Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Валиев, А. С. Демидов, О неотрицательных тригонометрических полиномах с фиксированным средним, проходящих через заданные точки, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:27:28

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С ФИКСИРОВАННЫМ СРЕДНИМ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

А. Д. Валиев, А. С. Демидов

1. В настоящей заметке дается алгебраическое описание указанных в заголовке полиномов. Рассматриваемый вопрос возникает, например, в обратной задаче о равновесии плазмы в токамаке. В работе [1] показано, что по данным магнитных измерений в нескольких точках на кожухе токамака можно оценить компоненты полоидального магнитного поля на свободной границе плазмы, отделенной от кожуха вакуумной зоной. В оценках фигурируют положительные числа M_g^* и M_g , которые определяются следующим образом: включение $m \in]M_g^*, M_g[$ эквивалентно тому, что линии уровня $\{\zeta \in V_S \subset \mathbb{C} : U_g(\zeta) = m\}$ функции

$$U_g(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{g_k}{k} \left(r^k - \frac{1}{r^k} \right) e^{ik\varphi} \right), \quad re^{i\varphi} = \zeta \in V_S,$$

гомеоморфны окружности; здесь V_S – некоторая окрестность окружности $S = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$, а гармоническая в V_S функция U_g , построенная по положительной аналитической функции

$$g(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k \geq 1} g_k e^{ik\varphi} \right), \quad g_k \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

такова, что $U_g|_S = 0$ и $(\partial U / \partial r)|_S = g$. При этом, функция g удовлетворяет условию $g(\varphi_j) = d_j$, где числа $d_j > 0$ – это данные магнитной диагностики в n точках, соответствующих углам φ_j , $j = 1, \dots, n$.

Ниже дается алгебраический критерий таких полиномиальных функций g , степень которых меньше n .

2. Итак, пусть на окружности S заданы n различных точек $\zeta_j = e^{i\varphi_j}$. Обозначим через X эрмитову матрицу $Y^* Y$, где $n \times n$ -матрица $Y = (y_{kj})$ имеет своими элементами коэффициенты базисных полиномов Лагранжа

$$L_j(\zeta) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k} = \sum_{k=1}^n y_{kj} \zeta^{k-1}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00733.

Обозначим через G_n множество всех неотрицательных полиномов

$$g: \mathbb{C} \ni \zeta \mapsto g(\zeta) = g_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{n-1} g_k \zeta^k \right), \quad g_k \in \mathbb{C}, \quad g_0 \geq 0,$$

степень которых меньше n .

ТЕОРЕМА. Пусть заданы число $\sigma_0 > 0$ и вектор $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $d_j \geq 0$. Тогда три следующих утверждения эквивалентны:

- 1) существует тригонометрический полином $g \in G_n$ такой, что

$$g(\zeta_j) = d_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

и

$$g_0 = \sigma_0; \quad (3)$$

- 2) $\min_{\psi} \sigma(\psi) \leq \sigma_0 \leq \max_{\psi} \sigma(\psi)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, где $\sigma(\psi) = (\rho, X\rho)$ – скалярное произведение $\rho = \rho(\psi) = (\sqrt{d_1}e^{i\psi_1}, \dots, \sqrt{d_n}e^{i\psi_n})$ и $X\rho$;
 3) если $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – собственные значения матрицы X и $P = (p_{kj})$ – унитарная матрица такая, что

$$P^{-1}XP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j \bar{\alpha}_j = \sigma_0 \quad (4)$$

и

$$|\rho_j|^2 = d_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $\rho_j = \sum_k p_{kj} \alpha_k$ – j -я компонента вектора $\rho = P\alpha$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

ЛЕММА 1. Условия $g \in G_n$ и

$$g(\zeta) = \left| \sum_{j=1}^n \rho_j L_j(\zeta) \right|^2$$

равносильны. При этом $\rho_j = \sqrt{g(\zeta_j)} e^{i\psi_j}$, $\psi_j \in \mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Рисса (см., например, [2, отд. 6, § 5, задача 40]) $g(\zeta) = |h(\zeta)|^2$, где

$$h(\zeta) = z_0 + z_1\zeta + \dots + z_{n-1}\zeta^{n-1}, \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad \zeta \in S.$$

Положим $\rho_j = h(\zeta_j)$. Тогда $h^*(\zeta) = h(\zeta) - \sum_{j=1}^n \rho_j L_j \equiv 0$. Действительно, $\deg h^* < n$, а $h^*(\zeta_j) = 0$ при $j = 1, \dots, n$.

С другой стороны, очевидно, что $|h(\zeta)|^2 \in G_n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Выполнено $g_0 = \sigma(\psi)$, где $\sigma(\psi) = (\rho, X\rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По упомянутой теореме Рисса

$$\left| \sum_{j=1}^n \rho_j L_j \right|^2 = |z_0 + z_1\zeta + \dots + z_{n-1}\zeta^{n-1}|^2.$$

С другой стороны, в силу (1) имеем

$$\sum_{j=1}^n \rho_j L_j = \sum_{j=1}^n \rho_j \sum_{k=1}^n y_{kj} \zeta^{k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_{kj} \rho_j \right) \zeta^{k-1},$$

т.е. $z_{k-1} = \sum_{j=1}^n y_{kj} \rho_j$ или $\mathbf{z} = Y\rho$, где $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{n-1})$. Так как

$$g_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{n-1} g_k z^k \right) = |z_0 + z_1\zeta + \dots + z_{n-1}\zeta^{n-1}|^2,$$

то $g_0 = z_0 \bar{z}_0 + \dots + z_{n-1} \bar{z}_{n-1}$, т.е. $g_0 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (Y\rho, Y\rho) = (\rho, Y^*Y\rho) = (\rho, X\rho)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Проверим, что 1) $\implies$ 2). В силу леммы 1 существует вектор $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{T}^n$ такой, что

$$g(\zeta) = \left| \sum_{j=1}^n \sqrt{d_j} e^{i\psi_j} L_j(\zeta) \right|^2,$$

а из леммы 2 и условия (3) следует, что $\sigma(\psi) = \sigma_0$.

Проверим, что 2) $\implies$ 1). Из непрерывности $\sigma(\psi)$ следует существование $\psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*) \in \mathbb{T}^n$ вектора такого, что $\sigma(\psi^*) = (\rho(\psi^*), X\rho(\psi^*)) = \sigma_0$. Поэтому полином

$$g(\zeta) = \left| \sum_{j=1}^n \sqrt{d_j} e^{i\psi_j^*} L_j(\zeta) \right|^2$$

удовлетворяет (3) в силу леммы 2. Условие (2), очевидно, тоже выполнено.

Проверим, что 1) $\implies$ 3). Положим $\alpha = P^{-1}\rho$, где вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ определен в лемме 1. Из (2) и леммы 1 следует (5). Учитывая (3) и лемму 2, получаем (4), ибо

$$g_0 = (\rho, X\rho) = (P\alpha, XP\alpha) = (\alpha, P^{-1}XP\alpha) = (\alpha, \Lambda\alpha). \quad (6)$$

Проверим, что 3) $\implies$ 1). Положим

$$g(\zeta) = \left| \sum_{j=1}^n \rho_j L_j \right|^2.$$

Имеем $g \in G_n$. Из (5) следует (2), из (4), (6) и леммы 2 получаем (3).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сделав замену $d_j^* = d_j + \delta$, $\sigma_0^* = \sigma_0 + \delta$, где $\delta > 0$, получим описание положительных (см. п. 1) тригонометрических полиномов g степени меньшей n , для которых выполнены следующие условия:

$$g \geq \delta \text{ на } S, \quad \int_S g(\zeta) d\zeta = \sigma_0^* > \delta, \quad g(\zeta_j) = d_j^* \geq \delta.$$

Авторы благодарны С. В. Конягину и особенно В. М. Тихомирову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Demidov A. S., Petrova V. V., Silantieva V. M. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996. V. 323. P. 353–358. 2. Поля Г., Серё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.