Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич, О разрешимости векторной задачи с помощью алгоритма линейной свертки критериев, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 502–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:08:43

УДК 519.10

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ

М. К. Кравцов, О. А. Янушкевич

Найдены условия, при выполнении которых многокритериальная задача с конечным множеством векторных оценок разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев (ЛСК), т.е. любой паретовский оптимум задачи может быть получен как оптимальное решение однокритериальной задачи с агрегированным критерием, представляющим собой ЛСК. Предложен также полиномиальный относительно размерности задачи алгоритм, позволяющий сводить любую задачу с минимаксными и миниминными критериями к эквивалентной векторной задаче с тем же паретовским множеством, разрешимой с помощью алгоритма ЛСК.

Библиография: 15 названий.

В [1] доказано, что всякий лексикографический оптимум в задаче векторной оптимизации на конечном множестве допустимых решений может быть получен с помощью алгоритма линейной свертки критериев (ЛСК).

В настоящей работе исследуется возможность нахождения всех элементов паретовского множества в многокритериальной (векторной) задаче с конечным множеством векторных оценок. Найдены условия, при выполнении которых такая задача разрешима с помощью алгоритма ЛСК, т.е. любой паретовский оптимум задачи может быть получен как оптимальное решение задачи с одним агрегированным критерием, представляющим собой ЛСК. Предложен также полиномиальный относительно размерности задачи алгоритм, позволяющий сводить любую задачу с критериями вида MIN MAX (критерий “узкого места”) и MIN MIN (миниминный критерий) к векторной задаче с тем же паретовским множеством, но разрешимой с помощью алгоритма ЛСК.

1. Признак разрешимости. Пусть на множестве допустимых решений $X = \{x\}$ задана векторная целевая функция (векторный критерий)

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_r): X \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r \geq 2,$$

с частными критериями

$$f_i(x) \rightarrow \min_X \quad \forall i \in N_r = \{1, 2, \dots, r\}.$$

Работа выполнена при поддержке фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, гранты Ф95-70 и МП96-35.

Отметим, что под множеством допустимых решений X будем понимать множество произвольной природы, состоящее, например, из траекторий, векторов, матриц и т.д.; r -критериальную задачу нахождения паретовского множества

$$\tilde{X} = \{x \in X : \exists x' \in X \quad F(x) \geq F(x'), \quad F(x) \neq F(x')\}$$

будем обозначать через (X, F) .

Известно [2]–[6], что для любой r -критериальной задачи (X, F) справедливо включение

$$X^\circ \subseteq \tilde{X}, \quad (1)$$

где $X^\circ = \{X(\lambda) : \lambda \in \Lambda_r\}$,

$$\Lambda_r = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) : \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i \in N_r \right\},$$

$$X(\lambda) = \arg \min \{ \Phi(x, \lambda) : x \in X \}, \quad \Phi(x, \lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x).$$

Установлено существование таких многокритериальных задач, для которых включение (1) является строгим (см., например, [7]–[9]).

Будем говорить, что r -критериальная задача (X, F) разрешима с помощью алгоритма ЛСК, если выполняется равенство $X^\circ = \tilde{X}$.

В дальнейшем, говоря об r -критериальной задаче (X, F) , будем предполагать, что множество векторных оценок $Y = F(X)$ является конечным.

Для доказательства теоремы о разрешимости нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. Если множество векторных оценок Y r -критериальной задачи (X, F) конечно, то справедливо включение $X^* \subseteq X^\circ$, где

$$X^* = \{x \in X : \exists y \in \operatorname{conv} Y \quad F(x) \geq y, \quad F(x) \neq y\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество векторных оценок Y конечно, то выпуклая оболочка множества Y , являясь выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^r$, представляет собой в силу теоремы Вейля–Минковского (см., например, [10, гл. 1, теорема 2.5]) ограниченный полиэдр

$$\operatorname{conv} Y = \{y \in \mathbb{R}^r : Ay \geq b\},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Для произвольного элемента $x^* \in X^*$ определим вектор

$$\lambda(x^*) = \frac{A^T \hat{v}}{\langle A^T \hat{v}, e \rangle},$$

где $\hat{v}$ – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\langle AF(x^*) - b, v \rangle \rightarrow \min, \quad A^T v \geq e, \quad v \geq 0, \quad (2)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов, $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$. Очевидно, что вектор $\lambda(x^*) \in \Lambda_r$.

Чтобы доказать, что $x^* \in X^\circ$, достаточно обосновать неравенство

$$\Phi(x^*, \lambda(x^*)) \leq \Phi(x, \lambda(x^*)) \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (2),

$$\langle e, u \rangle \rightarrow \max, \quad Au \leq AF(x^*) - b, \quad u \geq 0. \quad (4)$$

Осуществив замену $u = F(x^*) - y$, приходим к задаче

$$\langle e, F(x^*) - y \rangle \rightarrow \max, \quad Ay \geq b, \quad y \leq F(x^*). \quad (5)$$

Поскольку всякое допустимое решение y задачи (5) содержится в $\text{conv } Y$, то заключаем (ввиду $x^* \in X^*$), что для ее оптимального решения $\hat{y}$ справедливо равенство $\hat{y} = F(x^*)$. Поэтому оптимальным решением задачи (4) является вектор $\hat{u} = 0$. Отсюда в силу двойственности задач (2) и (4) имеем $\langle AF(x^*) - b, \hat{v} \rangle = \langle e, \hat{u} \rangle = 0$. Поэтому из неравенства $Ay \geq b$ находим

$$\begin{aligned} \langle AF(x^*), \hat{v} \rangle &= \langle b, \hat{v} \rangle \leq \langle Ay, \hat{v} \rangle \quad \forall y \in \text{conv } Y, \\ \langle A^T \hat{v}, F(x^*) \rangle &\leq \langle A^T \hat{v}, F(x) \rangle \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом выбора вектора $\lambda(x^*)$ имеют место неравенства (3), т.е. $x^* \in X^\circ$. Лемма доказана.

Ранее лемма в несколько иной форме была сформулирована в [11].

Для всякого $i \in N_r$ упорядочим по возрастанию все различные значения целевой функции $f_i(x)$ на множестве X :

$$f_i(x_1^i) < f_i(x_2^i) < \dots < f_i(x_{m_i}^i), \quad m_i \leq |Y|.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$m_i > 1 \quad \forall i \in N_r. \quad (6)$$

Далее для всякого $i \in N_r$ положим $\Delta_i(k, l) = f_i(x_k^i) - f_i(x_l^i)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы r -критериальная задача (X, F) с конечным множеством векторных оценок Y была разрешима с помощью алгоритма ЛСК достаточно, чтобы для любого $i \in N_r$ выполнялись неравенства*

$$r \Delta_i(p+1, 1) \leq \Delta_i(p+2, 1) \quad \forall p \in N_{m_i-2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1) для доказательства теоремы достаточно показать включение $\tilde{X} \subseteq X^\circ$. Доказательство проведем от противного, т.е. пусть существует элемент

$$\tilde{x} \in \tilde{X} \setminus X^\circ. \quad (8)$$

Тогда в силу леммы существует вектор

$$y^\circ \in \{y \in \text{conv } Y : F(\tilde{x}) \geq y, F(\tilde{x}) \neq y\}, \quad (9)$$

удовлетворяющий условию

$$\exists y \in \text{conv } Y \quad y^\circ \geq y, \quad y^\circ \neq y.$$

Отсюда, очевидно, что вектор y° принадлежит некоторой грани G , $\dim G \leq r - 1$, многогранника $\text{conv } Y$. Поэтому на основании соотношений $G = \text{conv } \text{vert } G$, $\text{vert } G \subseteq Y$ (см. [10, гл. 1, теорема 2.2 и следствие 2.4]) и теоремы Каратеодори (см. [10, гл. 1, теорема 1.8]) вектор y° представим в виде

$$y^\circ = \sum_{j=1}^k \alpha_j F(x_j), \quad k \leq r, \quad (10)$$

где $x_j \in X$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \Lambda_k$.

Далее, с учетом (8) для любого числа $j \in N_k$ существуют индекс $i(j) \in N_r$ и числа $p, g \in N_{m_{i(j)}}$, $p < g$, удовлетворяющие соотношениям

$$f_{i(j)}(x_p^{i(j)}) = f_{i(j)}(\tilde{x}) < f_{i(j)}(x_j) = f_{i(j)}(x_g^{i(j)}).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (9) и (10), выводим

$$\begin{aligned} f_{i(j)}(x_p^{i(j)}) &\geq \sum_{s=1}^k \alpha_s f_{i(j)}(x_s) \geq \alpha_j f_{i(j)}(x_{p+1}^{i(j)}) + (1 - \alpha_j) f_{i(j)}(x_1^{i(j)}) \\ &= \alpha_j \Delta_{i(j)}(p+1, 1) + f_{i(j)}(x_1^{i(j)}) \quad \forall j \in N_k, \end{aligned}$$

причем существует такой индекс $j^* \in N_k$, для которого справедливо неравенство

$$f_{i(j^*)}(x_p^{i(j^*)}) > \alpha_{j^*} \Delta_{i(j^*)}(p+1, 1) + f_{i(j^*)}(x_1^{i(j^*)}).$$

Поэтому в силу неравенств (7) получаем

$$\alpha_j \leq \frac{1}{r} \quad \forall j \in N_k, \quad \alpha_{j^*} < \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j < \frac{k}{r} \leq 1,$$

но $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \Lambda_k$. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. r -критериальная задача (X, F) с конечным множеством векторных оценок Y разрешима с помощью алгоритма ЛСК, если выполняются равенства $m_i = 2 \quad \forall i \in N_r$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всякой r -критериальной задачи (X, F) с конечным множеством векторных оценок $Y \subset \mathbb{R}_+^r$ и любого вектора $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r)$ с компонентами

$$\varkappa_i \geq \frac{\log_a r}{\log_a \min \{f_i(x_{j+2}^i)/f_i(x_{j+1}^i) : j \in N_{m_i-2}\}} \quad \forall i \in N_r$$

при $a > 1$ выполняется равенство

$$\tilde{X} = \{X(\lambda, \varkappa) : \lambda \in \Lambda_r\},$$

где

$$X(\lambda, \varkappa) = \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i (f_i(x))^{\varkappa_i} : x \in X \right\}.$$

Отметим, что в [6] был получен аналогичный результат для векторных задач булевого программирования. Однако, предложенная там процедура вычисления нижних оценок для компонент вектора $\varkappa$ является рекуррентной и более трудоемкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 1 перестает быть справедливым, если в ее формулировке неравенства (7) хотя бы для одной пары индексов $i \in N_r, p \in N_{m_i-2}$ заменить на более слабые неравенства

$$r\Delta_i(p+1, 1) - \varepsilon \leq \Delta_i(p+2, 1), \quad (11)$$

где $\varepsilon > 0$.

ПРИМЕР. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $r = 2$,

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 4, & f_1(x_2) &= 2, & f_1(x_3) &= 0, \\ f_2(x_1) &= 0, & f_2(x_2) &= 2, & f_2(x_3) &= 4 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для второго критерия $f_2(x)$ неравенства (7) не выполняются, но выполняются неравенства (11). Однако, эта задача неразрешима с помощью алгоритма ЛСК.

2. Разрешимость траекторных задач. Пусть $E = \{e\}$ – конечное множество элементов мощности n , а $T = \{t\}$ – некоторая совокупность непустых подмножеств множества E , называемых траекториями. На множестве E зададим векторную весовую функцию

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_r): E \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r \geq 2,$$

а на множестве траекторий T – векторную целевую функцию

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_r): T \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

частными критериями которой могут быть критерии двух видов:

$$\begin{aligned} (\text{MIN MAX}) \quad f_i(t) &= M(w_i, t) = \max\{w_i(e) : e \in t\} \rightarrow \min, \\ (\text{MIN MIN}) \quad f_i(t) &= N(w_i, t) = \min\{w_i(e) : e \in t\} \rightarrow \min \end{aligned}$$

в любой комбинации.

В дальнейшем, в качестве множества допустимых решений $X = \{x\}$ будем рассматривать множество траекторий $T = \{t\}$, а задачу нахождения паретовского множества $\tilde{T}$ будем называть *векторной траекторной задачей порядка $r \times n$* и обозначать через $Z_n^r(W) = (E, T, W, F)$.

В схему траекторных задач вкладываются многие широко известные задачи оптимизации на графах, а также задачи булевого программирования (см., например, [8], [9], [12]–[14]).

Упорядочим значения весовой функции $w_i(e)$, $i \in N_r$, на множестве E :

$$w_i(e_1^i) \leq w_i(e_2^i) \leq \dots \leq w_i(e_n^i). \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \min\{|t| : t \in T\}, \\ w_{ij} &= w_i(e_j^i) \quad \forall i \in N_r, \quad \forall j \in N_n, \\ J(i, j) &= \{k \in N_n : w_{ij} < w_{ik}\} \quad \forall i \in N_r, \quad \forall j \in N_n, \\ s(i) &= \max\{j \in N_n : J(i, j) \neq \emptyset\} \quad \forall i \in N_r, \\ l(i, j) &= \min\{k \in J(i, j)\} \quad \forall i \in N_r, \quad \forall j \in N_{s(i)}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу условий (6) для любого $i \in N_r$ существует индекс $j \in N_n$ такой, что $J(i, j) \neq \emptyset$.

Пусть I_{MAX} и I_{MIN} – множества тех чисел из N_r , которыми занумерованы соответственно критерии MIN MAX и MIN MIN.

В силу очевидных включений

$$\{M(w_i, t) : t \in T\} \subseteq \{w_{ij} : q \leq j \leq n\}, \quad \{N(w_i, t) : t \in T\} \subseteq \{w_{ij} : j \in N_{n-q+1}\},$$

справедливых для любого индекса $i \in N_r$, и теоремы 1 имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы векторная траекторная задача $Z_n^r(W)$ была разрешима с помощью алгоритма ЛСК достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} w_{i,l(i,j)} &\geq r w_{ij} - (r-1) w_{iq} & \forall i \in I_{\text{MAX}}, \quad \forall j \in N_{s(i)} \setminus N_{l(i,q)-1}; \\ w_{i,l(i,j)} &\geq r w_{ij} - (r-1) w_{i1} & \forall i \in I_{\text{MIN}}, \quad j = 2, 3, \dots, \min\{n-q, s(i)\}. \end{aligned}$$

3. Алгоритм сведения к разрешимой задаче. В [15] был анонсирован алгоритм сведения любой векторной траекторной задачи с одним критерием произвольной природы и несколькими критериями вида MIN MAX к эквивалентной задаче (с тем же паретовским множеством), разрешимой с помощью алгоритма ЛСК. Ниже приведем алгоритм φ , сводящий любую векторную траекторную задачу $Z_n^r(W) = (E, T, W, F)$ к эквивалентной векторной задаче $Z_n^r(W') = (E, T, W', F)$, разрешимой с помощью алгоритма ЛСК.

Алгоритм φ .

Этап 1. Для любого $i \in N_r$ упорядочим весовые функции $w_i(e)$ на множестве E (см. (12)).

Этап 2 состоит из r шагов, причем на i -м шаге, $i \in N_r$, строится новая весовая функция $w'_i(e)$, $e \in E$. Каждый i -й шаг содержит n подшагов.

k -й подшаг i -го шага, $k \in N_n$, $i \in N_r$.

Если $k \leq l(i, \pi)$, то полагаем $w'_i(e_k^i) = w_i(e_k^i)$, где

$$\pi = \begin{cases} q, & i \in I_{\text{MAX}}, \\ 1, & i \in I_{\text{MIN}}. \end{cases}$$

Если $l(i, \pi) < k \leq \rho$, то

$$w'_i(e_k^i) = \begin{cases} w'_i(e_{k-1}^i) & \text{при } \delta_i(k, k-1) = 0, \\ w'_i(e_\pi^i) + r\delta'_i(k-1, \pi) & \text{при } \delta_i(k, k-1) > 0, \end{cases}$$

где

$$\rho = \begin{cases} n, & i \in I_{\text{MAX}}, \\ n - q + 1, & i \in I_{\text{MIN}}, \end{cases} \quad \delta_i(j, l) = w_i(e_j^i) - w_i(e_l^i), \quad \delta'_i(j, l) = w'_i(e_j^i) - w'_i(e_l^i).$$

Если $\rho < k \leq n$, то $w'_i(e_k^i) = w'_i(e_{k-1}^i)$.

Нетрудно убедиться, что для задачи $Z_n^r(W') = (E, T, W', F)$, $W'(e) = (w'_1(e), w'_2(e), \dots, w'_r(e))$, выполняются условия теоремы 2, а паретовские множества задач $Z_n^r(W)$ и $Z_n^r(W')$ совпадают.

Очевидно, что трудоемкость алгоритма φ оценивается величиной $O(rn \log_2 n)$.

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Алгоритм φ трудоемкости $O(rn \log_2 n)$ сводит любую векторную траекторную задачу $Z_n^r(W)$ к эквивалентной векторной траекторной задаче того же порядка, разрешимой с помощью алгоритма ЛСК.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что r -критериальная задача (X, F) с конечным множеством допустимых решений X и критериями произвольной природы эквивалентна векторной траекторной задаче $Z_n^r(W) = (E, T, W, F)$ с критериями MIN MIN ($N_r = I_{\text{MIN}}$), где $n = |X|$,

$$\begin{aligned} E &= T = N_n, & X &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ W(e) &= (w_1(e), w_2(e), \dots, w_r(e)), & w_i(e) &= f_i(x_e) \quad \forall i \in N_r, \quad \forall e \in E, \\ F &= (f_1, f_2, \dots, f_r): T \rightarrow \mathbb{R}^r, & f_i(t) &= \min\{w_i(e) : e \in t\} \rightarrow \min_T. \end{aligned}$$

Поэтому, если для r -критериальной задачи (X, F) с конечным множеством допустимых решений X неравенства (7) не выполняются, то ее можно свести к эквивалентной траекторной задаче $Z_n^r(W')$ с критериями MIN MIN , разрешимой с помощью алгоритма ЛСК.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А. Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 365–371.
- [2] Geoffrion A. M. Proper efficiency and the theory of vector maximization // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 22. P. 618–630.
- [3] Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982.
- [4] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
- [5] Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
- [6] Burkard R. E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P. M. A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0–1 programming problems // Comput. Oper. Res. 1981. V. 8. № 4. P. 241–247.
- [7] Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная матем. 1994. Т. 6. № 1. С. 3–33.
- [8] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 1. С. 9–11.
- [9] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 7. С. 1082–1094.
- [10] Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
- [11] Гладкий А. А., Янушкевич О. А. О линейной свертке частных критериев векторной задачи минимизации // IX Всероссийская конференция “Математическое программирование и приложения”. Тезисы докладов. Екатеринбург, 1995. С. 67.
- [12] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация, алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
- [13] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О комбинаторных задачах векторной оптимизации // Дискретная матем. 1995. Т. 7. № 1. С. 3–18.
- [14] Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82–89.
- [15] Yemelichev V. A., Kravtsov M. K., Yanushkevich O. A. On solvability of vector problems on systems of subsets using a linear criteria convolution algorithm // 2nd International Conference “Mathematical Algorithms”. Abstracts. Nizhny Novgorod, 1995. P. 21.