Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Об ориентируемых вещественных алгебраических M -поверхностях, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 520–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:37:55

УДК 512.7

ОБ ОРИЕНТИРУЕМЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ M -ПОВЕРХНОСТЯХ

В. А. Краснов

Изучаются соотношения между классами гомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической M -поверхности. Доказываются новые сравнения для эйлеровых характеристик компонент множества вещественных точек такой поверхности.

Библиография: 9 названий.

Формулировка результатов. Пусть X – неособая проективная вещественная алгебраическая M -поверхность, предполагается, что множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ ориентируемое, а группа гомологий $H_*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная. Пусть $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности множества $X(\mathbb{R})$, они определяют классы гомологий $x_1, \dots, x_s \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$.

ТЕОРЕМА 1. *Между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$ существует $q + 1$ линейно независимых соотношений, где q – иррегулярность поверхности X .*

Заметим, что больше чем $q + 1$ линейно независимых соотношений между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$ быть не может, этот факт доказан в [1]. Далее, через χ_k будем обозначать эйлерову характеристику компоненты X_k , $k = 1, \dots, s$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\chi_k \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, $\mu \geq 1$, $k = 1, \dots, s$, $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = 0$, то имеет место сравнение $\chi_{i_1} + \dots + \chi_{i_n} \equiv 0 \pmod{2^{\mu+2}}$.*

Если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, то единственное соотношение между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$ имеет вид $x_1 + \dots + x_s = 0$, для описания возможных соотношений в общем случае нужно применять отображение Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A$. Множество комплексных точек многообразия Альбанезе $A(\mathbb{C})$ является комплексным тором с антиголоморфной инволюцией $\theta: A(\mathbb{C}) \rightarrow A(\mathbb{C})$. Так как X – M -поверхность, то A является M -многообразием, и пару $(A(\mathbb{C}), \theta)$ топологически можно отождествлять с комплексным тором $\mathbb{C}^q/\mathbb{Z}^q$, на котором инволюция задается комплексным сопряжением (см. [2], [3]). Множество вещественных точек $A(\mathbb{R})$ представляет собой объединение 2^q вещественных торов. Через $A(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, обозначим объединение тех компонент $A(\mathbb{R})$, которые при проекции $\pi_i: \mathbb{C}^q/\mathbb{Z}^q \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\pi_i(z_1, \dots, z_q) = z_i$, отображаются в кривую $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Через $X(\mathbb{R})^{(i)}$ обозначим объединение компонент $X(\mathbb{R})$, которые при отображении Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A$ отображаются в $A(\mathbb{R})^{(i)}$.

ТЕОРЕМА 3. *Классы гомологий $[X(\mathbb{R})]$, $[X(\mathbb{R})^{(i)}]$, $i = 1, \dots, q$, равны 0 в группе $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, причем соответствующие им соотношения между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$ образуют базис соотношений.*

В случае, когда базис отображения Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A$ является кривой, появляется еще одна возможность получения базиса соотношений между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$. Итак, пусть $C = \alpha(X)$ – кривая, тогда C не имеет особых точек (см. [4, с. 49]). Кривая C будет M -кривой, так как гомоморфизм

$$\alpha_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом, и инволюция комплексного сопряжения действует на группе $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ тривиально. Следовательно, число компонент связности множества $C(\mathbb{R})$ равно $q + 1$, обозначим их через $C_1, \dots, C_{q+1}$, а через $X(\mathbb{R})_i$ обозначим объединение компонент $X(\mathbb{R})$, которые отображаются в C_i , $i = 1, \dots, q + 1$.

ТЕОРЕМА 4. *Классы гомологий $[X(\mathbb{R})_i]$, $i = 1, \dots, q + 1$, равны 0 в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, причем соответствующие им соотношения между классами гомологий $x_1, \dots, x_s$ образуют базис соотношений.*

Доказательство результатов. Сначала введем следующие обозначения. Пусть G – группа Галуа $G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, она имеет второй порядок и действует на множестве комплексных точек $X(\mathbb{C})$. Факторпространство $X(\mathbb{C})/G$ обозначим через Y , а проекцию $X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – через f . Множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ можно рассматривать вложенным в Y , поэтому компоненты $X_1, \dots, X_s$ определяют классы гомологий $y_1, \dots, y_s \in H_2(Y, \mathbb{F}_2)$. Число линейно независимых соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$ можно вычислить следующим образом. Так как Y является дифференцируемым многообразием, то определен гомоморфизм Гизина

$$j^*: H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{F}_2). \quad (1)$$

Обозначим через $\kappa(Y)$ размерность ядра этого гомоморфизма, тогда число $\kappa(Y)$ равно числу линейно независимых соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$. Итак, нужно вычислить число $\kappa(Y)$. Гомоморфизм Гизина (1) включается в следующую точную последовательность (см. [5]):

$$0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j^*} H^2(Y, \mathbb{F}_2), \quad (2)$$

которая получается из первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, выполняется равенство

$$\kappa(Y) = \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2). \quad (3)$$

Так как X является M -поверхностью, то

$$\dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 1 + \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 1 + 2q. \quad (4)$$

Покажем теперь, что

$$\dim H^1(Y, \mathbb{F}_2) = q. \quad (5)$$

Действительно, из того, что X — M -поверхность, а группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, следует, что X является $GM\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [6]), поэтому гомоморфизм

$$f^*: H^*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

является вложением (см. [7]). Следовательно, группа $H^*(Y, \mathbb{Z})$ свободная, тогда

$$\dim H^1(X, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(Y, \mathbb{Q}) = \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^G = q.$$

Теперь из (3)–(5) получаем равенство $\kappa(Y) = q + 1$. Тем самым, доказана

ЛЕММА 1. *Число линейно независимых соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$ равно $q + 1$.*

Введем дополнительные обозначения. Выберем ориентацию на топологических поверхностях $X_1, \dots, X_s$, тогда они определяют классы гомологий в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ и $H_2(Y, \mathbb{Z})$, которые обозначим через $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ и $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ соответственно. Гомоморфизм Гизина

$$H_2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

для отображения $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ обозначим через f^* , тогда выполняются равенства

$$f^*(\mathbf{y}_k) = 2\mathbf{x}_k, \quad k = 1, \dots, s, \quad (6)$$

$$H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G = f^*H_2(Y, \mathbb{Z}) + \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s), \quad (7)$$

где $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ — линейная оболочка элементов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$. Равенство (6) всегда выполняется, а равенство (7) следует из того, что X является $GM\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [5]). Покажем теперь, что справедлива

ЛЕММА 2. *Из соотношения $\mathbf{y}_{i_1} + \dots + \mathbf{y}_{i_n} \equiv 0 \pmod{2}$ следует соотношение $\mathbf{x}_{i_1} + \dots + \mathbf{x}_{i_n} \equiv 0 \pmod{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как X — M -поверхность, то имеет место разложение (см. [8])

$$H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+ \oplus H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-, \quad (8)$$

где

$$H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\pm} = \{a \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \mid \tau^*(a) = \pm a\},$$

а $\tau: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ — инволюция комплексного сопряжения.

Группы $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+$, $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-$ ортогональны относительно индекса пересечения, $\mathbf{x}_{i_1} + \dots + \mathbf{x}_{i_n} \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+$, поэтому достаточно проверить, что индекс пересечения $a \cdot (\mathbf{x}_{i_1} + \dots + \mathbf{x}_{i_n})$ делится на 2 при каждом $a \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+$. Но из (6) получаем равенство

$$\mathbf{x}_{i_1} + \dots + \mathbf{x}_{i_n} = f^*\left(\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{i_1} + \dots + \mathbf{y}_{i_n})\right).$$

Осталось применить формулу (7) и равенства $\mathbf{x}_k^2 = -\chi_k$, $k = 1, \dots, s$. Лемма 2 доказана.

Заметим теперь, что из лемм 1, 2 следует теорема 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем сначала, что существует соотношение

$$l_1 x_1 + \cdots + l_s x_s \equiv 0 \pmod{2^\mu}, \quad (9)$$

где числа $l_{i_1}, \dots, l_{i_n}$ нечетные, а остальные числа l_k четные. При $\mu = 1$ существование соотношения (9) очевидно, так как $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = 0$. Пусть $\mu \geq 2$. Предположим, что соотношения вида (9) не существует, тогда обозначим через ν максимальное целое число, для которого существует соотношение

$$l_1 x_1 + \cdots + l_s x_s \equiv 0 \pmod{2^\nu},$$

где числа $l_{i_1}, \dots, l_{i_n}$ нечетные, а остальные числа l_k четные. Положим

$$h = \frac{1}{2^\nu} (l_1 x_1 + \cdots + l_s x_s)$$

и заметим, что можно так изменить числа $l_1, \dots, l_s$, что $h \in f^*(Y, \mathbb{Z})$. Действительно, в силу разложения (7) существуют целые числа $m_1, \dots, m_s$ такие, что

$$h + \sum_{k=1}^s m_k x_k \in f^* H_2(Y, \mathbb{Z}).$$

Осталось заменить l_k на $l_k + m_k \cdot 2^\nu$. Так как $x_k^2 = -\chi_k$, $\nu < \mu$, то в силу разложения (7) получаем, что индекс пересечения $a \cdot h$ является четным для любого элемента $a \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$, а в силу разложения (8) он будет четным для любого элемента $a \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Следовательно, элемент h четный, что противоречит выбору числа ν . Итак, соотношение вида (9) существует. Положим

$$h = \frac{1}{2^\mu} (l_1 x_1 + \cdots + l_s x_s),$$

изменим числа $l_1, \dots, l_s$ так, чтобы $h \in f^* H_2(Y, \mathbb{Z})$, тогда h^2 – четное число, следовательно, выполняется сравнение

$$l_1^2 x_1^2 + \cdots + l_s^2 x_s^2 \equiv 0 \pmod{2^{2\mu+1}}. \quad (10)$$

Так как $x_k^2 = -\chi_k \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, $l_k^2 \equiv 1 \pmod{8}$ при $k = i_1, \dots, i_n$ и $l_k^2 \equiv 0 \pmod{4}$ для других значений k , то из (10) получаем $\chi_{i_1} + \cdots + \chi_{i_n} \equiv 0 \pmod{2^{\mu+2}}$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Сначала введем дополнительные обозначения. Положим $\mathbb{C}/\mathbb{Z} = T$, тогда имеем G -эквивариантный гомоморфизм $A(\mathbb{C}) = T^q$, и проекция $\pi_i: A(\mathbb{C}) \rightarrow T$ – это проекция на i -й сомножитель. Множество T^G обозначим через F , оно состоит из двух овалов, один из которых равен $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, его обозначим через F_0 , а другой овал обозначим через F_1 . Факторпространства $A(\mathbb{C})/G$, T/G обозначим через B , S соответственно. Проекции $A(\mathbb{C}) \rightarrow B$, $T \rightarrow S$ обозначим через f . Благодаря этим обозначениям можем написать следующую коммутативную диаграмму, в которой

рассматриваются когомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ (они в записи диаграммы опускаются):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H^1(S) & \longrightarrow & H^1(T, G) & \longrightarrow & H^0(F) \longrightarrow H^2(S) \\
 & & \downarrow \pi_i^* & & \downarrow \pi_i^* & & \downarrow \pi_i^* \\
 0 & \longrightarrow & H^1(B) & \longrightarrow & H^1(A(\mathbb{C}), G) & \longrightarrow & H^0(A(\mathbb{R})) \longrightarrow H^2(B) \\
 & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* \\
 0 & \longrightarrow & H^1(Y) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}), G) & \longrightarrow & H^0(X(\mathbb{R})) \xrightarrow{j^*} H^2(Y)
 \end{array} \quad (11)$$

Строки в диаграмме (11) точны, они получаются из первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий, нижняя строка – это точная последовательность (2). Пусть $\tilde{F}_0$ – образующая $H^0(F)$, соответствующая компоненте F_0 , тогда $\pi_i^*(\tilde{F}_0)$ представляет собой элемент $H^0(A(\mathbb{R}))$, который соответствует объединению компонент $A(\mathbb{R})^{(i)}$, обозначим его через $\widetilde{A(\mathbb{R})}^{(i)}$. Элемент $\alpha^*(\widetilde{A(\mathbb{R})}^{(i)}) \in H^0(X(\mathbb{R}))$ соответствует объединению компонент $X(\mathbb{R})^{(i)}$, обозначим его через $\widetilde{X(\mathbb{R})}^{(i)}$. Из диаграммы (11) следует, что $j^*(\widetilde{X(\mathbb{R})}^{(i)}) = 0$, т.е. класс гомологий $[X(\mathbb{R})^{(i)}]$ равен 0 в $H_2(Y)$. Из леммы 2 следует, что класс гомологий $[X(\mathbb{R})^{(i)}]$ равен 0 в $H_2(X(\mathbb{C}))$. Аналогично проверяется, что класс гомологий $[X(\mathbb{R})]$ равен 0 в $H_2(X(\mathbb{C}))$. Чтобы закончить доказательство теоремы 3, нам достаточно проверить, что соотношения между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$, задаваемые равенствами $[X(\mathbb{R})] = 0$, $[X(\mathbb{R})^{(i)}] = 0$, $i = 1, \dots, q$, являются линейно независимыми. Докажем это утверждение. Так как X – M -поверхность, то выполняется равенство (см. [8]) $H^1(X(\mathbb{C}))^G = H^1(X(\mathbb{C}))$, поэтому из второй спектральной последовательности эквивариантных когомологий

$$H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}))) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}), G)$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(X(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), G) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C})) \rightarrow 0.$$

Аналогичную точную последовательность имеем для группы $H^1(A(\mathbb{C}), G)$:

$$0 \rightarrow H^0(A(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(A(\mathbb{C}), G) \rightarrow H^1(A(\mathbb{C})) \rightarrow 0,$$

поэтому гомоморфизм

$$\alpha^*: H^1(A(\mathbb{C}), G) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), G)$$

является изоморфизмом, так как гомоморфизм

$$\alpha^*: H^1(A(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}))$$

является изоморфизмом. Рассуждая аналогично с гомоморфизмами

$$\pi_i^* : H^1(T, G) \rightarrow H^1(A(\mathbb{C}), G),$$

мы получим, что образы $\pi_i^*(H^1(T, G))$, $i = 1, \dots, q$, порождают все вместе группу $H^1(A(\mathbb{C}), G)$. Тогда из диаграммы (11) следует, что классы когомологий $\widetilde{X(\mathbb{R})}, \widetilde{X(\mathbb{R})}^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, порождают образ гомоморфизма

$$H^1(X(\mathbb{C}), G) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R})),$$

т.е. ядро гомоморфизма Гизина j^* . Так как число линейно независимых соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$ равно $q + 1$, то последнее утверждение завершает доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $D = C(\mathbb{C})/G$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(D) & \longrightarrow & H^1(C(\mathbb{C}), G) & \longrightarrow & H^0(C(\mathbb{R})) \longrightarrow H^2(D) \quad , \quad (12) \\ & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* \\ 0 & \longrightarrow & H^1(Y) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}), G) & \longrightarrow & H^0(X(\mathbb{R})) \xrightarrow{j^*} H^2(Y) \end{array}$$

в которой строки точны и получаются из первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий. Компоненты $C_1, \dots, C_{q+1}$ определяют базис $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{q+1}$ группы $H^0(C(\mathbb{R}))$, образ $\alpha^*(\tilde{C}_i)$ равен классу когомологий $\widetilde{X(\mathbb{R})}_i$, который получается из компонент множества $X(\mathbb{R})_i$, $i = 1, \dots, q + 1$. Тогда из диаграммы (12) получаем равенства $j^*(\widetilde{X(\mathbb{R})}_i) = 0$, $i = 1, \dots, q + 1$, т.е. классы гомологий $[X(\mathbb{R})_i]$, $i = 1, \dots, q + 1$, равны 0 в $H_2(Y)$, а согласно лемме 2 они равны 0 в $H_2(X(\mathbb{C}))$. Остается показать, что равенства $[X(\mathbb{R})_i] = 0$ в $H_2(Y)$ определяют базис соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$. Так как гомоморфизм

$$\alpha^* : H^1(C(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}))$$

является изоморфизмом, то гомоморфизм эквивариантных когомологий

$$\alpha^* : H^1(C(\mathbb{C}), G) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), G)$$

также будет изоморфизмом. Тогда из диаграммы (12) следует, что $\text{Ker } j^*$ порождается классами когомологий $\widetilde{X(\mathbb{R})}_i$, $i = 1, \dots, q + 1$. Так как число линейно независимых соотношений между классами гомологий $y_1, \dots, y_s$ равно $q + 1$, то последнее утверждение завершает доказательство теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $x_1 + \dots + x_s = 0$, то из сравнений $\chi_k \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, $k = 1, \dots, s$, следует по теореме 2 сравнение $\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{2^{\mu+2}}$, но, на самом деле, выполняется сравнение $\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}$, что нетрудно увидеть из доказательства теоремы 2. Заметим, что это сравнение впервые было доказано в [9] с помощью сложной арифметической теории в случае, когда $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. В работе [5] предложено более простое доказательство для поверхностей в свободной группе $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, идеи этого доказательства используются в данной работе при обосновании теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. О классах гомологий, определенных вещественными точками вещественного алгебраического многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 2. С. 282–302.
- [2] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.
- [3] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для $GM\mathbb{Z}$ -многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
- [4] Шафаревич И. Р. (ред.) Алгебраические поверхности. Тр. МИАН. 1965. Т. 75.
- [5] Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической GM -поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
- [6] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [7] Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приближения // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [8] Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 58–64.
- [9] Никулин В. В. Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 109–177.

Ярославль

Поступило
20.03.96