dots, k$) отрицательно определена, следовательно, дивизоры F_{i_j} ($j = 1, \dots, k$) могут быть стянуты (см. [1]). Отсюда непосредственно получаем необходимый результат.

ЛЕММА 2. Относительно минимальной линейчатой поверхности $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ с сечением C_0 можно канонически сопоставить гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность $\tilde{\pi}^s: \tilde{X}^s \rightarrow C$ такую, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}^s \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi}^s \\ C & \cong & C \end{array},$$

где φ – бирациональный морфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{X} & \\
 p \swarrow & & \searrow q \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{\quad \quad} & \tilde{X}^s \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi^s \\
 & C &
 \end{array} \quad , \quad (1)$$

где $\hat{X}$ – минимальное разрешение особенностей $\tilde{X}$, а $\tilde{X}^s$ – гладкая относительно минимальная над C модель $\hat{X}$. Нужно показать, что можно канонически выбрать морфизм q . В слоях морфизма p нет (-1) -кривых, но поверхность $\tilde{\pi} \circ p: \hat{X} \rightarrow C$ не относительно минимальная, следовательно, в каждом приводимом слое морфизма $\tilde{\pi} \circ p$ лежит ровно одна (-1) -кривая, являющаяся собственным прообразом соответствующего слоя морфизма $\tilde{\pi}$. Выберем q так, чтобы $q = q_1 \circ \dots \circ q_K$ для некоторого $K \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ (если $K = 0$, то $\hat{X} \cong \tilde{X} \cong \tilde{X}^s$), где

- 1) морфизм $q_i: \hat{X}^i \rightarrow \hat{X}^{i-1}$ ($\hat{X}^K = \hat{X}$ и $\hat{X}^0 = \tilde{X}^s$) есть композиция раздутий в слое морфизма $\tilde{\pi} \circ q_1 \circ \dots \circ q_{i-1}$ над точкой $x_i \in C$ для $i = 1, \dots, K$ и попарно различных x_i ;
- 2) $q_i^*(q_i \circ \dots \circ q_K(p^{-1}(C_0))) \neq q_i^{-1}(q_i \circ \dots \circ q_K(p^{-1}(C_0)))$ для $i = 1, \dots, K$.

Легко видеть, что условиями 1)–2) морфизм q определяется однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства леммы 2 следует легкий алгоритм построения всех относительно минимальных линейчатых поверхностей. Достаточно взять гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность и с некоторыми слоями сделать следующую перестройку:

- 1) раздуть точку на слое;
- 2) раздуть точку пересечения раздутой кривой и собственного прообраза слоя (двух (-1) -кривых);
- 3) последовательно делать раздутия точки на текущей (-1) -кривой так, чтобы в слое была только одна (-1) -кривая;
- 4) стянуть все кривые в слое за исключением единственной (-1) -кривой.

Заметим, что неоднозначность обратного перехода от особой поверхности к гладкой состоит в том, что при первом раздутии точки в слое неособой линейчатой поверхности появляются две (-1) -кривые.

ТЕОРЕМА 2. Если $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ – относительно минимальная линейчатая поверхность, то

- 1) $\tilde{X}$ – проективная поверхность;
- 2) $\tilde{X}$ имеет не более чем рациональные особенности;
- 3) $R^1\tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$;
- 4) все слои с приведенной структурой гладкие и изоморфны $\mathbb{P}^1$;
- 5) $\text{rk}(\text{Div}(\tilde{X}) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) См. [5].

2) Рассмотрим коммутативную диаграмму (1), где морфизм p – минимальное разрешение особенностей $\tilde{X}$, а q – бирациональный морфизм на относительно минимальную гладкую линейчатую поверхность $\tilde{\pi}^s: \tilde{X}^s \rightarrow C$. Известно, что

$$R^1\tilde{\pi}_*(\theta_{\tilde{X}^s}) = 0, \quad R^0\tilde{\pi}_*(\theta_{\tilde{X}^s}) = \theta_C$$

и

$$R^1q_*(\theta_{\hat{X}}) = 0, \quad R^0q_*(\theta_{\hat{X}}) = \theta_{\tilde{X}^s}.$$

Из спектральной последовательности Лере следует, что

$$R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\theta_{\hat{X}}) = 0, \quad R^0(\tilde{\pi} \circ p)_*(\theta_{\hat{X}}) = \theta_C.$$

Пусть $F = \sum_{i=1}^n a_i F_i$, где F_i – неприводимые компоненты слоя F и $a_i \in \mathbb{N}$. Тогда $R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\theta_{\hat{X}}) = 0$ влечет $H^1(\theta_F) = 0$. Действительно, пусть $\mathcal{I}_F$ – пучок идеалов схемы F , тогда из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_F \rightarrow \theta_{\hat{X}} \rightarrow \theta_F \rightarrow 0$$

следует точная последовательность

$$\begin{array}{ccc} 0 & & H^1(\theta_F) \\ \parallel & & \parallel \\ R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\theta_{\hat{X}}) & \longrightarrow & R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\theta_F) \longrightarrow R^2(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{I}_F) \end{array},$$

но $R^2(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{I}_F) = 0$ из соображений размерности. Отсюда следует рациональность особенностей $\tilde{X}$ (см. [6]) и рациональность особенностей любой поверхности, полученной из $\hat{X}$ стягиванием компонент слоев морфизма $\tilde{\pi} \circ p$.

3) Как доказано выше, особенности $\tilde{X}$ рациональные, т.е. в обозначениях 2) имеем

$$R^1p_*(\theta_{\hat{X}}) = 0 \quad \text{и} \quad R^0p_*(\theta_{\hat{X}}) = \theta_{\tilde{X}}.$$

Спектральная последовательность Лере влечет

$$R^1\tilde{\pi}_*(\theta_{\tilde{X}}) = 0 \quad \text{и} \quad R^0\tilde{\pi}_*(\theta_{\tilde{X}}) = \theta_C.$$

4) Из рассуждений в 2), 3) следует, что если F – приведенный слой морфизма $\tilde{\pi}$, то $H^1(\theta_F) = 0$ и $F \cong \mathbb{P}^1$.

Заметим, что согласно замечанию 2 можно найти фундаментальные циклы (см. [6]) особенностей поверхности $\tilde{X}$. Пересечение единственной (-1) -кривой в данном приводимом слое морфизма $\tilde{\pi} \circ p$ с соответствующими фундаментальными циклами равно единице, откуда следует утверждение 4) (см. [6]).

5) См. [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства теоремы 2 следует, что особенности линейчатой поверхности рациональны.

2. Численные поверхности Дель Пеццо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дивизор Вейля D на поверхности X называется *численно обильным*, если для каждой кривой $C \in X$ выполнено неравенство $DC > 0$ и $D^2 > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Поверхность X называется *численной поверхностью Дель Пеццо*, если $-K_X$ есть численно обильный дивизор Вейля.

ЛЕММА 3. Пусть X есть численная поверхность Дель Пеццо, тогда

- 1) $H^i(\mathcal{O}_X) = 0$ для $i = 1, 2$;
- 2) X есть проективная поверхность.

Доказательство 1) см. в [1], 2) – в [5].

ЛЕММА 4. Пусть X есть численная поверхность Дель Пеццо, $f: \hat{X} \rightarrow X$ – разрешение особенностей поверхности X . Тогда

- 1) $H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \cong H^0(R^1 f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}))$ и $H^2(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0$;
- 2) $\text{kod}(\hat{X}) = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Учитывая лемму 3, нормальность X и спектральную последовательность Лере, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{O}_X) = 0 & & & & H^2(\mathcal{O}_X) = 0 & & \\ \parallel & & & & \parallel & & \\ 0 \longrightarrow H^1(R^0 f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \longrightarrow H^0(R^1 f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) \longrightarrow H^2(R^0 f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) & & & & & & \\ & & & & \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \longrightarrow 0 & & \end{array},$$

откуда следует необходимое утверждение.

2) Если существует эффективный дивизор $D \in |K_{\hat{X}}|$, то $K_X = f_*(D)$, что невозможно, так как $-D$ есть численно обильный дивизор на проективной поверхности (лемма 3).

СЛЕДСТВИЕ. Численная поверхность Дель Пеццо рациональна тогда и только тогда, когда ее особенности рациональны.

3. Численные поверхности Дель Пеццо с нерациональными особенностями.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – численная поверхность Дель Пеццо с нерациональными особенностями, а $f: \hat{X} \rightarrow X$ – ее минимальное разрешение особенностей. Тогда

- 1) существует морфизм π такой, что $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$ есть линейчатая поверхность и $g(C) = H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \neq 0$;
- 2) морфизм f стягивает одну гладкую кривую E , не лежащую в слоях морфизма $\hat{\pi}$, более того, E является сечением морфизма $\hat{\pi}$;
- 3) для любой относительно минимальной над C модели $\tilde{\pi}^s: \tilde{X}^s \rightarrow C$ линейчатой поверхности $\tilde{X}$ выполнено

$$\hat{\pi} = \tilde{\pi}^s \circ \rho, \quad \tilde{X}^s \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E}), \quad e > 2g(C) - 2, \quad \rho(E)^2 = -e,$$

где $\mathcal{E}$ – разложимый локально свободный пучок ранга 2, а e – инвариант $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение непосредственное вытекает из леммы 4 и следствия.

2) Заметим, что морфизм f должен стягивать хотя бы одну кривую, не лежащую в слоях морфизма $\hat{\pi}$, так как иначе по замечанию 3 особенности X были бы рациональные. Пусть E_j ($j = 1, \dots, k$) — неприводимые приведенные кривые, не лежащие в слоях морфизма $\hat{\pi}$ и стягиваемые морфизмом f . Тогда

$$K_{\hat{X}} \equiv f^*(K_X) - \sum_{i=1}^n a_i F_i - \sum_{j=1}^k b_j E_j,$$

где F_i — исключительные кривые морфизма f , лежащие в слоях морфизма $\hat{\pi}$; $a_i, b_j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, k$. По формуле присоединения для кривой E_r ($r \in \{1, \dots, k\}$)

$$(K_{\hat{X}} + E_r)E_r \geq 2g(\tilde{E}_r) - 2,$$

где $\tilde{E}_r$ — нормализация кривой $\tilde{E}_r$. По формуле Гурвица

$$2g(\tilde{E}_r) - 2 \geq 2g(C) - 2 \geq 0,$$

и следовательно,

$$(1 - b_r)E_r^2 \geq \left(- \sum_{i=1}^n a_i F_i - \sum_{j=1, j \neq r}^k b_j E_j - (b_r - 1)E_r \right) E_r \geq 0.$$

Таким образом, все $b_j \geq 1$. Если L есть слой морфизма $\hat{\pi}$, то

$$-2 = K_{\hat{X}}L = \left(f^*(K_X) - \sum_{i=1}^n a_i F_i - \sum_{j=1}^k b_j E_j \right) L < \left(- \sum_{j=1}^k b_j E_j \right) L,$$

следовательно, $k = 1$, $b = b_1 < 2$, $E = E_1 \cong \tilde{E}_1$ есть сечение линейчатой поверхности $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$.

3) Возьмем сечение C_0 линейчатой поверхности $\tilde{\pi}^s: \tilde{X}^s \rightarrow C$ такое, что $C_0^2 = -e$. Тогда

$$\rho(E) \equiv C_0 + dF,$$

где F есть слой морфизма $\tilde{\pi}^s$ и $d \in \mathbb{N}$ по теореме 1. В обозначениях 2) имеем

$$\rho\left(\sum_{i=1}^n a_i F_i\right) \equiv aF$$

и

$$K_{\tilde{X}^s} + \rho\left(\sum_{i=1}^n a_i F_i + bE\right) \equiv (b - 2)C_0 + (2g(C) - 2 - e + a + db)F,$$

где $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Если $C_0 \neq \rho(E)$, то $\rho(E)C_0 = d - e \geq 0$ и

$$\begin{aligned} bd - be + 2g(C) - 2 + e + a &= \left(K_{\tilde{X}^s} + \rho \left(\sum_{i=1}^n a_i F_i + bE \right) \right) C_0 \\ &= \left(K_{\hat{X}} + \sum_{i=1}^n a_i F_i + bE \right) \rho^*(C_0) = f^*(K_X) \rho^*(C_0) < 0. \end{aligned}$$

Но если $e \geq 0$, то

$$bd - be + 2g(C) - 2 + e + a > b(d - e) \geq 0.$$

Если $e < 0$, то

$$bd - be + 2g(C) - 2 + e + a > e(1 - b) \geq 0.$$

Значит, $C_0 = \rho(E)$. Аналогично,

$$\begin{aligned} be + 2g(C) - 2 + e + a &= \left(K_{\tilde{X}^s} + \rho \left(\sum_{i=1}^n a_i F_i + bE \right) \right) C_0 \\ &= \left(K_{\hat{X}} + \sum_{i=1}^n a_i F_i + bE \right) \rho^*(C_0) = f^*(K_X) \rho^*(C_0). \end{aligned}$$

Заметим, что если $\rho^{-1}(C_0) \neq \rho^*(C_0)$, то $f^*(K_X) \rho^*(C_0) < 0$, поскольку в этом случае $\rho^*(C_0)$ содержит (-1) -кривую, которая не может быть стянута морфизмом f . Если $C_0^2 = -e \geq 0$, то $\rho^{-1}(C_0) \neq \rho^*(C_0)$ и

$$0 > f^*(K_X) \rho^*(C_0) = (1 - b)e + 2g(C) - 2 + a \geq 0.$$

Следовательно, $e > 0$ и

$$0 > f^*(K_X) \rho^*(C_0) = (1 - b)e + 2g(C) - 2 + a \geq -e + 2g(C) - 2,$$

откуда по теореме 1 получаем, что пучок $\mathcal{E}$ разложим.

ТЕОРЕМА 4. *В условиях теоремы 3 пусть $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$. Тогда X есть стягивание сечения относительно минимальной линейчатой поверхности $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ и $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = g(C) > 0$. Более того, поверхность $\tilde{X}$ определяется поверхностью X единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: \hat{X} \rightarrow X$ есть минимальное разрешение особенностей X . Тогда по теореме 3 $\hat{X}$ есть линейчатая поверхность $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$ такая, что $g(C) > 0$, f стягивает одно сечение и компоненты приводимых слоев морфизма $\hat{\pi}$. Пусть

$$F^\lambda = \sum_{i=1}^{j_\lambda} a_i F_i^\lambda \quad (\lambda = 1, \dots, N, \quad a_i \in \mathbb{N})$$

— приводимые слои морфизма $\hat{\pi}$. Тогда

$$\text{rk}(\text{Div}(\hat{X}) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 2 + \sum_{\lambda=1}^N (j_\lambda - 1).$$

С другой стороны,

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Div}(\widehat{X}) \otimes \mathbb{Q}/\cong) = 1 + \text{число кривых, стягиваемых морфизмом } f.$$

Следовательно, морфизм f не стягивает только одну компоненту каждого приводимого слоя, и существует следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \xrightarrow{p} & \widetilde{X} \xrightarrow{g} X \\ \widehat{\pi} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ C & \cong & C \end{array},$$

где $f = g \circ p$, $\widetilde{\pi}: \widetilde{X} \rightarrow C$ — относительно минимальная линейчатая поверхность, и морфизм g стягивает ее сечение.

Так как $h^1(\theta_{\widehat{X}}) = g(C)$ и по теореме 2 особенности $\widetilde{X}$ рациональны, то из спектральной последовательности Лере следует, что $h^1(\theta_{\widetilde{X}}) = g(C) > 0$.

Единственность поверхности $\widetilde{X}$ следует из ее построения.

ТЕОРЕМА 5. При выполнении условий теоремы 4 поверхности X можно канонически сопоставить гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность $\widetilde{\pi}^s: \widetilde{X}^s \rightarrow C$ такую, что $\widetilde{X}^s \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 2, $e > 2g(C) - 2$, пучок $\mathcal{E}$ разложим и $q(p^{-1}(E))^2 = -e$, где e — инвариант линейчатой поверхности $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$.

Доказательство теоремы следует из теорем 3, 4 и леммы 2.

4. Конструкция. Пусть дана пара $(\widehat{\pi}: \widehat{X} \rightarrow C, C_0)$, где $\widehat{\pi}: \widehat{X} \rightarrow C$ — гладкая линейчатая поверхность и C_0 — ее сечение. Скажем, что пара $(\widehat{\pi}': \widehat{X}' \rightarrow C, C'_0)$ получена элементарным преобразованием φ над точкой $x \in C$ из пары $(\widehat{\pi}: \widehat{X} \rightarrow C, C_0)$, если дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}' & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{X} \\ \widehat{\pi}' \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi} \\ C & \cong & C \end{array}$$

такая, что

- 1) $\widehat{\pi}': \widehat{X}' \rightarrow C$ — гладкая линейчатая поверхность;
- 2) φ — бирациональный морфизм, причем φ есть композиция раздутий в слое морфизма $\widehat{\pi}$ над точкой $x \in C$;
- 3) слой морфизма $\widehat{\pi}$ над точкой $x \in C$ неприводим;
- 4) в слое морфизма $\widehat{\pi}'$ над x лежит ровно одна (-1) -кривая;
- 5) $C'_0 = \varphi^{-1}(C_0)$ и $\varphi^*(C_0) \neq C'_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Последовательность пар целых чисел (α_i^1, α_i^2) для $i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ обладает свойством $(*)$, если

- 1) $(\alpha_3^1, \alpha_3^2) = (1, 1)$;
- 2) для $i \geq 4$

$$(\alpha_i^1, \alpha_i^2) = \begin{cases} (\alpha_{i-1}^1, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2), & \text{либо} \\ (\alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2, \alpha_{i-1}^2), & \text{либо} \\ (0, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2). \end{cases}$$

Пусть пара $(\hat{\pi}': \hat{X}' \rightarrow C, C'_0)$ получена элементарным преобразованием φ над точкой $x \in C$ из пары $(\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C, C_0)$. Введем следующие обозначения:

- 1) $\hat{X}_0 = \hat{X}$, $\hat{\pi}_0 = \hat{\pi}$, F_1 – слой морфизма $\hat{\pi}_0$ над точкой x ;
- 2) $\chi_{1,0}: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_0$ – раздутие точки $F_1 \cap C_0$, $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_0 \circ \chi_{1,0}$, F_2 – исключительная кривая морфизма $\chi_{1,0}$;
- 3) $\chi_{2,1}: \hat{X}_2 \rightarrow \hat{X}_1$ – раздутие точки $F_1 \cap F_2$, $\chi_{2,0} = \chi_{1,0} \circ \chi_{2,1}$, $\hat{\pi}_2 = \hat{\pi}_1 \circ \chi_{2,1}$, F_3 – исключительная кривая морфизма $\chi_{2,1}$;
- 4) $\chi_{i+1,i}: \hat{X}_{i+1} \rightarrow \hat{X}_i$ – раздутие точки на F_{i+1} , $\chi_{i+1,j} = \chi_{j+1,j} \circ \dots \circ \chi_{i+1,i}$, если $j \leq i$, $\hat{\pi}_{i+1} = \hat{\pi}_i \circ \chi_{i+1,i}$, F_{i+2} – исключительная кривая морфизма $\chi_{i+1,i}$;
- 5) F^r – возможно неприведенный слой морфизма $\hat{\pi}_r$ над точкой x ;
- 6) $\hat{X}_N = \hat{X}'$, $\hat{\pi}_N = \hat{\pi}'$, F_{N+1} – единственная (-1) -кривая в F^N ;
- 7) $C'_0 = \chi_{N,0}^{-1}(C_0)$ и $\bar{F}_i = \chi_{N,i-1}^{-1}(F_i)$ для $i = 1, \dots, N-1$.

Сопоставим поверхности $\hat{X}'$ последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_i^2(\hat{X}')) \quad (i = 3, \dots, N+1), \quad (2)$$

где $N+1$ – число неприводимых компонент в слое морфизма $\hat{\pi}'$ над точкой $x \in C$. Для $i = 1, \dots, N-1$ рассмотрим поверхность $\hat{X}_{i+1}$, тогда

$$F^{i+1} \equiv a_{i+2}F_{i+2} + \sum_{j=1}^{i+1} a_j \chi_{i+1,j-1}^{-1}(F_j);$$

F_{i+2} – единственная (-1) -кривая в F^{i+1} , причем F_{i+2} пересекает не более двух неприводимых компонент F^{i+1} . Пусть F_{i+2} пересекает $\chi_{i+1,k-1}^{-1}(F_k)$ и $\chi_{i+1,l-1}^{-1}(F_l)$, причем $\chi_{i+1,l-1}^{-1}(F_l)$ лежит в связной компоненте $F^{i+1} \setminus F_{i+2}$, которая пересекается с $\chi_{i+1,0}^{-1}(C_0)$, где $l \neq k$ и $k, l \in \{1, \dots, i+1\}$. Положим

$$(\bar{\alpha}_{i+2}^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_{i+2}^2(\hat{X}')) = (a_k, a_l).$$

Пусть F_{i+2} пересекает только $\chi_{i+1,k-1}^{-1}(F_k)$ среди компонент F^{i+1} ($k \in \{1, \dots, i+1\}$), тогда $k = i+1$. В этом случае положим

$$(\bar{\alpha}_{i+2}^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_{i+2}^2(\hat{X}')) = (0, a_{i+1}).$$

ЛЕММА 5. Последовательность пар целых чисел (2) удовлетворяет условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$(\bar{\alpha}_i^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_i^2(\hat{X}')) = (\bar{\alpha}_i^1, \bar{\alpha}_i^2) \quad (i = 3, \dots, N+1). \quad (3)$$

На поверхности $\hat{X}_2$ выполнено соотношение

$$F^2 \equiv 2F_3 + \chi_{2,1}^{-1}(F_2) + \chi_{2,0}^{-1}(F_1).$$

Непосредственно проверяется, что $(\bar{\alpha}_3^1, \bar{\alpha}_3^2) = (1, 1)$.

Пусть последовательность пар целых чисел $(\bar{\alpha}_i^1, \bar{\alpha}_i^2)$ удовлетворяет условию (*) для $i = 3, \dots, r$. Докажем, что она удовлетворяет условию (*) для $i = 3, \dots, r+1$.

На поверхностях $\hat{X}_{r-1}$ и $\hat{X}_r$ выполнены соотношения

$$F^{r-1} \equiv a_r F_r + \sum_{j=1}^{r-1} a_j \chi_{r-1,j-1}^{-1}(F_j),$$

$$F^r \equiv a_{r+1} F_{r+1} + \sum_{j=1}^r a_j \chi_{r,j-1}^{-1}(F_j).$$

Пусть F_r пересекает $\chi_{r-1,k-1}^{-1}(F_k)$ и $\chi_{r-1,l-1}^{-1}(F_l)$, причем $\chi_{r-1,l-1}^{-1}(F_l)$ лежит в связной компоненте $F^{r-1} \setminus F_r$, которая пересекается с $\chi_{r-1,0}^{-1}(C_0)$, где $l \neq k$ и $k, l \in \{1, \dots, r-1\}$. По предположению $(\bar{\alpha}_r^1, \bar{\alpha}_r^2) = (a_k, a_l)$. Разберем три случая.

1) Пусть $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие $F_r \cap \chi_{r-1,k-1}^{-1}(F_k)$. В этом случае F_{r+1} пересекает $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ и $\chi_{r,k-1}^{-1}(F_k)$, причем $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ лежит в связной компоненте $F^r \setminus F_{r+1}$, которая пересекается с $\chi_{r,0}^{-1}(C_0)$. По определению $(\bar{\alpha}_{r+1}^1, \bar{\alpha}_{r+1}^2) = (a_k, a_r)$, где $a_r = a_k + a_l$.

2) Пусть $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие $F_r \cap \chi_{r-1,l-1}^{-1}(F_l)$. В этом случае F_{r+1} пересекает $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ и $\chi_{r,k-1}^{-1}(F_k)$, причем $\chi_{r,k-1}^{-1}(F_k)$ лежит в связной компоненте $F^r \setminus F_{r+1}$, которая пересекается с $\chi_{r,0}^{-1}(C_0)$. По определению $(\bar{\alpha}_{r+1}^1, \bar{\alpha}_{r+1}^2) = (a_r, a_l)$, где $a_r = a_k + a_l$.

3) Пусть, наконец, $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие точки на F_r , не принадлежащей $\chi_{r-1,k-1}^{-1}(F_k) \cup \chi_{r-1,l-1}^{-1}(F_l)$. В этом случае F_{r+1} пересекает только $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ среди компонент F^r . По определению $(\bar{\alpha}_{r+1}^1, \bar{\alpha}_{r+1}^2) = (0, a_r)$, где $a_r = a_k + a_l$.

Пусть F_r пересекает только $\chi_{r-1,r-2}^{-1}(F_{r-1})$ среди компонент F^{r-1} . По предположению $(\bar{\alpha}_r^1, \bar{\alpha}_r^2) = (0, a_{r-1})$. Заметим, что $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие либо $F_r \cap \chi_{r-1,r-2}^{-1}(F_{r-1})$, либо точки на F_r , не принадлежащей $\chi_{r-1,r-2}^{-1}(F_{r-1})$. Разберем два случая.

1) Пусть $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие $F_r \cap \chi_{r-1,r-2}^{-1}(F_{r-1})$. В этом случае F_{r+1} пересекает $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ и $\chi_{r,r-2}^{-1}(F_{r-1})$, причем $\chi_{r,r-2}^{-1}(F_{r-1})$ лежит в связной компоненте $F^r \setminus F_{r+1}$, которая пересекается с $\chi_{r,0}^{-1}(C_0)$. По определению $(\bar{\alpha}_{r+1}^1, \bar{\alpha}_{r+1}^2) = (a_r, a_{r-1})$, где $a_r = a_{r-1}$.

2) Пусть теперь $\chi_{r,r-1}: \hat{X}_r \rightarrow \hat{X}_{r-1}$ есть раздутие точки на F_r , не принадлежащей $\chi_{r-1,r-2}^{-1}(F_{r-1})$. В этом случае F_{r+1} пересекает только $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$ среди компонент F^r . По определению $(\bar{\alpha}_{r+1}^1, \bar{\alpha}_{r+1}^2) = (0, a_r)$, где $a_r = a_{r-1}$.

Во всех случаях последовательность пар целых чисел $(\bar{\alpha}_i^1, \bar{\alpha}_i^2)$ удовлетворяет условию (*) для $i = 3, \dots, r+1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть последовательность пар целых чисел (α_i^1, α_i^2) , удовлетворяет условию (*). Тогда существует единственная пара $(\hat{\pi}': \hat{X}' \rightarrow C, C'_0)$, полученная элементарным преобразованием φ над точкой $x \in C$ из пары $(\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C, C_0)$, такая, что выполнены соотношения (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индуктивно найдем все поверхности $\hat{X}_r$. Допустим, что мы уже нашли поверхность $\hat{X}_r$ для некоторого $r \in \{2, \dots, N\}$. Найдем поверхность $\hat{X}_{r+1}$.

Пусть F_{r+1} пересекает $\chi_{r,k-1}^{-1}(F_k)$ и $\chi_{r,l-1}^{-1}(F_l)$, причем $\chi_{r,l-1}^{-1}(F_l)$ лежит в связной компоненте $F^r \setminus F_{r+1}$, которая пересекается с $\chi_{r,0}^{-1}(C_0)$, где $l \neq k$ и $k, l \in \{1, \dots, r\}$. Разберем три случая.

1) Пусть $(\alpha_{r+1}^1, \alpha_{r+1}^2) = (0, \alpha_r^1 + \alpha_r^2)$. В этом случае $\chi_{r+1,r}: \hat{X}_{r+1} \rightarrow \hat{X}_r$ есть раздутие точки на F_{r+1} , которая не принадлежит $\chi_{r,l-1}^{-1}(F_l) \cup \chi_{r,l-1}^{-1}(F_k)$.

2) Пусть $(\alpha_{r+1}^1, \alpha_{r+1}^2) = (\alpha_r^1, \alpha_r^2 + \alpha_r^1)$. В этом случае $\chi_{r+1,r}: \hat{X}_{r+1} \rightarrow \hat{X}_r$ есть раздутие точки на $F_{r+1} \cap \chi_{r,k-1}^{-1}(F_k)$.

3) Наконец, $(\alpha_{r+1}^1, \alpha_{r+1}^2) = (\alpha_r^1 + \alpha_r^2, \alpha_r^2)$. В этом случае $\chi_{r+1,r}: \hat{X}_{r+1} \rightarrow \hat{X}_r$ есть раздутие точки на $F_{r+1} \cap \chi_{r,l-1}^{-1}(F_l)$.

Пусть F_{r+1} пересекает только $\chi_{i+1,r-1}^{-1}(F_r)$ среди всех неприводимых компонент F^r . Разберем два случая.

1) Если $(\alpha_{r+1}^1, \alpha_{r+1}^2) = (0, \alpha_r^2)$, то $\chi_{r+1,r}: \hat{X}_{r+1} \rightarrow \hat{X}_r$ есть раздутие точки на F_{r+1} , которая не принадлежит $\chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$.

2) Если $(\alpha_{r+1}^1, \alpha_{r+1}^2) = (\alpha_r^2, \alpha_r^2)$, то $\chi_{r+1,r}: \hat{X}_{r+1} \rightarrow \hat{X}_r$ есть раздутие точки на $F_{r+1} \cap \chi_{r,r-1}^{-1}(F_r)$.

Легко видеть, что полученная таким образом поверхность $\hat{X}_N = \hat{X}'$ единственна и соотношения (3) для нее выполнены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Последовательность пар целых чисел (β_i^1, β_i^2) ($i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$) *двойственна* к последовательности пар целых чисел (α_i^1, α_i^2) ($i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$), удовлетворяющей условию (*), если

$$1) (\beta_3^1, \beta_3^2) = (0, -1);$$

$$2) \text{ для } i \geq 4$$

$$(\beta_i^1, \beta_i^2) = \begin{cases} (\beta_{i-1}^1, \beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1), & \text{если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2); \\ (\beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1, \beta_{i-1}^2), & \text{если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2, \alpha_{i-1}^2); \\ (0, \beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1), & \text{если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (0, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2). \end{cases}$$

5. Классификация. Пусть даны

- 1) гладкая относительно минимальная линейчатая поверхность $\pi^0: X^0 \rightarrow C$ с инвариантом e такая, что $X^0 \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$, C_0 – единственное сечение этой линейчатой поверхности с $C_0^2 = -e$ и $e = -\deg(\mathcal{L}) > 2g(C) - 2$;
- 2) набор попарно различных точек $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$, возможно пустой ($K = 0$);
- 3) гладкие линейчатые поверхности $\pi^d: X^d \rightarrow C$ с сечениями $C_d \subset X^d$ для $d = 1, \dots, K$ такие, что пара $(\pi^d: X^d \rightarrow C, C_d)$ получена элементарным преобразованием φ_d над точкой $x_d \in C$ из пары $(\pi^{d-1}: X^{d-1} \rightarrow C, C_{d-1})$ для $d = 1, \dots, K$.

Если $K \geq 1$, то конструкция из предыдущего пункта ставит в соответствие каждой поверхности X^d ($d = 1, \dots, K$) последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^d), \bar{\alpha}_i^2(X^d)) \quad (i = 3, \dots, N(d) + 1)$$

и двойственную к ней последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\beta}_i^1(X^d), \bar{\beta}_i^2(X^d)) \quad (i = 3, \dots, N(d) + 1),$$

где $N(d) + 1$ – число неприводимых компонент слоя морфизма π^d над точкой x_d . Поверхности X_K сопоставляется $2K$ последовательностей пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) = (\bar{\alpha}_i^1(X^d), \bar{\alpha}_i^2(X^d))$$

и

$$(\bar{\beta}_i^1(X^K, d), \bar{\beta}_i^2(X^K, d)) = (\bar{\beta}_i^1(X^d), \bar{\beta}_i^2(X^d))$$

для $d = 1, \dots, K$ и $i = 3, \dots, N(d) + 1$, где $N(d) + 1$ – число неприводимых компонент слоя морфизма π^K над точкой x_d .

ЛЕММА 7. В обозначениях данного пункта

1) последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) \quad (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, N(d) + 1)$$

удовлетворяют условию (*) при фиксированном d ;

2) для заданных K последовательностей пар целых чисел

$$(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)) \quad (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, R(d) + 1, \quad R(d) \in \mathbb{N}_{\geq 2}),$$

удовлетворяющих условию (*), существует единственная гладкая линейчатая поверхность $\pi^K: X^K \rightarrow C$ с сечением C_K такая, что пара $(\pi^K: X^K \rightarrow C, C_K)$ получена из пары $(\pi^0: X^0 \rightarrow C, C_0)$ с помощью последовательности элементарных преобразований над точками $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$,

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) = (\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)) \quad (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, R(d) + 1),$$

где $R(d) + 1$ – число неприводимых компонент в слое морфизма π^K над точкой x_d .

Доказательство следует из лемм 5, 6.

ЛЕММА 8. Пусть в обозначениях данного пункта $F(d)$ – возможно неприведенный слой морфизма π^K над точкой x_d ($d = 1, \dots, K, K \geq 0$), и на поверхности X^K выполнены соотношения

$$F(d) \equiv \sum_{j=1}^{N(d)+1} a_j(d) \bar{F}_j(d)$$

и

$$K_{X^K} \equiv -2C_K + \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)+1} b_j(d) \bar{F}_j(d) + (2g(C) - 2 - e)F,$$

где $\bar{F}_j(d)$ – неприводимые компоненты слоя морфизма π^K над точкой x_d в обозначениях п. 4, а F – общий слой морфизма π^K . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i^1(X^K, d) + \bar{\alpha}_i^2(X^K, d) &= a_i(d), & \bar{\beta}_i^1(X^K, d) + \bar{\beta}_i^2(X^K, d) + 1 &= b_i(d) \\ (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, N(d) + 1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из элементарных свойств раздутий и определения последовательностей $\bar{\alpha}_i^1(X^K, d)$ и $\bar{\beta}_i^1(X^K, d)$ для $d = 1, \dots, K$ и $i = 3, \dots, N(d) + 1$.

ЛЕММА 9. Пусть в обозначениях данного пункта

$$\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} < 2 - 2g(C) + e.$$

Тогда

- 1) существуют положительные рациональные числа $\lambda_j(d)$ и γ такие, что выполнено соотношение

$$K_{X^K} \equiv -2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) - \gamma F, \quad (4)$$

где $\bar{F}_j(d)$ — неприводимая приведенная компонента слоя морфизма π^K над точкой x_d , а F — общий слой морфизма π^K ;

- 2) для $i = 3, \dots, N(d)$

$$\frac{b_i(d)}{a_i(d)} \leq \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)};$$

- 3) форма пересечения кривых C_K , $\bar{F}_r(k)$ ($k = 1, \dots, K$ и $r = 1, \dots, N(k)$) отрицательно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть

$$2 - 2g(C) + e = \sum_{d=0}^K \varepsilon_d,$$

где $\varepsilon_d \in \mathbb{Q}_{>0}$ и $\varepsilon_d > b_{N(d)+1}(d)/a_{N(d)+1}(d)$ для $d = 1, \dots, K$. Тогда выполнено соотношение (4), в котором $\bar{F}_j(d)$ — неприводимая компонента слоя морфизма π^K над точкой x_d , F — общий слой морфизма π^K ,

$$\gamma = \varepsilon_0 > 0, \quad \lambda_{N(d)+1}(d) = a_{N(d)+1}(d)\varepsilon_d - b_{N(d)+1}(d) > 0 \quad (d = 1, \dots, K).$$

Докажем, что $\lambda_j(d) > 0$ для $d = 1, \dots, K$ и $j = 1, \dots, N(d)$. Если это не так, то для некоторого $k \in \{1, \dots, K\}$ существует подмножество $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, N(k)\}$ такое, что $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \bar{F}_j(k)$ связно и $\lambda_j(k) \leq 0$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Среди $\bar{F}_j(k)$ нет (-1) -кривых ($j \in \mathcal{J}$), и форма пересечения кривых $\bar{F}_j(k)$ отрицательно определена (см. [4]). По формуле присоединения

$$K_{X^K} \bar{F}_j(k) + \bar{F}_j(k)^2 \geq -2 \quad (j \in \mathcal{J}).$$

Следовательно, для всех $j \in \mathcal{J}$ $K_{X^K} \bar{F}_j(k) \geq 0$ и

$$\begin{aligned} 0 &\geq K_{X^K} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right) = \left(-2C_K - \sum_{j=1}^{N(k)+1} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right) \\ &= - \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right)^2 - 2C_K \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j=1, j \notin \mathcal{J}}^{N(k)+1} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k) \right). \end{aligned}$$

Но

$$-\left(\sum_{j \subset \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k)\right)^2 \geq 0,$$

причем равенство выполнено, если $\lambda_j(k) = 0$ для всех $j \subset \mathcal{J}$. Очевидно, что

$$-2C_K \left(\sum_{j \subset \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k)\right) \geq 0$$

и

$$-\left(\sum_{j=1, j \notin \mathcal{J}}^{N(k)+1} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k)\right) \left(\sum_{j \subset \mathcal{J}} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k)\right) \geq 0.$$

Следовательно, для всех $j \subset \mathcal{J}$ $\lambda_j(k) = 0$ и

$$0 \leq \left(\sum_{j \subset \mathcal{J}} \bar{F}_j(k)\right) K_{XK} = \left(\sum_{j \subset \mathcal{J}} \bar{F}_j(k)\right) \left(-2C_K - \sum_{j=1}^{N(k)+1} \lambda_j(k) \bar{F}_j(k)\right) < 0.$$

Значит, $\lambda_j(d) > 0$ для $d = 1, \dots, K$ и $j = 1, \dots, N(d)$.

2) В части 1) было доказано, что если $2 - 2g(C) + e = \sum_{d=0}^K \varepsilon_d$, где $\varepsilon_d \in \mathbb{Q}_{>0}$ и $\varepsilon_d > b_{N(d)+1}(d)/a_{N(d)+1}(d)$ для $d = 1, \dots, K$, то выполнено соотношение (4), в котором $\bar{F}_j(d)$ — неприводимая компонента слоя морфизма π^K над точкой x_d , F — общий слой морфизма π^K и $\gamma = \varepsilon_0$, $\lambda_j(d) = a_j(d)\varepsilon_d - b_j(d) > 0$ для $d = 1, \dots, K$ и $j = 1, \dots, N(d)$. При $\varepsilon_d \rightarrow b_{N(d)+1}(d)/a_{N(d)+1}(d)$ получаем нужное выражение.

3) Из 1), 2) следует существование положительных рациональных чисел $\lambda_j(d)$ и γ таких, что выполнено соотношение (4). Среди $C_K, \bar{F}_r(k)$ ($k = 1, \dots, K, r = 1, \dots, N(k)$) нет (-1) -кривых, форма пересечения кривых $\bar{F}_r(k)$ ($k = 1, \dots, K, r = 1, \dots, N(k)$) отрицательно определена (см. [4]) и

$$C_K^2 \leq C_0^2 = -e < 2 - 2g(C) < 0.$$

По формуле присоединения

$$K_{XK} C_K + C_K^2 \geq 0, \quad K_{XK} \bar{F}_r(k) + \bar{F}_r(k)^2 \geq -2.$$

Следовательно,

$$K_{XK} \bar{F}_r(k) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, K, \quad r = 1, \dots, N(k)), \quad K_{XK} C_K > 0.$$

Значит, для $k = 1, \dots, K$ и $r = 1, \dots, N(k)$

$$0 \leq \bar{F}_r(k) \left(-2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) - \gamma F\right)$$

и

$$0 < C_K \left(-2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) - \gamma F\right).$$

Отсюда для $k = 1, \dots, K$ и $r = 1, \dots, N(k)$

$$0 \leq \bar{F}_r(k) \left(-2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) \right), \quad 0 < C_K \left(-2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) \right),$$

и если $\bar{F}_r(k) \cap \bar{F}_{N(k)+1}(k) \neq \emptyset$, то

$$0 < \bar{F}_r(k) \left(-2C_K - \sum_{d=1}^K \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) \bar{F}_j(d) \right).$$

Откуда следует, что форма пересечения кривых $C_K, \bar{F}_r(k)$ для $k = 1, \dots, K$ и $r = 1, \dots, N(k)$ отрицательно определена (см. [6]).

ЛЕММА 10. В обозначениях данного пункта

$$\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} < 2 - 2g(C) + e \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда существует морфизм $f: X_K \rightarrow X$ такой, что

- 1) X – численная поверхность Дель Пецо;
- 2) $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$;
- 3) f стягивает кривые $C_K, \bar{F}_j(d)$ ($d = 1, \dots, K, j = 1, \dots, N(d)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть выполнено (5), тогда по лемме 9 на поверхности X_K форма пересечения кривых $C_K, \bar{F}_r(k)$ для $d = 1, \dots, K$ и $j = 1, \dots, N(d)$ отрицательно определена. Существует морфизм $f: X_K \rightarrow X$, стягивающий кривые $C_K, \bar{F}_j(d)$ для $d = 1, \dots, K$ и $j = 1, \dots, N(d)$ (см. [1]), и

$$\text{rk}(\text{Div}(X_K) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 2 + \sum_{d=1}^K N(d),$$

следовательно, $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$. Легко видеть, что на поверхности X выполнено соотношение

$$f_*(K_{X_K}) = K_X \equiv \left(\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e \right) f_*(F).$$

Из условия $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$ и

$$\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e < 0$$

следует, что X – численная поверхность Дель Пецо.

Достаточность. Пусть существует морфизм $f: X_K \rightarrow X$ такой, что X – численная поверхность Дель Пецо, $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$, f стягивает кривые $C_K, \bar{F}_j(d)$

($d = 1, \dots, K, j = 1, \dots, N(d)$). Легко видеть, что на поверхности X выполнено соотношение

$$f_*(K_{X_K}) = K_X \equiv \left(\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e \right) f_*(F).$$

Из условия $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$ и того, что X — численная поверхность Дель Пеццо, следует

$$\sum_{d=1}^K \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e < 0.$$

ТЕОРЕМА 6. *Существует взаимно однозначное соответствие между численными поверхностями Дель Пеццо X с нерациональными особенностями и $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$ и следующей совокупностью:*

- 1) линейчатая поверхность $\pi: \mathbb{P}_C(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}) \rightarrow C$ с инвариантом e , где $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$, $g(C) \geq 1$ и $e = -\deg(\mathcal{L}) > 2g(C) - 2$;
- 2) набор попарно различных точек $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$, быть может, пустой ($K = 0$);
- 3) K последовательностей пар целых чисел

$$(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)) \quad (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, R(d) + 1, \quad R(d) \in \mathbb{N}_{\geq 2}),$$

которые удовлетворяют условию $(*)$ и

$$\sum_{d=1}^K \frac{\beta_{R(d)+1}^1(d) + \beta_{R(d)+1}^2(d) + 1}{\alpha_{R(d)+1}^1(d) + \alpha_{R(d)+1}^2(d)} < 2 - 2g(C) + e,$$

где $(\beta_i^1(d), \beta_i^2(d))$ — последовательность пар целых чисел, двойственная к $(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d))$ для $d = 1, \dots, K$ и $i = 3, \dots, R(d) + 1$.

Доказательство следует из теоремы 5 и лемм 7–10.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 6 дает не только классификацию всех численных поверхностей Дель Пеццо с нерациональными особенностями и $\text{rk}(\text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$, но и эффективный алгоритм их построения. А именно, нужно

- 1) взять гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность $\mathbb{P}_C(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$ с инвариантом e и сечением C_0 такую, что $e - 2g(C) + 2 > 0$, $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$, $C_0^2 = -e = \deg(\mathcal{L}) > 2g(C) - 2$;
- 2) выбрать возможно пустой набор попарно различных точек $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$;
- 3) сделать элементарное преобразование $\varphi: X_K \rightarrow \mathbb{P}_C(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$ в слоях морфизма π над точками $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$ так, чтобы K последовательностей пар целых чисел

$$(\alpha_i^1(X_K, d), \alpha_i^2(X_K, d)) \quad (d = 1, \dots, K, \quad i = 3, \dots, R(d) + 1)$$

удовлетворяли неравенству

$$\sum_{d=1}^K \frac{\beta_{R(d)+1}^1(d)(X_K) + \beta_{R(d)+1}^2(d)(X_K) + 1}{\alpha_{R(d)+1}^1(d)(X_K) + \alpha_{R(d)+1}^2(d)(X_K)} < 2 - 2g(C) + e,$$

- где $(\beta_i^1(d), \beta_i^2(d))$ ($i = 3, \dots, R(d) + 1$) – последовательность пар целых чисел, двойственная к $(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d))$ для $d = 1, \dots, K$ и $i = 3, \dots, R(d) + 1$, и $R(d) + 1$ – число неприводимых компонент в слое морфизма $\pi \circ \varphi$ над точкой $x_d \in C$;
- 4) стянуть собственный прообраз C_0 и все неприводимые компоненты слоев морфизма $\pi \circ \varphi$ над точками $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$ кроме (-1) -кривых.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sakai F. Weil divisors on normal surfaces // Duke Math. J. 1984. V. 51. P. 877–887.
- [2] Fujisawa T. On non-rational Del Pezzo surfaces. Preprint TITECH-MATH 13-93 (№ 22). Tokyo: Tokyo Inst. Tech., 1993.
- [3] Hartshorne R. Algebraic Geometry. Berlin: Springer Verlag, 1977.
- [4] Beauville A. Surfaces Algebriques Complexes. V. 54. Montrouge: Astérisque, 1978.
- [5] Brenton L. Some algebraicity criteria for singular surfaces // Invent. Math. 1977. V. 41. P. 129–147.
- [6] Artin M. On isolated rational singularities of surfaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 129–136.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: ivan@cheltsov.msk.ru

Поступило
 02.02.96