Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Красильников, О полугрупповой и лиевской нильпотентности ассоциативных алгебр, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 510–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 08:35:45

УДК 512.552+512.532

О ПОЛУГРУППОВОЙ И ЛИЕВСКОЙ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

А. Н. Красильников

С каждым ассоциативным кольцом R связаны присоединенное кольцо Ли $R^{(-)}$ (с операцией $(a, b) = ab - ba$) и две полугруппы: мультипликативная $M(R)$ и присоединенная $A(R)$ (с операцией $a \circ b = ab + a + b$). Очевидно, что кольцо Ли $R^{(-)}$ коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативна полугруппа $M(R)$ (или $A(R)$). В работе делается попытка обобщить это наблюдение на случай, когда $R^{(-)}$ – нильпотентное кольцо Ли. Доказано, что если R – ассоциативная алгебра с единицей над бесконечным полем F , то алгебра $R^{(-)}$ нильпотентна степени s тогда и только тогда, когда полугруппа $M(R)$ (или $A(R)$) нильпотентна степени s (в смысле А. И. Мальцева или Б. Неймана и Т. Тейлора). В случае, когда R – алгебра без единицы над F , это утверждение остается в силе для $A(R)$, но становится неверным для $M(R)$. Получены и иные подобные результаты.

Библиография: 17 названий.

С каждым ассоциативным кольцом R связаны присоединенное кольцо Ли $R^{(-)}$ (с операцией $(a, b) = ab - ba$) и две полугруппы: мультипликативная $M(R)$ и присоединенная $A(R)$ (с операцией $a \circ b = ab + a + b$). Если R – кольцо с единицей, то полугруппы $M(R)$ и $A(R)$ изоморфны (отображение $\varphi: r \rightarrow r + 1$ является изоморфизмом $A(R)$ на $M(R)$), если же R не содержит единицы, то $M(R)$ и $A(R)$ неизоморфны (полугруппа $M(R)$ в этом случае не содержит единицы, а полугруппа $A(R)$ содержит).

Очевидно, что кольцо Ли $R^{(-)}$ коммутативно тогда и только тогда, когда полугруппа $M(R)$ (или $A(R)$) коммутативна. Можно ли обобщить этот факт на случай, когда $R^{(-)}$ – нильпотентное кольцо Ли? Обобщением понятия коммутативности для полугрупп являются понятия нильпотентности по А. И. Мальцеву [1], Б. Нойману и Т. Тейлору [2] и понятие строгой нильпотентности по В. Э. Шпильрайну [3] (точные определения этих понятий приводятся ниже). Перечисленные понятия, вообще говоря, попарно неэквивалентны, но оказываются эквивалентными для полугрупп, рассматриваемых в данной статье. Далее, если не оговорено иное, под *нильпотентностью полугруппы* мы понимаем нильпотентность в смысле любой из работ [1]–[3].

Для ассоциативного кольца R возникают следующие вопросы.

ВОПРОС 1. Если $M(R)$ (или $A(R)$) – нильпотентная полугруппа степени s , то будет ли нильпотентным кольцо Ли $R^{(-)}$ (если да, то какой степени нильпотентности)?

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01185.

ВОПРОС 2. Если $R^{(-)}$ – нильпотентное ступени s кольцо Ли, то будет ли нильпотентной полугруппа $M(R)$ (или $A(R)$) (если да, то какой ступени нильпотентности)?

Исчерпывающий ответ на оба вопроса удастся получить в случае, когда R – алгебра над бесконечным полем. Если R – алгебра с единицей, то такой ответ для полугруппы $M(R)$ дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – алгебра с единицей над бесконечным полем. Тогда

- 1) если $M(R)$ – нильпотентная ступени s полугруппа, то $R^{(-)}$ – нильпотентная ступени s алгебра Ли;
- 2) если $R^{(-)}$ – нильпотентная ступени s алгебра Ли, то $M(R)$ – нильпотентная ступени s полугруппа.

На алгебры без единицы распространить теорему 1 в такой формулировке нельзя: ответ на вопрос 1 для полугруппы $M(R)$ оказывается для таких алгебр, вообще говоря, отрицательным, как показывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть F – поле характеристики 2, $F[t_i \mid i \in \mathbb{N}]$ – алгебра многочленов над F , I – идеал в $F[t_i \mid i \in \mathbb{N}]$, порожденный элементами t_i^2 ($i \in \mathbb{N}$). Пусть $R = F[t_i \mid i \in \mathbb{N}]/I$, M – свободный циклический модуль над R ,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– кольцо матриц.

Тогда $M(R)$ – нильпотентная ступени 2 полугруппа, но алгебра Ли $\hat{R}^{(-)}$ не является нильпотентной.

Если R – ассоциативная алгебра над бесконечным полем (с единицей или без таковой), то исчерпывающий ответ на вопросы 1, 2 для полугруппы $A(R)$ дает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – алгебра над бесконечным полем (необязательно содержащая единицу). Тогда

- 1) если $A(R)$ – нильпотентная ступени s полугруппа, то $R^{(-)}$ – нильпотентная ступени s алгебра Ли;
- 2) если $R^{(-)}$ – нильпотентная ступени s алгебра Ли, то $A(R)$ – нильпотентная ступени s полугруппа.

Эта теорема, получающаяся как следствие предложений 4 и 5 (см. ниже), обобщает теорему 1, так как для алгебры R с единицей полугруппы $A(R)$ и $M(R)$ изоморфны.

Для произвольных ассоциативных колец удастся получить исчерпывающий ответ на вопрос 2 (как для полугруппы $M(R)$, так и для $A(R)$), что же касается вопроса 1, ответ на него получен только в некоторых частных случаях.

Ответ на вопрос 2 дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть R – ассоциативное кольцо такое, что $R^{(-)}$ – нильпотентное ступени s кольцо Ли.

Тогда $M(R)$ и $A(R)$ – нильпотентные ступени не выше s полугруппы.

Н. Гупта и Ф. Левин [4] доказали, что если присоединенное кольцо Ли $R^{(-)}$ ассоциативного кольца R нильпотентно ступени s , то группа $U(R)$ единиц кольца R также нильпотентна ступени не выше s (несколько позже эквивалентное утверждение независимо

доказал также Х. Лауэ [5]). Предложение 4 обобщает этот результат, поскольку любая группа G является нильпотентной ступени s полугруппой тогда и только тогда, когда G' – нильпотентная ступени s группа. Отметим, однако, что в доказательстве предложения 4 теорема Гупты и Левина существенно используется. Предложение 4 и теорема 3 были впервые анонсированы в [6].

В некоторых случаях ответ на вопрос 1 для полугруппы $A(R)$ дает следующее предложение (определения и основные свойства многообразий ассоциативных колец и свободных колец многообразий см. в [7], [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть R – ассоциативное кольцо такое, что свободные кольца многообразия, порожденного R , нильпотентно аппроксимируемы, т.е. если B – свободное кольцо (без единицы) многообразия, порожденного R , то $\bigcap_{n=1}^{\infty} B^n = \{0\}$. Пусть $A(R)$ – нильпотентная ступени s полугруппа. Тогда $R^{(-)}$ – нильпотентное ступени s кольцо Ли.

Очевидным следствием предложений 4 и 5 является теорема 3. Из этих предложений также вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть R – нилькольцо или кольцо без аддитивного кручения, присоединенная полугруппа $A(R)$ которого нильпотентна ступени s .

Тогда кольцо Ли $R^{(-)}$ нильпотентно ступени s .

Пусть G – локально конечная p -группа, F – поле простой характеристики p . Так как фундаментальный идеал групповой алгебры FG локально нильпотентен, то из следствия 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7 [9]. Пусть G – локально конечная p -группа, F – поле простой характеристики p .

Тогда присоединенная алгебра Ли $FG^{(-)}$ групповой алгебры FG нильпотентна ступени s тогда и только тогда, когда группа $U(FG)$ всех единиц алгебры FG нильпотентна ступени s .

Еще в одном частном случае на вопрос 1 для полугруппы $A(R)$ дает положительный ответ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть R – ассоциативное кольцо, присоединенная полугруппа $A(R)$ которого нильпотентна ступени 2.

Тогда $R^{(-)}$ – нильпотентное ступени 2 кольцо Ли.

Подчеркнем, что в общем случае (для ассоциативных колец, не удовлетворяющих условию предложения 5) остается открытой следующая

ПРОБЛЕМА. Верно ли, что присоединенное кольцо Ли $R^{(-)}$ ассоциативного кольца R нильпотентно ступени s тогда и только тогда, когда присоединенная полугруппа $A(R)$ нильпотентна ступени s в смысле какой-либо из работ [1]–[3]?

Если в формулировку этой проблемы добавить, что R – радикальное кольцо в смысле Джекобсона (в этом случае $A(R)$ – группа), мы получим проблему Дженнинга [10], рассматривавшуюся в работах [10], [5], [11] и окончательно решенную в работе [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если R – алгебра над полем характеристики 0 и $M(R)$ – нильпотентная полугруппа, то, как следует из работы И. З. Голубчика и А. В. Михалёва [12], $R^{(-)}$ – энгелева ограниченной ступени, а значит, и нильпотентная [13] алгебра Ли, вообще говоря, более высокой, чем $M(R)$, ступени нильпотентности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полугруппа называется *нильпотентной ступени c в смысле Малъцева* [1], если она удовлетворяет тождеству $U_{c+1} = V_{c+1}$, но не удовлетворяет тождеству $U_c = V_c$, где $U_0 = x$, $V_0 = y$, $U_{k+1} = U_k z_k V_k$, $V_{k+1} = V_k z_k U_k$ ($k = 1, 2, \dots$), а $x, y, z_0, z_1, \dots$ – переменные. Если в этом определении положить $z_0 = 1$, получится определение *нильпотентной ступени c полугруппы по Нойману и Тейлор* [2]. Наконец, полугруппа *строго нильпотентна ступени не выше c по Шпильрайну* [3], если она удовлетворяет всем полугрупповым тождествам свободной нильпотентной ступени c группы счетного ранга. Перечисленные понятия нильпотентности полугруппы, как уже упоминалось, попарно неэквивалентны (см. [14]). Из результатов [1], [2] сразу следует, что строго нильпотентная ступени c полугруппа является нильпотентной ступени c и в смысле [1], [2]. Очевидно, что полугруппа с единицей, нильпотентная ступени c в смысле [1], нильпотентна ступени не выше c в смысле [2]. Отметим, что рассматриваемые в настоящей заметке полугруппы, нильпотентные ступени c в смысле одной из работ [1]–[3], оказываются нильпотентными ступени c и в смысле остальных работ.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} (x, y) &= xy - yx, & (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &= ((x_1, \dots, x_k), x_{k+1}), \\ [x, y] &= x^{-1}y^{-1}xy, & [x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] &= [[x_1, \dots, x_k], x_{k+1}], \end{aligned} \quad k = 2, 3, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. В силу замечания 2 достаточно доказать, что полугруппа $M(R)$ удовлетворяет всем полугрупповым тождествам свободной нильпотентной ступени 2 группы G счетного ранга, т.е. тождествам группы G вида

$$x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k} \equiv x_{j_1}^{n_1} \cdots x_{j_l}^{n_l},$$

где $m_i, n_j \geq 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{r}_i \in \hat{R}$ ($i = 1, \dots, k+1$), причем $\hat{r}_{i_1} = \hat{r}_{i_2}$ для некоторых i_1, i_2 ($1 \leq i_1 < i_2 \leq k$).

Тогда $\hat{r}_1 \cdots \hat{r}_k \hat{r}_{k+1} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\hat{r}_i = \begin{pmatrix} r_i & m_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r_i \in R, m_i \in M$ ($i = 1, \dots, k+1$). Тогда

$$\hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{k+1} = \begin{pmatrix} r_1 \cdots r_{k+1} & r_1 \cdots r_k m_{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но $r_{i_1} r_{i_2} = r_{i_1}^2 = 0$, поэтому $r_1 \cdots r_k = 0$ и $\hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{k+1} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\hat{r}_i \in \hat{R}$ ($i = 1, \dots, k$), причем $\hat{r}_{i_1} = \hat{r}_{i_2}$, $\hat{r}_{j_1} = \hat{r}_{j_2}$ ($i_1 < i_2, j_1 < j_2, i_1 \neq j_1$).

Тогда $\hat{r}_1 \hat{r}_2 \cdots \hat{r}_k = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

– нетривиальное полугрупповое тождество, выполняющееся в свободной нильпотентной степени 2 группе G счетного ранга. Тогда

- 1) мономы f и g имеют одинаковые степени по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$;
- 2) в f (а значит, и в g) по крайней мере две переменные входят в степени не ниже 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $f(x_1, 1, \dots, 1) = g(x_1, 1, \dots, 1)$ получаем, что x_1 входит в f и g в одинаковой степени. Аналогично проверяется утверждение 1) для $x_2, \dots, x_n$.

Докажем, что выполняется и утверждение 2). Прежде всего отметим, что G не удовлетворяет нетривиальным полилинейным тождествам, т.е. тождествам вида

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} \equiv x_{j_1} \cdots x_{j_n}, \quad (2)$$

где каждая переменная x_k ($k = 1, \dots, n$) входит в левую и правую части тождества ровно по одному разу. Действительно, если $x_1, \dots, x_n$ – различные свободные порождающие группы G , то

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} = x_1 \cdots x_n \prod [x_{i_l}, x_{i_m}],$$

где произведение берется по тем парам l, m , $1 \leq l, m \leq n$, для которых i_l, i_m составляют инверсию в перестановке $i_1, \dots, i_n$ (т.е. $l < m$, но $i_l > i_m$). Поэтому в каждом тождестве вида (2) перестановки $i_1, \dots, i_n$ и $j_1, \dots, j_n$ имеют одинаковые наборы инверсий и потому совпадают: $i_l = j_l$ ($l = 1, 2, \dots, n$).

Пусть теперь в G выполнено тождество

$$y^{k_{10}} x_{i_1} y^{k_{11}} \cdots x_{i_n} y^{k_{1n}} = y^{k_{20}} x_{j_1} y^{k_{21}} \cdots x_{j_n} y^{k_{2n}}, \quad (3)$$

где $k_{ij} \geq 0$, а все переменные, кроме y , входят в левую и правую части тождества (3) в степени 1. Подставляя в (3) $y = 1$, получаем полилинейное тождество, выполняющееся в G , откуда $i_l = j_l$ ($l = 1, 2, \dots, n$). Если же $x_1, \dots, x_n, y$ – различные свободные порождающие группы G , то

$$y^{k_{s0}} x_{i_1} y^{k_{s1}} \cdots x_{i_n} y^{k_{sn}} = x_{i_1} \cdots x_{i_n} y^{q_n} [y, x_{i_1}]^{q_{s1}} \cdots [y, x_{i_n}]^{q_{sn}},$$

где

$$q_s = \sum_{i=0}^n k_{si}, \quad q_{sr} = \sum_{i=0}^{r-1} k_{si}, \quad r = 1, \dots, n, \quad s = 1, 2.$$

Отсюда вытекает, что в (3) $k_{1i} = k_{2i}$ для всех i , $0 \leq i \leq n$.

Таким образом, в группе G нет нетривиальных полугрупповых тождеств, в которые менее двух переменных входят в степени, большей 1.

Из леммы 2 и следствия из леммы 1 сразу следует, что для любого нетривиального полугруппового тождества (1) группы G и любых $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n \in \hat{R}$ выполнено

$$f(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n) = 0 = g(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n),$$

т.е. полугруппа $M(R)$ действительно удовлетворяет всем полугрупповым тождествам группы G .

Остается отметить, что алгебра Ли $\widehat{R}^{(-)}$ не является нильпотентной. Действительно, полагая

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где m – свободный порождающий модуля M ,

$$x_k = \begin{pmatrix} t_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \dots, n,$$

получим

$$(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & t_2 \cdots t_n m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Предложение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Прежде всего отметим, что лиевски нильпотентное ступени c ассоциативное кольцо остается таковым и после присоединения единицы, поэтому без ограничения общности можно считать, что R – кольцо с единицей. В этом случае $M(R) \simeq A(R)$ и предложение достаточно доказать для $A(R)$.

Пусть B – свободное кольцо (без единицы) многообразия ассоциативных колец, определяемого тождеством

$$(x_1, x_2, \dots, x_{c+1}) \equiv 0; \quad (4)$$

пусть $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ – множество свободных порождающих кольца B . Для доказательства предложения достаточно доказать, что подполугруппа S присоединенной полугруппы $A(B)$, порожденная элементами x_i ($i = 1, 2, \dots$), вкладывается в нильпотентную ступени c группу.

Пусть B_1 – кольцо, полученное из B присоединением единицы; тогда подполугруппа мультипликативной полугруппы $M(B_1)$, порожденная элементами $1 + x_i$ ($i = 1, 2, \dots$), изоморфна S .

Пусть $\overline{B}_1$ – пополнение кольца B_1 относительно B -адической топологии (т.е. топологии, определяемой цепью идеалов $B \supseteq B^2 \supseteq \dots \supseteq B^n \supseteq \dots$). Так как (4) – полилинейное тождество, то B – градуированное кольцо и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B^n = \{0\};$$

значит $B_1 \subseteq \overline{B}_1$. Элементы $1 + x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) обратимы в $\overline{B}_1$ и порождают некоторую группу G по умножению. Так как кольцо $\overline{B}_1$ удовлетворяет тождеству (4), то по упомянутой выше теореме Гупты и Левина [4] группа G нильпотентна ступени не выше c (в действительности, из конструкции Магнуса [15, гл. 5] вытекает, что G – свободная нильпотентная ступени c группа). Таким образом, S – подполугруппа нильпотентной ступени c группы. Предложение 4 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Предложение достаточно доказать для любого нильпотентного кольца, т.е. кольца, удовлетворяющего тождеству

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} \equiv 0 \quad (5)$$

для некоторого n , поскольку многообразие, порожденное R , порождается своими нильпотентными кольцами. Для нильпотентного кольца K присоединенная полугруппа $A(K)$ является группой; если $A(K)$ при этом – нильпотентная полугруппа ступени c , то $A(K)$ – нильпотентная ступени c группа. Если кольцо K удовлетворяет тождеству (5), то $A(K)$ – нильпотентная ступени не выше c группа тогда и только тогда, когда K удовлетворяет тождеству $f \equiv 0$, где

$$f = f(x_1, \dots, x_{c+1}) = [1 + x_1, \dots, 1 + x_{c+1}] - 1,$$

а

$$(1 + x_i)^{-1} = \sum_{l=0}^n (-1)^l x_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, c+1.$$

Нетрудно проверить, что $f = (x_1, \dots, x_{c+1}) + \bar{f}$, где $\bar{f}$ – полином, все мономы которого имеют степень не меньше $c+2$ и каждую переменную $x_1, \dots, x_{c+1}$ содержат в ненулевой степени.

Пусть D – свободное кольцо (без единицы) многообразия, определяемого тождеством (5), и $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ – множество свободных порождающих кольца D . Пусть L_c и S_c – T -идеалы в D , порожденные полиномами $(x_1, x_2, \dots, x_{c+1})$ и f соответственно (понятие T -идеала см. в [7]). Из теоремы Гупты и Левина [4] вытекает, что $S_c \subseteq L_c$, поэтому для обоснования равенства $S_c = L_c$ достаточно доказать, что $S_c + D^n = L_c + D^n$ и $S_c \cap D^n = L_c \cap D^n$. Так как равенство $S_c + D^n = L_c + D^n$ можно считать выполненным по индукционным соображениям (индукция по n), то остается доказать равенство $S_c \cap D^n = L_c \cap D^n$.

Идеал $L_c \cap D^n$ порождается как абелева группа по сложению полиномами вида $y_0(y_1, \dots, y_{c+1})y_{c+2}$, где y_i – мономы (y_0 или y_{c+2} могут отсутствовать),

$$\sum_{i=0}^{c+2} \deg y_i = n.$$

Однако,

$$y_0(y_1, \dots, y_{c+1})y_{c+2} = y_0 f(y_1, \dots, y_{c+1})y_{c+2} \in S_c \cap D^n,$$

так как $y_0 \bar{f}(y_1, \dots, y_{c+1})y_{c+2} \in D^{n+1} = \{0\}$. Следовательно, $L_c \cap D^n \subseteq S_c \cap D^n$ и потому $S_c \cap D^n = L_c \cap D^n$.

Предложение 5 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Если R – нилькольцо, то его присоединенная полугруппа $A(R)$ является группой. Если к тому же $A(R)$ – нильпотентная ступени c полугруппа, то $A(R)$ – нильпотентная группа ступени c . Отсюда следует, что R – локально нильпотентное кольцо (см. [16, теорема 1], а также [17]). Значит, порожденное R многообразие порождается нильпотентными кольцами и свободные кольца этого многообразия нильпотентно аппроксимируемы.

Пусть R – ассоциативное кольцо без аддитивного кручения (т.е. для любых целого n и $r \in R$ из $n \cdot r = 0$ следует $n = 0$ или $r = 0$). Так же, как для алгебр над полем характеристики 0, можно доказать, что существует базис тождеств R , состоящий из полиоднородных тождеств. Отсюда в свою очередь следует, что свободные кольца многообразия, порожденного R , нильпотентно аппроксимируемы.

Следствие 6 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. В силу замечания 2 достаточно рассмотреть случай, когда $A(R)$ – нильпотентная степени 2 полугруппа в смысле [2], т.е. когда R удовлетворяет тождеству $f \equiv 0$, где

$$f = f(x, y, z) = (1+x)(1+y)(1+z)(1+y)(1+x) - (1+y)(1+x)(1+z)(1+x)(1+y).$$

Пусть A – свободное ассоциативное кольцо со свободными порождающими $x, y, z, x_1, x_2, \dots, L$ и S – T -идеалы в A , порожденные полиномами (x, y, z) и f соответственно. Нужно доказать, что $L \subseteq S$ или, что эквивалентно, $(x, y, z) \in S$.

ЛЕММА 3. *Выполнено $4(x, y, z) \in S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$h = f(2x, 2y, z) - 4f(2x, y, z) - 4f(x, 2y, z) + 16f(x, y, z).$$

Очевидно, что $h \in S$; покажем, что $h = 4(x, y, z)$. Действительно, легко проверить, что h не содержит мономов, имеющих по паре переменных x, y степени $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, а мономы степени $(1, 1)$ полинома f входят в h с коэффициентом 4. Мономов, имеющих степень 0 хотя бы по одной переменной x, y , как видно из равенства

$$f(x, y, z) = (x, y)(1+z)(1+y)(1+x) - (1+y)(1+x)(1+z)(x, y),$$

полином f не содержит, значит их не содержит и h . Из этого же равенства видно, что сумма мономов полинома f , имеющих степень $(1, 1)$ по x, y , есть

$$(x, y)(1+z) - (1+z)(x, y) = (x, y, z).$$

Значит, $h = 4(x, y, z)$.

Нам осталось доказать, что $(x, y, z) \in S + 2L$. Действительно, пусть $(x, y, z) = f_1 + 2f_2$, где $f_1 \in S$, $f_2 \in L$. Так как по лемме 3 $4L \subseteq S$, то $2(x, y, z) = 2f_1 + 4f_2 \in S + 4L = S$. Значит, $2L \subseteq S$, но тогда $(x, y, z) \in S = S + 2L$.

ЛЕММА 4. *Выполнено $(x, y, y) \in S + 2L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим прежде всего, что

$$f(x, y, 0) = (x, y, (1+x)(1+y)). \quad (6)$$

Значит,

$$(x, y, y + y^2) = f(x + y, y, 0) - f(x, y, 0) \in S,$$

т.е. $(x, y, y) = -(x, y, y^2) \pmod{S}$. Но

$$\begin{aligned}(x, y, y^2) &= y(x, y, y) + (x, y, y)y = -(x, y, y, y) + 2((x, y, y, y) + y(x, y, y)) \\ &= -(x, y, y, y) \pmod{2L},\end{aligned}$$

поэтому

$$(x, y, y) = (x, y, y, y) \pmod{S + 2L}; \quad (7)$$

в частности,

$$((x, y, y), (x, y, y, y)) = 0 \pmod{S + 2L}. \quad (8)$$

Используя (6)–(8), получаем

$$\begin{aligned}f((x, y, y), y, 0) &= ((x, y, y, y), (x, y, y) + y + (x, y, y)y) \\ &= (x, y, y, y, y) + (x, y, y)(x, y, y, y, y) \\ &\quad + ((x, y, y, y), (x, y, y)) + ((x, y, y, y), (x, y, y))y \\ &= (x, y, y) + (x, y, y)^2 \pmod{S + 2L}.\end{aligned}$$

Значит,

$$(x, y, y) + (x, y, y)^2 = 0 \pmod{S + 2L}, \quad (9)$$

откуда

$$((x, y, y) + (x, y, y)^2, y) = 0 \pmod{S + 2L}. \quad (10)$$

В то же время в силу (7)

$$\begin{aligned}((x, y, y) + (x, y, y)^2, y) &= (x, y, y, y) + (x, y, y)(x, y, y, y) + (x, y, y, y)(x, y, y) \\ &= (x, y, y) + 2(x, y, y)^2 \pmod{S + 2L},\end{aligned}$$

так что из (10) следует

$$(x, y, y) + 2(x, y, y)^2 = 0 \pmod{S + 2L}.$$

Из этого равенства и из (9) следует, что $(x, y, y) = 0 \pmod{S + 2L}$.

Из леммы 4 следует, что

$$(x, y, z) + (x, z, y) = ((x, y + z, y + z) - (x, y, y) - (x, z, z)) \in S + 2L,$$

т.е. $(x, y, z) = (z, x, y) \pmod{S + 2L}$. Отсюда из тождества Якоби следует, что $3(x, y, z) = 0 \pmod{S + 2L}$, а так как $2(x, y, z) \in 2L$, то $(x, y, z) \in S + 2L$. Отсюда, как отмечалось выше, вытекает, что $(x, y, z) \in S$.

Предложение 8 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. Нильпотентные полугруппы // Уч. записки Ивановского пед. ин-та. 1953. Т. 4. С. 107–111; // Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1976. С. 335–339.
- [2] Neumann B. H., Taylor T. Subsemigroups of nilpotent groups // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1963. V. 274. P. 1–4.
- [3] Шпильрайн В. Э. Об одном определении нильпотентности для полугрупп // Международная конференция по алгебре. Тезисы докладов по теории моделей и алгебраических систем. Новосибирск, 1989. С. 157.
- [4] Gupta N., Levin F. On the Lie ideals of a ring // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 225–231.
- [5] Laue H. On the associated Lie ring and the adjoint group of a radical ring // Canad. Math. Bull. 1984. V. 27. P. 215–222.
- [6] Красильников А. Н. Несколько замечаний о нильпотентности присоединенной полугруппы и присоединенной алгебры // Международная конференция по алгебре (Барнаул). Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1991. С. 58.
- [7] Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К. Некоммутативные кольца // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–116.
- [8] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1987. С. 117–240.
- [9] Du X. K. The centers of a radical ring // Canad. Math. Bull. 1992. V. 35. P. 174–179.
- [10] Jennings S. Radical rings with nilpotent associated groups // Trans. Roy. Soc. Canada (3) 1955. V. 49. № 3. P. 31–38.
- [11] Смирнов М. Б. Строение, лиева структура и присоединенные группы некоторых типов PI -колец и колец с инволюцией. Дисс. ... к. ф.-м. н. Минск, 1984.
- [12] Голубчик И. З., Михалёв А. В. О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 2. С. 8–11.
- [13] Кемер А. Р. О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. С. 255–283.
- [14] Зимин А. И. О полугруппах, нильпотентных в смысле Мальцева // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 23–29.
- [15] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [16] Залесский А. Е. Разрешимые подгруппы мультипликативной группы локально конечной алгебры // Матем. сб. 1963. Т. 61. С. 408–417.
- [17] Lanski C. Some remarks on rings with solvable units // Ring Theory. New York–London: Acad. Press, 1972.