Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, Точная оценка граничного поведения функций из классов Харди–Соболева в критическом случае, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 527–539

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:37:29

УДК 517.55

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАРДИ–СОБОЛЕВА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. Г. Кротов

В критическом случае $\alpha p = n$ функции из пространств Харди–Соболева $H_\alpha^p(B^n)$ почти всюду на границе имеют предел вдоль некоторых областей экспоненциального контакта с границей. В работе доказано, что максимальный оператор, соответствующий этим областям, ограничен как оператор из $H_\alpha^p(B^n)$ в $L^p(\partial B^n)$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Целью настоящей работы является доказательство неравенства

$$\|E_a f\|_p \leq c \|f\|_{H_\alpha^p(B^n)}, \quad \frac{n}{\alpha} = p > 1, \quad (1)$$

для функций из классов Харди–Соболева. Здесь

$$E_a f(\zeta) = \sup \left\{ |f(r\eta)| : |1 - \langle \zeta, \eta \rangle| < a \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n} \right\}. \quad (2)$$

Приведем сначала необходимые определения и изложим историю вопроса.

Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных в B^n функций f , для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} = \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p.$$

Здесь $f_r(z) = f(rz)$,

$$\|g\|_p = \left(\int_S |g(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p},$$

σ – поверхностная мера на границе шара $S = \partial B^n$, нормированная условием $\sigma(S) = 1$.

В терминах однородных разложений голоморфных функций [1, с. 27]

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z), \quad f_m(\lambda z) = \lambda^m f_m(z),$$

определим операторы дробного интегрирования

$$R_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} f(sz) ds$$

(см., например, [2], [3]) и классы Харди–Соболева

$$H_\alpha^p(B^n) = R_\alpha(H^p(B^n))$$

с естественной нормировкой: если $f \in H_\alpha^p(B^n)$ и $f = R_\alpha g$, то

$$\|f\|_{H_\alpha^p(B^n)} = \|g\|_{H^p(B^n)}.$$

На сфере S имеется естественная квазиметрика [1, с. 72]

$$d(\zeta, \eta) = |1 - \langle \zeta, \eta \rangle|, \quad (3)$$

где

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$$

для $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. С помощью квазиметрики d вводим области подхода к границе (допустимые области Кораньи)

$$D_a(\zeta) = \{r\eta : d(\zeta, \eta) < a(1-r), 0 \leq r < 1, \eta \in S\},$$

где $a > 0$, $\zeta \in S$. С этими областями естественным образом связывается понятие D_a -предела (см., например, [1, с. 79]). Каждая функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, почти всюду на S имеет D_a -предел при каждом $a > 0$ (см., например, [1, с. 94]). Кроме этого,

$$\|N_a f\|_p \leq c \|f\|_{H^p(B^n)},$$

где

$$N_a f(\zeta) = \sup\{|f(z)| : z \in D_a(\zeta)\}$$

и $c > 0$ не зависит от f . Здесь и всюду дальше через c мы обозначаем различные положительные постоянные (различные в разных случаях), зависящие, возможно, от некоторых параметров.

Рассмотрим граничное поведение функций из классов Харди–Соболева $H_\alpha^p(B^n)$. Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$, $a > 0$ и

$$D_\varepsilon^*(\zeta) = \{r\eta : d(\zeta, \eta) < a(1-r)^\varepsilon\}, \quad \zeta \in S, \\ N_\varepsilon^* f(\zeta) = \sup\{|f(z)| : z \in D_\varepsilon^*(\zeta)\}$$

(зависимость от a здесь не имеет большого значения, и мы не отражаем ее в обозначениях).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < n/\alpha$. Тогда каждая функция $f \in H_\alpha^p(B^n)$ почти всюду на S имеет D_ε^* -предел, где $\varepsilon = 1 - (\alpha p)/n$, и

$$\|N_\varepsilon^* f\|_p \leq c \|f\|_{H_\alpha^p(B^n)}, \quad (4)$$

где c не зависит от f .

В случае $n = 1$ и $p > 1$ это утверждение доказали А. Нагель, У. Рудин и Дж. Шапиро [4]. В работе автора [5] было получено неравенство слабого типа

$$\sigma\{N_\varepsilon^* f > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_{H_\alpha^p(B^n)} \right)^p, \quad \lambda > 0,$$

(c не зависит от f и λ), из которого следует часть теоремы 1, относящаяся к сходимости почти всюду. Неравенство (4) было доказано в другой работе автора [3], а также в [6].

Если $p > n/\alpha$, то, как нетрудно убедиться, функции из $H_\alpha^p(B^n)$ непрерывно продолжаются на S .

Переходим к рассмотрению критического случая $\alpha p = n$. Если $n/\alpha = p \leq 1$, то

$$H_\alpha^p(B^n) \hookrightarrow A(B^n)$$

($A(B^n)$ – алгебра голоморфных в B^n функций, непрерывно продолжимых на S). Это вложение при $p = 1$ получено в [7], а при $0 < p \leq 1$ – в [5], [8].

Если $n/\alpha = p > 1$, то каждая функция $f \in H_\alpha^p(B^n)$ почти всюду на S имеет предел вдоль областей

$$\Omega_a(\zeta) = \left\{ r\eta : d(\zeta, \eta) < a \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n} \right\}, \quad \zeta \in S.$$

В одномерном случае это доказано в [4], а для любого n – в работе автора [5]. Кроме того, для $n = 1$ в [4] было доказано неравенство (1), а в [5] – неравенство слабого типа

$$\sigma\{E_a f > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_{H_\alpha^p(B^n)} \right)^p, \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

при любом $n \geq 1$ (c не зависит от f и λ). Оставался открытым вопрос: имеет ли место неравенство (1) при всех $n \geq 1$? Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе [8]. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n/\alpha = p > 1$. Тогда каждая функция $f \in H_\alpha^p(B^n)$ почти всюду на S имеет Ω_a -предел. Более того, справедливо неравенство (1), где c не зависит от f .

Неравенство (1), а также его обобщение на некоторые более широкие классы функций, будет доказано в п. 3. В п. 3 будет показано также, что области $\Omega_a(\zeta)$ в теореме 2 выбраны оптимальным образом – их нельзя существенно расширить. Доказательство неравенства (1) будет опираться на серию вспомогательных утверждений, которые изложены в п. 2. Наши рассуждения следуют схеме работы [4] и основаны на неравенстве (5) (точнее, на некотором поточечном неравенстве для максимального оператора $E_a f$, из которого следует (5)), а также на новой экстремальной конструкции продолжения функций с границы шара S на его внутренность.

2. Вспомогательные утверждения. Всюду в этом пункте $\delta_r = 1 - r$, где $r \in [0, 1)$.
 Неизотропная квазиметрика (3) на сфере S порождает семейство шаров

$$B(\zeta, t) = \{\eta \in S : d(\zeta, \eta) < t\}, \quad \zeta \in S, \quad t > 0.$$

С помощью этих шаров вводится максимальная функция Харди–Литтлвуда (см., например, [1, с. 76])

$$Mh(\zeta) = \sup \frac{1}{\sigma(B)} \int_B |h| d\sigma, \quad (6)$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(\eta, t)$, содержащим точку ζ . Эта максимальная функция обладает обычными свойствами

$$\sigma\{Mh > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \|h\|_1, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

$$\|Mh\|_p \leq c \|h\|_p, \quad p > 1, \quad (8)$$

с постоянными c , на зависящими от h и λ (см. [1, с. 76]).

Введем, далее, продолжение функций со сферы S в шар B^n , играющее важную роль в дальнейшем. Для функции $h: B^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $a > 0$ положим

$$\Pi_a h(r\zeta) = \inf\{|h(\eta)| : d(\zeta, \eta) < a(1 - r)\}. \quad (9)$$

Необходимые нам свойства продолжения Π_a перечислены в следующем утверждении.

ЛЕММА 1. Пусть $h: S \rightarrow \mathbb{C}$, $a > 0$. Тогда

- 1) $\Pi_a h(r\zeta)$ не убывает вместе с $r \in [0, 1)$ при любом $\zeta \in S$;
- 2) при всех $\zeta \in S$ и $b \in [0, a]$

$$N_b \Pi_a h(\zeta) = \min\left\{|h(\zeta)|, \lim_{\eta \rightarrow \zeta} |h(\eta)|\right\},$$

- где $N_0 g(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} |g(r\zeta)|$;
- 3) если $\lambda > 0$, то

$$\{z \in B^n : \Pi_a h(z) \geq \lambda\} = T_a(\{|h| \geq \lambda\}),$$

где

$$T_a(G) = B^n \setminus \bigcup_{\eta \notin G} D_a(\eta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) непосредственно следует из определения (9). Отсюда

$$\begin{aligned} N_0 \Pi_a h(\zeta) &= \sup_{0 \leq r < 1} \Pi_a h(r\zeta) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \min\{|h(\zeta)|, \inf\{|h(\eta)| : 0 < d(\zeta, \eta) < t\}\} \\ &= \min\left\{|h(\zeta)|, \varliminf_{\eta \rightarrow \zeta} |h(\eta)|\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, пусть $\zeta \in S$, а $r \in [0, 1)$ и $\eta \in S$ таковы, что $r\eta \in D_a(\zeta)$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ шар $B(\zeta, \varepsilon)$ целиком содержится в шаре $B(\eta, a\delta_r)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_a h(r\eta) &\leq \inf\{|h(\xi)| : \xi \in B(\zeta, \varepsilon)\} \\ &= \min\{|h(\zeta)|, \inf\{|h(\xi)| : 0 < d(\xi, \zeta) < \varepsilon\}\} \\ &\leq \min\left\{|h(\zeta)|, \varliminf_{\xi \rightarrow \zeta} |h(\xi)|\right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переходя в (11) к точной верхней грани по всем $r\eta \in D_a(\zeta)$, получим

$$N_a \Pi_a h(\zeta) \leq \min\left\{|h(\zeta)|, \varliminf_{\eta \rightarrow \zeta} |h(\eta)|\right\}.$$

Отсюда, из (10) и из очевидного неравенства $N_0 \Pi_a h(\zeta) \leq N_a \Pi_a h(\zeta)$ получаем утверждение 2) леммы.

Для доказательства 3) положим $G = \{|h| \geq \lambda\}$ и возьмем точку $r\zeta \in T_a(G)$, где $r \in [0, 1)$, $\zeta \in S$. Тогда если $\eta \in B(\zeta, a\delta_r)$, то $r\zeta \in D_a(\eta)$. По определению $T_a(G)$ из $r\zeta \in D_a(\eta)$ и $r\zeta \in T_a(G)$ следует $\eta \in G$. Таким образом, $B(\zeta, a\delta_r) \subset G$ и $|h(\eta)| \geq \lambda$ при всех $\eta \in B(\zeta, a\delta_r)$. Следовательно, $\Pi_a h(r\zeta) \geq \lambda$. Обратно, если $z \notin T_a(G)$, то $z \in \bigcup_{\eta \notin G} D_a(\eta)$ и для некоторого $\eta \notin G$ выполнено $z \in D_a(\eta)$. Поэтому $\Pi_a h(z) \leq h(\eta) < \lambda$. Утверждение 3) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из утверждения 3) леммы 1, в частности, следует, что продолжение $\Pi_a h$ измеримо в B^n .

Далее, из утверждения 2) леммы 1 вытекает, что если h – неотрицательная полунепрерывная снизу функция на S , то

$$N_a \Pi_a h(\zeta) \equiv h(\zeta), \quad \zeta \in S.$$

Поэтому функция $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ представима в виде $h = N_a g$ тогда и только тогда, когда h неотрицательна и полунепрерывна снизу.

Полезность рассмотрения продолжения Π_a можно продемонстрировать следующим образом. Если $g: B^n \rightarrow \mathbb{C}$, то для всех $\zeta \in S$ и $z \in B^n$

$$N_a \Pi_a N_a g(\zeta) \equiv N_a g(\zeta), \quad |g(z)| \leq \Pi_a N_a g(z). \quad (12)$$

Равенство в (12) следует из замечания (очевидно, что $N_a g$ полунепрерывна снизу). Для доказательства неравенства запишем

$$|g(r\zeta)| \leq N_a g(\eta) \quad \text{при } \eta \in B(\zeta, a\delta_r)$$

и перейдем здесь к точной нижней грани по всем таким η .

Полученные соотношения (12) означают, что $\Pi_a N_a g$ является наибольшей в каждой точке $z \in B^n$ среди всех функций g с заданной мажорантой $N_a g$.

Следуя [2], введем неизотропные потенциалы

$$K_\alpha h(\zeta) = \int_S \frac{h(\eta)}{|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{n-\alpha}} d\sigma(\eta), \quad 0 < \alpha < n,$$

K_α — емкость множества $G \subset S$,

$$C_{\alpha,n}^p(G) = \sup \|h\|_p^p,$$

где точная верхняя грань берется по всем неотрицательным измеримым функциям h на S , для которых $K_\alpha h(\zeta) \geq 1$ при всех $\zeta \in G$.

ЛЕММА 2 [2, с. 432]. Если $p > 1$, то

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} C_{\alpha,n}^p \{K_\alpha h > \lambda\} d\lambda \leq c \|h\|_p^p,$$

где c не зависит от h .

Кроме того, нам понадобятся неравенства, связывающие K_α и оператор

$$I_\alpha g(z) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(sz) ds.$$

“Граничную функцию” для $I_\alpha g$ будем обозначать

$$I_\alpha^0 g(\zeta) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s\zeta) ds \quad (13)$$

(если, например, интеграл сходится для почти всех $\zeta \in S$).

ЛЕММА 3. Выполнены неравенства

$$K_\alpha h(\zeta) \leq c I_\alpha^0 \Pi_a M h(\zeta), \quad (14)$$

$$N_a I_\alpha g(\zeta) \leq c K_\alpha N_{4a} g(\zeta), \quad (15)$$

где постоянные c не зависят от h и g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (14) получается из следующих двух цепочек неравенств, в которых используются определения (6) и (9), а также утверждение 1) леммы 1.

С одной стороны,

$$\begin{aligned}
 K_\alpha h(\zeta) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{a2^{-j} < d(\zeta, \eta) \leq a2^{1-j}} |h(\eta)| (d(\zeta, \eta))^{\alpha-n} d\sigma(\eta) \\
 &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\alpha-n)} \int_{B(\zeta, a2^{1-j})} |h| d\sigma \\
 &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \inf\{Mh(\eta) : d(\zeta, \eta) < a2^{1-j}\} \\
 &\leq c \left(\Pi_a Mh(0) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\alpha j} \Pi_a Mh((1-2^{-j})\zeta) \right) \\
 &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\alpha j} \Pi_a Mh((1-2^{-j})\zeta),
 \end{aligned}$$

если $a < 1$, то надо еще учесть оценку

$$\int_{2a < d(\zeta, \eta) \leq 2} |h(\eta)| (d(\zeta, \eta))^{\alpha-n} d\sigma(\eta) \leq c \Pi_a Mh(0).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a Mh(s\zeta) ds = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{1-2^{-j}}^{1-2^{-j-1}} \geq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-\alpha)} 2^j \Pi_a Mh((1-2^{-j})\zeta).$$

Докажем теперь неравенство (15). Пусть $\zeta \in S$ и $r\eta \in D_a(\zeta)$, где $r \in [0, 1)$, $\eta \in S$. Пусть еще $0 < s < 1$. Тогда если $\xi \in B(\zeta, a\delta_s)$, то

$$d(\xi, \eta) \leq 2(d(\xi, \zeta) + d(\zeta, \eta)) \leq 4a(1-sr).$$

Следовательно, $B(\zeta, a\delta_s) \subset B(\eta, 4a\delta_{rs})$. Отсюда и из утверждения 2) леммы 1 следует

$$|g(sr\eta)| \leq \inf\{N_{4a}g(\xi) : \xi \in B(\eta, 4a\delta_{rs})\} \leq \inf\{N_{4a}g(\xi) : \xi \in B(\zeta, a\delta_s)\} = \Pi_a N_{4a}g(s\zeta).$$

Таким образом, мы показали, что при $r\eta \in D_a(\zeta)$

$$I_\alpha g(r\eta) \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |g(sr\eta)| ds \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a N_{4a}g(s\zeta) ds.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $r\eta \in D_a(\zeta)$, получаем

$$N_a I_\alpha g(\zeta) \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a N_{4a}g(s\zeta) ds. \quad (16)$$

Для оценки правой части неравенства (16) возьмем $a_1 \in (0, a)$ настолько малым, чтобы

$$\sigma(B(\zeta, a_1 2^{-j-1})) - \sigma(B(\zeta, a_1 2^{-j-2})) \geq c 2^{-jn}$$

(см. [1, с. 74]). Тогда, если обозначить $g_1(z) = \Pi_a N_{4a} g(z)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g_1(s\zeta) ds &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{1-2^{-j}}^{1-2^{-j-1}} (1-s)^{\alpha-1} g_1(s\zeta) ds \\ &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \inf\{N_{a_1} g_1(\eta) : \eta \in B(\zeta, a_1 2^{-j-1})\} \\ &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(n-\alpha)} \int_{a_1 2^{-j-2} < d(\zeta, \eta) \leq a_1 2^{-j-1}} N_{a_1} g_1 d\sigma \\ &\leq c \int_S \frac{N_{a_1} g_1 d\sigma(\eta)}{|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{n-\alpha}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, в силу утверждения 2) леммы 1

$$N_{a_1} g_1(\eta) = N_{4a} g(\eta),$$

поэтому из неравенств (17) и (16) получаем (15).

Следующая лемма является ключевой – именно в ней учитывается специфика областей

$$\left\{ r\eta \in B^n : \alpha(\zeta, \eta) < a \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n} \right\},$$

участвующих в определении максимального оператора E_a из (2). Пусть $r_0 \leq r < 1$ и

$$\rho = 1 - \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n}, \quad (18)$$

где r_0 выбрано так, чтобы $\rho < r$ при $r_0 \leq r < 1$. Обозначение (18) используется в следующих двух леммах.

ЛЕММА 4. Пусть $p > 1$, $\alpha = n/p$ и g – неотрицательная функция на B^n , измеримая на любом радиусе в B^n , причем $N_a g \in L^p(S)$. Тогда для любых $\zeta \in S$, $r_0 \leq r < 1$ и $\eta \in B(\zeta, 1-\rho)$

$$\int_{\rho}^r (1-s)^{\alpha-1} g(s\eta) ds \leq c M^{1/p} (N_a^p g)(\zeta), \quad (19)$$

где c не зависит от r , η , ζ и g .

Это утверждение доказано в [5] (в [5] g была модулем голоморфной функции, но доказательство без изменений проходит и при сделанных предположениях). С помощью неравенства (19) в [5] доказывалось (5).

Пусть функция $h \in L^1(S)$, тогда ее продолжение $\Pi_a h$ измеримо на B^n в силу утверждения 3) леммы 1. Поэтому в силу теоремы Фубини для почти всех $\eta \in S$ интеграл $I_{\alpha}^0 \Pi_a h(\eta)$ (см. (13)) сходится. Это замечание делает корректным следующее определение:

$$J_{\alpha} h = \Pi_a I_{\alpha}^0 \Pi_a h. \quad (20)$$

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p = n/\alpha$, $a \geq 4$ и $h \in L^p(S)$. Тогда

$$\sigma\{E_1 J_\alpha h > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|h\|_p \right)^p, \quad \lambda > 0, \quad (21)$$

где c не зависит от λ и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что неравенство (21) достаточно доказать для $\lambda > c_1 \|h\|_p$, где c_1 — некоторая постоянная, которая будет выбрана ниже (независимо от λ и h). Далее, точную верхнюю границу в определении E_a (см. (2)) достаточно брать по $r \in [r_0, 1)$ и $d(\zeta, \eta) < (1 - \rho)a$. В самом деле, если $0 \leq r \leq r_0$ и $\zeta \in S$, то (см. утверждение 2) в лемме 1)

$$\begin{aligned} J_\alpha h(r\zeta) &\leq \left(\frac{1}{\sigma(B(\zeta, a\delta_r))} \int_{B(\zeta, a\delta_r)} (N_a J_\alpha h)^p d\sigma \right)^{1/p} \\ &\leq c \|I_\alpha^0 \Pi_a h\|_p \leq c \|N_a \Pi_a h\|_p \leq c \|h\|_p. \end{aligned}$$

Оценим теперь $J_\alpha h$. Пусть $r \in [0, 1)$, $\zeta \in S$. Покажем, что

$$\Pi_a h(\rho\eta) \leq \Pi_{a/4} h(\rho\zeta), \quad \eta \in B(\zeta, a\delta_r). \quad (22)$$

В самом деле, если $\xi \in B(\zeta, a\delta_\rho)$, то (так как $\rho < r$)

$$d(\xi, \eta) \leq 2(d(\xi, \zeta) + d(\zeta, \eta)) \leq 4a(1 - \rho)$$

и $\xi \in B(\eta, 4a\delta_\rho)$. Отсюда следует (22). Аналогично доказывается, что

$$\Pi_a h(s\eta) \leq \Pi_{a/4} h(s\zeta), \quad \eta \in B(\zeta, a\delta_r), \quad \rho < s < r. \quad (23)$$

С помощью неравенств (22) и (23) получаем

$$\begin{aligned} J_\alpha h(r\zeta) &\leq \inf_{\eta \in B(\zeta, a\delta_r)} \left\{ \left(\int_0^\rho + \int_\rho^r + \int_r^1 \right) (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a h(s\eta) ds \right\} \\ &\leq \inf_{\eta \in B(\zeta, a\delta_r)} \left\{ \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta) ds + (1-r)^\alpha \Pi_a h(\eta) \right\} \\ &\leq \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta) ds + (1-r)^\alpha \Pi_a h(r\zeta). \end{aligned}$$

Далее, так как $\Pi_a h(r\zeta) \leq h(\eta)$ при $\eta \in B(\zeta, a\delta_r)$ (см. утверждение 2) в лемме 1), то

$$\Pi_a h(r\zeta) \leq \left(\frac{1}{\sigma(B(\zeta, a\delta_r))} \int_{B(\zeta, a\delta_r)} |h|^p d\sigma \right)^{1/p} \leq c(1-r)^{-n/p} \|h\|_p.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$\Pi_a J_\alpha h(r\zeta) \leq c \left(\|h\|_p + \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta) ds \right).$$

Если теперь зафиксировать $\zeta \in S$ и взять точку $r\eta \in B^n$ так, что $r_0 \leq r < 1$ и $d(\zeta, \eta) < (1 - \rho)a$, то $\rho\eta \in D_1(\zeta) \subset D_{a/4}(\zeta)$ (так как $a \geq 4$ согласно утверждению 2) леммы 1). Отсюда, а также из леммы 4, выводим

$$\sup_{\substack{\eta \in B(\zeta, \delta_\rho) \\ r_0 \leq r < 1}} \Pi_a J_\alpha h(r\eta) \leq c(\|h\|_p + M^{1/p}(h^p)(\zeta)). \quad (24)$$

Теперь неравенство слабого типа (7) и сказанное в начале доказательства леммы (с постоянной $c_1 = 2c$, где c взята из (24)) дают нам утверждение леммы.

3. Оценки для максимального оператора E_a . В этом пункте мы покажем, что основное неравенство (1) справедливо для более широкого класса функций, чем $H_\alpha^p(B^n)$, $p = n/\alpha > 1$.

Пусть $\mathcal{H}^p(B^n)$ – класс комплекснозначных функций $f \in C(B^n)$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(B^n)} = \|N_a f\|_p.$$

Отметим, что выбор числа a в этом определении не играет существенной роли. Именно, если $0 < a < b$, то

$$\|N_b f\|_p \leq c \left(\frac{b}{a}\right)^{n/p} \|N_a f\|_p, \quad (25)$$

где постоянная c не зависит от a, b и f .

Для доказательства этого обозначим $E_a(\lambda) = \{N_a f > \lambda\}$. Если $\zeta \in E_b(\lambda)$, то найдется точка $r\eta \in D_b(\zeta)$, для которой $|f(r\eta)| > \lambda$. Поэтому $N_b f(\xi) > \lambda$ при всех $\xi \in B(\eta, a\delta_r) \equiv B_\zeta$. Из покрытия $\{B_\zeta : \zeta \in E_b(\lambda)\}$ можно выделить не более чем счетное семейство шаров $\{B_{\zeta_j}\}$ со свойствами

$$B_{\zeta_k} \cap B_{\zeta_j} = \emptyset, \quad \sigma(E_b(\lambda)) \leq c \sum_j \sigma(B_{\zeta_j})$$

(см. [1, с. 75]). Если $B_j^* = B(\eta_j, a(1 - r_j))$, то $B_j^* \subset E_a(\lambda)$ и

$$\sigma(E_b(\lambda)) \leq c \sum_j \frac{\sigma(B_{\zeta_j})}{\sigma(B_j^*)} \sigma(B_j^*) \leq c \left(\frac{b}{a}\right)^n \sigma(E_a(\lambda)).$$

Отсюда и из равенства

$$\|h\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \sigma\{|h| > \lambda\} d\lambda$$

вытекает (25).

Положим

$$\mathcal{H}_\alpha^p(B^n) = R_\alpha(\mathcal{H}^p(B^n))$$

с естественной нормировкой. Тогда, очевидно (см. п. 1),

$$H^p(B^n) \hookrightarrow \mathcal{H}^p(B^n), \quad H_\alpha^p(B^n) \hookrightarrow \mathcal{H}_\alpha^p(B^n).$$

В работе [3] доказано, что при $0 < p < n/\alpha$

$$\|N_\varepsilon^* f\|_p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^p(B^n)}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\alpha p}{n}$$

(c не зависит от f). Это является обобщением неравенства (4) из теоремы 1. Подобное обобщение допускает и (1).

ТЕОРЕМА 3. Если $p = n/\alpha > 1$, то

$$\|E_a f\|_p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^p(B^n)}, \quad f \in \mathcal{H}_\alpha^p(B^n), \quad (26)$$

где постоянная c не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что рассуждение, проведенное при доказательстве неравенства (25), показывает справедливость оценки

$$\|E_b f\|_p \leq c \|E_a f\|_p, \quad 0 < a < b$$

(c не зависит от f). Поэтому можно считать, что в определении (2) $a = 1$.

Пусть $W \subset B^n$. Введем обозначение

$$V(W) = \{\zeta \in S : \Omega_1(\zeta) \cap W \neq \emptyset\}$$

и докажем неравенство

$$\sigma(V(T_1(G))) \leq c C_{\alpha,n}^p(G), \quad G \subset S. \quad (27)$$

Пусть функция h на S измерима, неотрицательна и $K_\alpha h(\zeta) \geq 1$ на G . Тогда по лемме 1 $\Pi_1 K_\alpha h(z) \geq 1$ при всех $z \in T_1(G)$. Отсюда следует, что если $\zeta \in V(T_1(G))$, то $\Omega_1(\zeta)$ пересекает $T_1(G)$ и $E_1 \Pi_1 K_\alpha h(\zeta) \geq 1$. Следовательно,

$$V(T_1(G)) \subset \{E_1 \Pi_1 K_\alpha h \geq 1\}.$$

По лемме 3 (см. (14) и (20))

$$\Pi_1 K_\alpha h(z) \leq \Pi_1 I_\alpha^0 \Pi_1 M h(z) = J_\alpha M h(z).$$

Поэтому, используя лемму 5 и неравенство (8) для максимальной функции M , получаем

$$\sigma(V(T_1(G))) \leq \sigma\{E_1 \Pi_1 K_\alpha h \geq 1\} \leq \sigma\left\{E_1 J_\alpha M h \geq \frac{1}{c}\right\} \leq c \|M h\|_p^p \leq c \|h\|_p^p.$$

Переходя к точной верхней грани по всем функциям h с указанными выше свойствами, получим (27).

Теперь докажем неравенство (26). Пусть функция $f \in \mathcal{H}_\alpha^p(B^n)$ и $f = R_\alpha g$, где $g \in \mathcal{H}^p(B^n)$. Тогда $|g(z)| \leq \Pi_1 N_1 g(z)$ в силу неравенства в (12) и

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{\alpha-1} g(sz) ds \right| \\ &\leq c \left(\Pi_1 N_1 g\left(\frac{z}{2}\right) + \int_{1/2}^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_1 N_1 g(sz) ds \right) \leq c I_\alpha \Pi_1 N_1 g(z). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, если $\lambda > 0$, то

$$\{E_1 f > \lambda\} \subset V(T_1(\{N_1 f > \lambda\})). \quad (29)$$

В самом деле, если $E_1 f(\zeta) > \lambda$, то найдется точка $z \in \Omega_1(\zeta)$, в которой $|f(z)| > \lambda$. Но последнее неравенство выполняется только в точках из $T_1(\{N_1 f > \lambda\})$, поэтому $\Omega_1(\zeta)$ и $T_1(\{N_1 f > \lambda\})$ пересекаются. Таким образом, вложение (29) доказано.

Переходя в (29) к мерам и используя неравенство (27), получим

$$\sigma\{E_1 f > \lambda\} \leq \sigma(V(T_1(\{N_1 f > \lambda\}))) \leq c C_{\alpha,n}^p(\{N_1 f > \lambda\}).$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \|E_1 f\|_p^p &\leq c \int_0^\infty \lambda^{p-1} C_{\alpha,n}^p(\{N_1 f > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq c \int_0^\infty \lambda^{p-1} C_{\alpha,n}^p\left(\left\{N_1 I_\alpha \Pi_1 N_1 g > \frac{\lambda}{c}\right\}\right) d\lambda \\ &\leq c \int_0^\infty \lambda^{p-1} C_{\alpha,n}^p\left(\left\{K_\alpha N_4 \Pi_1 N_1 g > \frac{\lambda}{c}\right\}\right) d\lambda \\ &\leq c \|N_4 \Pi_1 N_1 g\|_p^p \leq c \|N_1 g\|_p^p = c \|g\|_{\mathcal{H}^p(B^n)}^p. \end{aligned}$$

Здесь последовательно использовались (28), (15) из леммы 3, лемма 2, (25), утверждение 2) леммы 1. Теорема доказана.

П. М. Волняков [9] доказал, что каждая функция $f \in \mathcal{H}_{n/p}^p(B^n)$ почти всюду на S имеет предел вдоль областей Ω_a . Этот результат не является следствием неравенства (1) (см. теорему 2) или соответствующего неравенства слабого типа, так как в классе $\mathcal{H}^p(B^n)$ нет плотного подмножества функций, непрерывно продолжимых на S . Метод [9] основан на уточнении рассуждений из работы [10], где подобный результат доказан для случая $\alpha p < n$.

В заключение покажем, что все области подхода к границе, участвующие в формулировке теорем 1 и 2, выбраны оптимальным образом и не могут быть существенно расширены.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Φ — положительная функция на $(0, 1]$, $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = +\infty$ и

$$N_{\varepsilon, \Phi}^* f(\zeta) = \sup\{|f(r\eta)| : d(\zeta, \eta) < \Phi(1-r)(1-r)^\varepsilon\}.$$

Тогда если $0 < p < n/\alpha$, $\varepsilon = 1 - (\alpha p)/n$, то максимальный оператор $N_{\varepsilon, \Phi}^*$ не действует из $H_\alpha^p(B^n)$ в пространство

$$L_{\text{weak}}^p = \left\{g : \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \sigma\{|g| > \lambda\} < \infty\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\beta > n/p$, $\zeta_0 \in S$, $\rho \in (0, 1)$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = (1 - \langle \rho z, \zeta_0 \rangle)^{-\beta}.$$

Легко видеть, что $R_\alpha g(\rho \zeta_0) \geq c(1-\rho)^{\alpha-\beta}$. Кроме того, $\|g\|_{H^p} \asymp (1-\rho)^{n/p-\beta}$ [1, с. 26]. Из оценки снизу для $R_\alpha g(\rho \zeta_0)$ и определения $N_{\varepsilon, \Phi}^*$ вытекает, что

$$N_{\varepsilon, \Phi}^*(R_\alpha g)(\zeta) \geq c(1-\rho)^{\alpha-\beta}, \quad \zeta \in B(\zeta_0, \Phi(1-\rho)(1-\rho)^\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma\{N_{\varepsilon, \Phi}^*(R_\alpha g) > c(1-\rho)^{\alpha-\beta}\} &\geq c\Phi^n(1-\rho)(1-\rho)^{\varepsilon n} \\ &\geq c\Phi^n(1-\rho)(\|g\|_{H^p}(1-\rho)^{\beta-\alpha})^p, \end{aligned}$$

и так как $\Phi(1-\rho)$ за счет выбора ρ может быть сделано сколь угодно большим, наше утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция Φ такая же, как в теореме 3, и

$$E_{\Phi} f(\zeta) = \sup \left\{ |f(r\eta)| : d(\zeta, \eta) < \Phi(1-r) \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n} \right\}.$$

Тогда максимальный оператор E_{Φ} не действует из $H_{\alpha}^p(B^n)$ в L_{weak}^p , $p = n/\alpha > 1$.

Доказательство проводится точно так же, как и предыдущее, только надо взять $\beta = n/p$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [2] Ahern P., Cohn W. Exceptional sets for Hardy–Sobolev function // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38. №2. P. 417–452.
- [3] Кротов В. Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // Тр. МИАН. 1989. Т. 190. С. 117–138.
- [4] Nagel A., Rudin W., Shapiro J. Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces // Ann. Math. 1982. V. 116. №2. P. 331–360.
- [5] Кротов В. Г. Ограничном поведении дробных интегралов голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Матем. 1988. №4. С. 73–75.
- [6] Sueiro J. Tangential boundary limits and exceptional sets for holomorphic functions in Dirichlet-type spaces // Math. Ann. 1990. V. 286. №4. P. 661–678.
- [7] Beatrous F. Boundary continuity of holomorphic Sobolev function in the ball // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. №1. P. 29–41.
- [8] Кротов В. Г. Точная оценка граничного поведения функций из классов Харди–Соболева H_{α}^p в критическом случае $\alpha p = n$ // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. №1. С. 42–45.
- [9] Волняков П. М. Оценки свойства Фату для функций из классов типа Харди–Соболева. Дисс. . . . к. ф.-м. н. Одесса: ОГУ, 1992.
- [10] Кротов В. Г. О граничном поведении функций из пространств типа Харди // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №1. С. 957–974.

Белорусская государственная политехническая академия, г. Минск

Поступило
06.02.96