Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Санду, О длине нижнего центрального ряда (производного ряда) коммутативной лупы Муфанг, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 475–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:09:10

О ДЛИНЕ НИЖНЕГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДА (ПРОИЗВОДНОГО РЯДА) КОММУТАТИВНОЙ ЛУПЫ МУФАНГ

Н. И. Санду

В теории коммутативных луп Муфанг (КЛМ) хорошо известна замечательная теорема Брака–Слэби, играющая ключевую роль в исследовании таких луп: КЛМ с n ($n \geq 2$ конечно) образующими центрально нильпотентна степени не больше чем $n - 1$ [1]. Это означает, что длина нижнего центрального ряда таких луп не превосходит $n - 1$. В [2], [3] построены примеры КЛМ с n образующими, которые являются центрально нильпотентными степени $n - 1$. Отсюда следует, что длина степени нижнего центрального ряда свободной КЛМ с n свободными образующими равна $n - 1$. В [3] показано, что длина производного ряда свободной КЛМ с n свободными образующими равна $\min\{k \mid 3^k \geq 2n - 1\}$. Отметим также, что в [1]–[3] построены КЛМ, длина нижнего центрального ряда которых равна ω . В данной заметке по аналогии с теорией групп [4] строятся КЛМ, длина нижнего центрального ряда (производного ряда) которых равна произвольному наперед заданному трансфинитному числу.

Теперь напомним некоторые понятия из теории КЛМ [1]. *Коммутативная лупа Муфанг* характеризуется тождеством

$$x^2 \cdot yz = xy \cdot xz. \quad (1)$$

Ассоциатор $[a, b, c]$ элементов a, b, c КЛМ $(Q, \cdot) \equiv Q$ определяется равенством $ab \cdot c = a[a, b, c] \cdot bc$. *Ассоциант* Q' КЛМ Q – эта подгруппа, порожденная всеми ассоциаторами КЛМ Q . Она нормальна в Q . *Нижний (трансфинитный) центральный ряд* КЛМ Q имеет вид

$$Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_\omega \supseteq Q_{\omega+1} \supseteq \dots,$$

где нормальная подлупа $Q_{\alpha+1}$ порождается всеми ассоциаторами вида $[a, u, v]$, $a \in Q_\alpha$, $u, v \in Q$, а Q_α для предельного α есть пересечение всех предыдущих подлуп. Лупа Q называется *ZD-лупой*, если ее нижний центральный ряд достигает единицы на каком-нибудь, быть может, трансфинитном месте. Наименьшее трансфинитное число α , для которого $Q_\alpha = 1$, называется *степенью ZD-лупы*. (Отметим, что в [1] название для таких луп иное.) Если α – конечное число, то КЛМ Q называется *центрально нильпотентной*.

Аналогично, система нормальных подлуп

$$Q = Q^{(0)} \supseteq Q^{(1)} \supseteq \dots \supseteq Q^{(\omega)} \supseteq Q^{(\omega+1)} \supseteq \dots$$

будет (трансфинитным) производным рядом КЛМ Q , если $Q^{(\alpha+1)}$ есть ассоциант подлупы $Q^{(\alpha)}$, а для предельного α подлупа $Q^{(\alpha)}$ есть пересечение предыдущих членов. КЛМ Q называется *РК-лупой степени α* , если $Q^{(\alpha)} = 1$, $Q^{(\beta)} \neq 1$, $\beta < \alpha$. Если α конечно, то КЛМ Q называется *центрально разрешимой*.

В дальнейшем под *алгеброй* будем понимать ассоциативную алгебру над полем из трех элементов. Пусть алгебра A *антикоммутативна*, т.е. квадрат любого ее элемента равен нулю. В таком случае для любых $x, y \in A$ выполнено соотношение $xy = -yx$.

Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$. Положим

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Используя указанные выше свойства антикоммутативной алгебры, несложно проверить (см. также [3]), что операция ‘ $\cdot$ ’:

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_1 y_1 x_2 + x_1 y_2 y_1 \\ x_2 + y_2 + x_2 y_2 y_1 + x_2 y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

превращает $A \times A = Q$ в КЛМ (для этого необходимо убедиться в справедливости тождества (1)), которую назовем *соответствующей алгебре* A . Проверяется также, что

$$[x, y, z] = \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_2 + y_1 z_1 x_2 + z_1 x_1 y_2 \\ x_2 y_2 z_1 + y_2 z_2 x_1 + z_2 x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В алгебре A рассмотрим систему подалгебр

$$A \supseteq A^{[1]} \supseteq A^{[2]} \supseteq \dots \supseteq A^{[\omega]} \supseteq A^{[\omega+1]} \supseteq \dots, \quad (3)$$

где $A^{[1]} = A^3$, $A^{[\alpha+1]}$ есть подалгебра, порожденная произведениями вида $a_\alpha u v$, $a_\alpha \in A^{[\alpha]}$, $u, v \in A$, а $A^{[\alpha]}$ с предельным α есть пересечение предыдущих. Если при некотором α $A^{[\alpha]} = 0$, то A назовем *ZD-алгеброй*. Наименьшее α , удовлетворяющее условию $A^{[\alpha]} = 0$, назовем *ступенью* ZD-алгебры.

Алгебру A будем называть *правильной*, если в A существует базис e_α , обладающий следующими свойствами:

- 1) произведение любых трех базисных элементов есть либо нуль, либо базисный элемент;
- 2) если a_α, a_β – базисные элементы, то $a_\alpha a_\beta = -a_\beta a_\alpha$.

Базис с этими свойствами будем называть *правильным*. Легко убедиться, что правильная алгебра антикоммутативна.

ЛЕММА 1. *Ступень правильной ZD-алгебры A совпадает со ступенью соответствующей ей коммутативной ZD-лупы Муфанг Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) и определения системы (3) следует, что если A является ZD-алгеброй, то КЛМ Q является ZD-лупой, и ступень ZD-лупы Q не выше ступени ZD-алгебры A . Обратно, покажем, что все элементы базиса алгебры A , содержащиеся в $A^{[\alpha]}$, входят в Q_α . При $\alpha = 1$ это очевидно. Предположим, что утверждение справедливо для всех α , меньших β . Если β – предельное, то утверждение будет, очевидно, справедливым. Поэтому предположим, что $\beta = \alpha + 1$. Выберем произвольный элемент базиса $e_{\alpha+1}$ из $A^{[\alpha+1]}$. Согласно определению алгебры $A^{[\alpha+1]}$ ее базис состоит из произведений вида $e_\alpha e_1 e_2$, где $e_\alpha \in A^{[\alpha]}$, $e_1, e_2 \in A$. По индукционному предположению

$$\begin{pmatrix} e_\alpha \\ e_\alpha \end{pmatrix} \in Q_\alpha.$$

Согласно (2) вычислим ассоциатор

$$\left[\begin{pmatrix} e_\alpha \\ e_\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e_\alpha e_1 e_2 \\ e_2 e_\alpha e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\alpha e_1 e_2 \\ e_\alpha e_1 e_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ступень ZD-алгебры A не превосходит ступени ZD-луны Q . Лемма доказана.

Пусть заданы алгебры A, B с базисами $e_{\alpha_i}, f_{\beta_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots$), и пусть F – алгебра, порожденная множеством $\{e_{\alpha_i}, f_{\beta_j} : i, j = 1, 2, \dots\}$ и удовлетворяющая соотношению $e_\alpha f_\beta = -f_\beta e_\alpha$. Рассмотрим подалгебру C алгебры F , составленную из всех элементов вида $e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} f_\beta, e_\alpha f_{\beta_1} f_{\beta_2}, e_\alpha, f_\beta$. Назовем алгебру C *правильным произведением A на B* . Легко заметить, что если A, B – правильные алгебры с правильными базисами e_α, f_β , то правильное произведение A на B будет правильной алгеброй с правильным базисом $e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} f_\beta, e_\alpha f_{\beta_1} f_{\beta_2}, e_\alpha, f_\beta$.

ЛЕММА 2. *Правильное произведение C ZD-алгебры A ступени $\alpha + 1$ на ZD-алгебру B ступени β является ZD-алгеброй ступени $\geq \alpha + \beta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, базис $C^{[\alpha]}$ содержит все элементы вида $e_i f_j f_r$, где $e_i \in A^{[\alpha]}, f_j, f_r \in B$. Отсюда видно, что базис $C^{[\alpha+\lambda]}$ ($\lambda < \beta$) содержит все элементы вида $e_i f_j f_r$, где $e_i \in A^{[\alpha]}, f_j, f_r \in B^{[\lambda]}$. Следовательно, $C^{[\alpha+\lambda]} \neq 0$, что и требовалось.

ЛЕММА 3. *Для каждого трансфинитного числа α существуют правильные ZD-алгебры ступени α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что α конечно. Пусть B – внешняя алгебра, порожденная $2\alpha + 1$ элементами. Тогда в качестве искомой алгебры можно взять прямую сумму подалгебр A^{2k+1} , где $k = 1, 2, \dots$. Пусть теперь доказано, что правильные ZD-алгебры ступеней, меньших α , существуют. Если α предельное, то прямая сумма правильных ZD-алгебр ступеней, стремящихся к α , даст правильную ZD-алгебру ступени α . Пусть теперь $\alpha = \alpha' + 1, \alpha' = \beta + 1$. Тогда в силу леммы 2 произведение двух правильных ZD-алгебр ступеней $\beta + 1$ даст правильную ZD-алгебру ступени $\beta + \beta \geq \alpha$. Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha = \alpha' + 1$ и α' предельное. Пусть $\alpha_\lambda < \alpha', \lim \alpha_\lambda = \alpha'$. Для каждого λ строим правильную ZD-алгебру A_λ ступени $\alpha_\lambda + 1$. Кроме того, мы можем считать, что размерности $(A_\lambda)^{[\alpha_\lambda]}$ при всех λ одинаковы. Отобразим все $(A_\lambda)^{[\alpha_\lambda]}$ изоморфно на $(A_\lambda)^{[\alpha_1]}$. Теперь составим прямую сумму A алгебр A_λ и в этой сумме отождествим соответственные элементы подалгебр $(A_\lambda)^{[\alpha_\lambda]}$. В новой алгебре $\bar{A}$ все степени вида $\bar{A}^{[\alpha_\lambda]}$ содержат $(\bar{A}_1)^{[\alpha_1]}$ и, таким образом, $\bar{A}^{[\alpha']}$ также содержит $(A_1)^{[\alpha_1]}$. Отсюда видно, что ступень ZD-алгебры $\bar{A}$ равна требуемому числу $\alpha' + 1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого трансфинитного числа α существует коммутативная луна Муфанг, длина нижнего центрального ряда которой равна α .*

Утверждение следует из лемм 1, 3.

Пусть теперь A – алгебра с базисом $e_{\alpha\beta}$, где α, β пробегают множество трансфинитных чисел $1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \alpha < \beta$, и таблицей умножения $e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} = -e_{\beta\gamma} e_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} e_{\gamma\delta} = e_{\alpha\delta}$. Обозначим через Q КЛМ, соответствующую алгебре A , и пусть

$$Q \supseteq Q^{(1)} \supseteq Q^{(2)} \supseteq \dots \supseteq Q^{(\omega)} \supseteq Q^{(\omega+1)} \supseteq \dots$$

– производный ряд ряда лупы Q . Введем функцию $\varphi(\alpha)$ с помощью соотношений

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\alpha + 1) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha), \quad \varphi(\beta) = \lim_{\lambda < \beta} \varphi(\lambda),$$

где β предельное. Утверждается, что $Q^{(\lambda)}$ содержит все элементы вида

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

у которых $\beta \geq \alpha + \varphi(\lambda)$. Действительно, для $\lambda = 0$ это тривиально, так как по определению $Q^{(0)} = Q$. Допустим, что утверждение верно для всех значений λ , меньших некоторого σ . Если λ предельное, то утверждение будет, очевидно, справедливым и для σ . Осталось рассмотреть случай $\sigma = \rho + 1$. Возьмем некоторый элемент $e_{\alpha\delta}$, $\delta \geq \alpha + \varphi(\sigma)$. Этот элемент можно представить в виде $e_{\alpha\delta} = e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma}e_{\gamma\delta}$, где $\beta = \alpha + \varphi(\rho)$, $\gamma = \beta + \varphi(\rho)$, $\delta \geq \gamma + \varphi(\rho)$. Тогда $\gamma \geq \alpha + 3\varphi(\rho) = \alpha + \varphi(\rho + 1)$. По условию

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\beta\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\gamma\delta} \end{pmatrix}$$

входят в $Q^{(\rho)}$. Согласно (2)

$$\left[\begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{\beta\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\gamma\delta} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma}e_{\gamma\delta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{\alpha\delta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Но $\gamma \geq \alpha + \varphi(\rho + 1)$, откуда

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha\delta} \\ 0 \end{pmatrix} \in Q^{(\sigma+1)}.$$

Таким образом, выбирая достаточно высокие значения для σ , получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого трансфинитного числа α существует коммутативная лупа Муфанг, длина производного ряда которой равна α .*

Наконец, из доказательства теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 3. *Коммутативные РК-лупы Муфанг степени ω могут быть ZD-лупами произвольных степеней.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruck R. H. A survey of binary systems. Berlin: Springer Verlag, 1958.
2. Malbos C. P. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1978. V. 287. № 9. P. 691–693.
3. Beneteau L. // J. Algebra. 1980. V. 67. P. 1–35.
4. Мальцев А. И. // Матем. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.