Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Абросимов, О линейности автоморфизмов стандартных квадратиков размерности m в $\mathbb{C}^{m+n}$, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 03:15:17

УДК 517.55

О ЛИНЕЙНОСТИ АВТОМОРФИЗМОВ СТАНДАРТНЫХ КВАДРИК КОРАЗМЕРНОСТИ m В $\mathbb{C}^{m+n}$

А. В. Абросимов

В работе рассматриваются стандартные квадрики коразмерности m в $\mathbb{C}^{m+n}$. Приводится условие, при котором все автоморфизмы таких квадрик линейны.

Библиография: 5 названий.

Стандартной квадратикой коразмерности m в $\mathbb{C}^{m+n}$ (или (m, n) -квадратикой) называется поверхность

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^m : \operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle\}, \quad (1)$$

где $\langle z, z \rangle = (\langle z, z \rangle_1, \dots, \langle z, z \rangle_m)$ и

$$\langle z^1, z^2 \rangle_j = (A^j z^1, z^2) \equiv \sum_{\mu, \nu=1}^n A_{\nu\mu}^j z_\mu^1 \bar{z}_\nu^2$$

– эрмитовы линейно независимые билинейные формы в $\mathbb{C}^n$, а $A^j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ – линейные эрмитовы операторы с матрицами $A_{\nu\mu}^j$.

Будем называть квадратик (1) невырожденной, если некоторая линейная комбинация A^j невырождена. Пусть Φ – локально биголоморфный автоморфизм M , оставляющий заданную точку ζ на месте. Множество всех таких автоморфизмов обозначим символом $\operatorname{Aut}_\zeta M$ и назовем группой стабильности M в точке ζ . Требуется описать $\operatorname{Aut}_\zeta M$.

В [1] рассматривались квадрики вида (1) и была высказана гипотеза о рациональности автоморфизмов из $\operatorname{Aut}_\zeta M$, доказанная позже в [2]. Предлагаемая работа посвящена уточнению этого факта. Для формулировки результата введем некоторые понятия.

Пусть $P(\lambda) = \det(\lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_m A^m)$. Для любого $j = 1, \dots, m$ положим $'\lambda_j = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m)$. Тогда $\lambda = (\lambda_j, '\lambda_j)$. Для любого фиксированного $'\lambda_j$ полином $P(\lambda_j, '\lambda_j)$ является полиномом от λ_j . Пусть $q(' \lambda_j)$ – число его попарно различных корней, $q_j(M) = \sup_{\lambda_j} (q(' \lambda_j))$ и $q(M) = \max_j (q_j(M))$. Очевидно, что $1 \leq q(M) \leq n$.

ТЕОРЕМА. Пусть M – стандартная невырожденная квадратика вида (1). Если $q(M) > t$, то все автоморфизмы из $\operatorname{Aut}_\zeta M$ линейны.

1. Замечания и обозначения. Заметим, что M – однородная поверхность относительно $\mathbb{C}$ -линейных преобразований, т.е. для любых точек $\zeta_1, \zeta_2 \in M$ существует линейный автоморфизм M , переводящий ζ_1 в ζ_2 . Поэтому везде в дальнейшем будем считать, что $\zeta = 0$.

Так как M – невырожденная квадрика, то, переходя (если потребуется) к подходящим линейным комбинациям форм, мы будем в дальнейшем считать, что все A^j невырождены.

Пусть $\mathbb{T}(M)$ – комплексификация касательного расслоения $T(M)$ и $\mathbb{T}^c(M)$ – комплексная касательная система:

$$\mathbb{T}^c(M) = \{Z \in \mathbb{T}(M) : Z(\bar{z}_\mu) = Z(\bar{w}_j) = 0, \mu = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Выберем базис в $\mathbb{T}^c(M)$:

$$Z_\mu = \frac{\partial}{\partial z_\mu} + \sum_{j=1}^m b_\mu^j(z) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

где

$$b_\mu^j(z) = i \frac{\partial}{\partial z_\mu} \langle z, z \rangle_j \equiv \sum_{\nu=1}^m A_{\nu\mu}^j \bar{z}_\nu, \quad u_j = \operatorname{Re} w_j.$$

В системе $\overline{\mathbb{T}^c}(M)$ полей, полученных комплексным сопряжением полей из $\mathbb{T}^c(M)$ (систему $\overline{\mathbb{T}^c}(M)$ называют CR-системой) поля

$$\bar{Z}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\mu} + \sum_{j=1}^m \overline{b_\mu^j(z)} \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

будут базисными. Отметим тождество для скобки Пуассона:

$$[\bar{Z}_\nu, Z_\mu] \equiv 2i \sum_{j=1}^m A_{\nu\mu}^j \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Пусть $W \subset \mathbb{C}^{n+m}$ – окрестность начала координат и

$$\operatorname{CR}(M) = \{h \in C^s(M \cap W), s > 3 : \bar{Z}_\nu h \equiv 0, \nu = 1, \dots, n\}$$

есть класс CR-функций на M . Из (2) и линейной независимости A^j следует, что избыточная размерность M максимальна и равна m . Хорошо известно (см. [3]), что в этом случае существует окрестность D_M , примыкающая к M , такая, что всякая функция $h \in \operatorname{CR}(M)$ однозначно продолжается до функции $\tilde{h} \in H(D_M)$ (т.е. голоморфной в D_M). При этом $\tilde{h}$ может принимать в D_M лишь те значения, которые h принимает на $M \cap W$. В частности, всякая вещественная CR-функция на M постоянна (см. [4]). Поэтому мы отождествляем $\operatorname{CR}(M)$ и $H(D_M)|_M$, и для любой $h \in \operatorname{CR}(M)$ справедливы формулы дифференцирования

$$Z_\mu h = \left(\frac{\partial}{\partial z_\mu} + \sum_{j=1}^m b_\mu^j(z) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) h, \quad \bar{Z}_\nu Z_\mu h \equiv 2i \sum_{j=1}^m A_{\nu\mu}^j \frac{\partial h}{\partial w_j}.$$

2. Вывод уравнений. Отыскание отображения $\Phi = (g, f) \in \text{Aut}_0 M: M \cap W \rightarrow M \cap W$ эквивалентно отысканию функций $g^1, \dots, g^n, f^1, \dots, f^m \in \text{CR}(M)$ таких, что

$$\text{Im } f^j = \langle g, g \rangle_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$\Phi(0) = (g(0), f(0)) = 0, \quad (4)$$

$$\det J_\Phi(0) = \frac{\partial(g, f)}{\partial(z, w)}(0) \neq 0, \quad (5)$$

где J_Φ – матрица Якоби для Φ и W – окрестность точки 0. Из (3) получаем

$$\begin{aligned} Z_\mu f^j &= 2 \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha^j(g) Z_\mu g^\alpha = 2i \langle Z_\mu g, g \rangle_j, \\ \bar{Z}_\nu Z_\mu f^j &= 2 \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha^j(g) \bar{Z}_\nu Z_\mu g^\alpha + 2i \langle Z_\mu g, Z_\nu g \rangle_j. \end{aligned}$$

Последнее равенство запишем в виде

$$\sum_{j=1}^m F_s^j A_{\mu\nu}^s = \langle g_\mu, g_\nu \rangle_j, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_s^j &= \frac{\partial f^j}{\partial w_s} - 2i \left\langle \frac{\partial g}{\partial w_s}, g \right\rangle_j, \quad j, s = 1, \dots, m, \\ g_\mu^\alpha &= Z_\mu g^\alpha = \frac{\partial g^\alpha}{\partial z_\mu} + 2i \sum_{\nu=1}^n \bar{z}_\nu \sum_{s=1}^m A_{\nu\mu}^s \frac{\partial g^\alpha}{\partial w_s}, \quad \alpha, \mu = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $A^j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ – линейный эрмитов оператор, соответствующий матрице $A_{\nu\mu}^j$. Пусть $G_\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ – линейный в каждой точке M оператор, соответствующий матрице g_μ^α , и $F_\Phi: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ – линейный в каждой точке M оператор, соответствующий матрице F_s^j .

В операторном виде (6) принимает вид

$$G_\Phi^* A^j G_\Phi = \sum_{k=1}^m F_s^k A^s, \quad j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Пусть $(L) \text{Aut}_0 M$ – подгруппа всех линейных автоморфизмов из $\text{Aut}_0 M$ и $\text{Aut}_0^* M$ – подгруппа всех нелинейных автоморфизмов из $\text{Aut}_0 M$, т.е.

$$\text{Aut}_0^* M = \{ \Phi \in \text{Aut}_0 M : G_\Phi(0) = I, F_\Phi(0) = I \}.$$

Уравнения (8) были выведены в работе [5]. Там же были получены некоторые свойства операторов G_Φ и F_Φ . Сформулируем некоторые из них:

- 1) F_s^j – вещественная матрица;
- 2) $\det J_\Phi = \det G_\Phi \det F_\Phi$;
- 3) для любого $\Phi \in \text{Aut}_0 M$ существуют единственные $\Phi^1 \in (L) \text{Aut}_0 M$, $\Phi^2 \in \text{Aut}_0^* M$ такие, что $\Phi = \Phi^1 \Phi^2$;
- 4) если любой $\Phi \in \text{Aut}_0^* M$ тождественный, то все автоморфизмы из $\text{Aut}_0 M$ линейны.

Заметим, что тождественность $\Phi \in \text{Aut}_0^* M$ эквивалентна тождественности матрицы F_s^j .

Рассмотрим систему (8). Зафиксируем индекс $\sigma = 1, \dots, m$. Возьмем произвольный вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ ($\lambda_\sigma \neq 0$). Справедливо тождество

$$\lambda_\sigma G^* A^j G = \sum_{k=1}^m F_s^k A^s = F_\sigma^j \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k A^k \right) + \sum_{k=1}^m (\lambda_\sigma F_k^j - \lambda_k F_\sigma^j) A^k$$

(мы опускаем символ Φ). Для любого вектора $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{C}^m$ справедливо тождество

$$\lambda_\sigma G^* \left(\sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j A^j \right) G = \left(\sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j F_\sigma^j \right) \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k A^k \right) + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j (\lambda_\sigma F_k^j - \lambda_k F_\sigma^j) A^k \right). \quad (9)$$

Положим

$$\sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j (\lambda_\sigma F_k^j - \lambda_k F_\sigma^j) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Отсюда

$$\lambda_k = \lambda_\sigma \frac{\sum_{j=1}^m F_k^j \hat{\lambda}_j}{\sum_{j=1}^m F_\sigma^j \hat{\lambda}_j} \equiv \lambda_\sigma \frac{\varphi_k(\hat{\lambda})}{\varphi_\sigma(\hat{\lambda})}. \quad (11)$$

Это можно записать следующим образом:

$$\lambda_k = \theta \sum_{j=1}^m F_k^j \hat{\lambda}_j. \quad (12)$$

Обращая (11), получаем

$$\hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_\sigma \frac{\Delta_j(\lambda)}{\Delta_\sigma(\lambda)} = \hat{\lambda}_\sigma \frac{\sum_{k=1}^m \tilde{F}_k^j \lambda_k}{\sum_{k=1}^m \tilde{F}_k^\sigma \lambda_k}, \quad (13)$$

где $\Delta_j(\lambda)$ – определитель $\det F$, в строке j которого стоит вектор λ , а $\tilde{F}_k^j$ – алгебраические дополнения к F_k^j в определителе $\det F$.

Заметим, что

$$\varphi_\sigma(\hat{\lambda}) \Delta_\sigma(\lambda) \equiv \lambda_\sigma \hat{\lambda}_\sigma \det F.$$

Таким образом, определены невырожденные взаимно обратные проективные отображения $\hat{\Lambda}$ и $\Lambda: \mathbb{CP}^{m-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{m-1}$

$$\hat{\lambda}_j = \hat{\Lambda}_j(\lambda) = \omega \Delta_j(\lambda), \quad \lambda_j = \vartheta \Lambda_j(\hat{\lambda}) = \varphi_j(\hat{\lambda}), \quad j = 1, \dots, m. \quad (14)$$

При фиксированных $\lambda_\sigma, \hat{\lambda}_\sigma \neq 0$ (например, равных единице) определены невырожденные взаимно обратные дробно-линейные отображения $\hat{L}$ и $L: \mathbb{C}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^{m-1}$

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_\sigma} = \hat{L}_j \left(\frac{\lambda}{\lambda_\sigma} \right) = \frac{\Delta_j(\lambda/\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda/\lambda_\sigma)}, \quad \frac{\lambda_j}{\lambda_\sigma} = L_j \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_\sigma} \right) = \frac{\varphi_j(\hat{\lambda}/\hat{\lambda}_\sigma)}{\varphi_\sigma(\hat{\lambda}/\hat{\lambda}_\sigma)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Введем обозначения

$$T(\lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_k A^k.$$

Тогда (9) принимает вид

$$G^* T(\hat{\lambda}) G = \frac{\hat{\lambda}_\sigma \det F}{\Delta_\sigma(\lambda)} T(\lambda). \quad (16)$$

3. Доказательство теоремы. Достаточно показать, что любой $\Phi \in \text{Aut}_0^* M$ тождественный. Пусть $q(M) > m$. Тогда существует σ такое, что $q_\sigma(M) > m$ (без ограничения общности считаем, что $\sigma = m$). Существует точка λ^0 и δ -окрестность $U(\lambda^0)$ этой точки такие, что для всех $\lambda \in U(\lambda^0)$ справедливо разложение

$$P(\lambda) = (\lambda_m - a^1(\lambda))^{n_1} \dots (\lambda_m - a^q(\lambda))^{n_q} \det A^m,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ и $a^k(\lambda) \neq a^s(\lambda)$ для всех $\lambda \in U(\lambda^0)$ при $k \neq s$.

Пусть $e \in \mathbb{C}^n$ такой, что $T(\lambda)e = 0$. Тогда $P(\lambda) = 0$. Это уравнение определяет поверхность $\Gamma \in \mathbb{C}^m$, распадающуюся на q листов Γ_j . Из (16) следует, что $T(\hat{\lambda})Ge = 0$, и, следовательно, $P(\hat{\lambda}) = 0$. Поэтому отображение $\hat{\Lambda}$ (или $\hat{L}$) переводит Γ в себя. Так как Φ близко к тождественному отображению при z достаточно близком к началу координат, то $\hat{\Lambda}$ (или $\hat{L}$) переводит каждый лист Γ_j в себя.

Будем говорить, что p точек ($p > m$) из $\mathbb{C}^m$ находятся в общем положении, если любые m из них линейно независимы. Покажем, что на каждом листе Γ_j можно выбрать по точке λ^j так, что точки $\lambda^1, \dots, \lambda^q$ будут находиться в общем положении. Выберем $\lambda^1, \dots, \lambda^q$ так, чтобы любые $m - 1$ из них были линейно независимы. Пусть $\lambda^j = (\lambda^j, a^j(\lambda^j))$. Тогда $\lambda^j \in \Gamma_j$. Пусть (от противного) найдутся индексы $j_1, \dots, j_m$ такие, что $\det(\lambda_{s^{j_k}}^{j_k}) \equiv 0$ ($k, s = 1, \dots, m$). Устремив λ^{j_α} к λ^{j_β} для $\alpha \neq \beta$, получаем $a^{j_\alpha}(\lambda^{j_\beta}) = a^{j_\beta}(\lambda^{j_\beta})$, что невозможно.

Заметим, что образы $\hat{\lambda}^j$ точек λ^j , находящихся в общем положении, в силу невырожденности отображения $\hat{\Lambda}$ (или $\hat{L}$) также находятся в общем положении.

Пусть $\lambda^1, \dots, \lambda^{m+1}$ ($\lambda^j \in \Gamma_j$) находятся в общем положении. Зафиксируем $z = z_0$. Тогда определяются точки $\hat{\lambda}^1, \dots, \hat{\lambda}^{m+1}$ ($\hat{\lambda}^j = \hat{\lambda}^j(\lambda, z_0) \in \Gamma_j$) и отображение $\hat{L}$ определяется однозначно, а его коэффициенты не зависят от z . Устремляя z к началу координат, получаем, что $\hat{L}$ тождественно. Тогда Φ тождественно, и теорема доказана.

При $m = 2$ этот результат был доказан в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Туманов А. Е., Хенкин Г. М. Локальная характеристика голоморфных автоморфизмов областей Зигеля // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 4. С. 49–61.
- [2] Туманов А. Е. Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственных голоморфных автоморфизмов областей Зигеля // Изв. АН СССР. 1988. Т. 52. № 3. С. 651–659.
- [3] Baouendi M. S., Treves F. On the property of the functions and distributions annihilated by locally integrable systems of complex vector fields // Ann. Math. 1981. V. 113. P. 341–421.
- [4] Абросимов А. В. Комплексные дифференциальные системы и касательные уравнения Коши–Римана // Матем. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 419–434.
- [5] Абросимов А. В. Описание локально биголоморфных автоморфизмов стандартных квадрик коразмерности два // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 3–52.