Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, В. Е. Тараканов, Обобщенные графы де Брейна, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 540–548

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 03:35:10

УДК 519.17

ОБОБЩЕННЫЕ ГРАФЫ ДЕ БРЕЙНА

Ф. М. Малышев, В. Е. Тараканов

Изучаются ориентированные графы, в которых для любой пары вершин существует единственный путь из одной вершины в другую заданной длины, не зависящей от конкретно выбранной пары вершин. Этот класс графов является естественным обобщением широко распространенных графов де Брейна и сохраняет их наиболее существенные свойства. Получен ряд результатов о структуре и методах построения таких графов.

Библиография: 7 названий.

Графы де Брейна благодаря своему совершенству и широте их применения занимают особое место среди специальных классов ориентированных графов (см., например, [1]–[5]). В данной работе представлен класс графов, в которых сохраняются наиболее важные качества графов де Брейна. Называем их обобщенными графами де Брейна или, кратко, ∂ -графами.

Мы рассматриваем лишь ориентированные графы (орграфы), поэтому, говоря о графе, всегда имеем в виду орграф. Используемую терминологию и некоторые результаты, относящиеся к графам, можно найти в [6], а специально к графам де Брейна – в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть n, r – натуральные числа, $n > 1, r \geq 1$. Ориентированный граф на n вершинах называется ∂ -графом порядка r , если для любой пары его вершин существует единственный направленный путь длины r из одной вершины в другую.

При $r = 1$ ∂ -граф – это полный граф на n вершинах. Примеры ∂ -графов при $r > 1$ приведены на рис. 1. Из определения 1 следует, что ∂ -граф связан и даже сильно связан. Ясно также, что в ∂ -графе не может быть двух различных направленных путей длины $l \leq r$ с общим началом и концом, в частности, исключены параллельные дуги.

С данным ∂ -графом Γ порядка r можно связать другие ∂ -графы. Непосредственно из определения 1 следует, что если в Γ изменить направление по каждой его дуге на противоположное, то получающийся граф $\bar{\Gamma}$ есть также ∂ -граф порядка r . Пусть, далее, Γ^+ – граф, двойственный ∂ -графу Γ (см. [1]): вершины Γ^+ суть дуги Γ , и в Γ^+ есть дуга из вершины e_1 в вершину e_2 тогда и только тогда, когда в Γ конец дуги e_1 совпадает с началом дуги e_2 . Понятно, что Γ^+ есть ∂ -граф порядка $r + 1$.

Очевидно, граф Γ^+ может быть определен и для любого графа Γ . Он обладает следующим свойством: окрестности любых двух его вершин либо совпадают, либо их пересечение пусто. Это свойство пары вершин графа назовем $\mathcal{N}$ -свойством. Как обычно,

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00531.

окрестностью $\Gamma(v)$ вершины v графа Γ считаем множество концов всех дуг, исходящих из v . Если в графе Γ для любой пары вершин выполнено $\mathcal{N}$ -свойство, то говорим, что Γ обладает $\mathcal{N}$ -свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ∂ -граф Γ порядка $r > 1$ называется *простым*, если он неизоморфен Γ_1^+ ни для какого ∂ -графа Γ_1 . Полный граф на $n > 1$ вершинах (т.е. ∂ -граф порядка 1) считаем простым.

Ниже мы докажем, что простые ∂ -графы порядка $r > 1$ исчерпываются ∂ -графами, имеющими пару вершин, не обладающую $\mathcal{N}$ -свойством.

Рис. 1

Приведем примеры ∂ -графов порядка $r > 1$. Основными примерами ∂ -графов являются графы де Брейна. Пусть $m > 1, r > 1$ – натуральные числа, $n = m^r$. Обо-

значим через $\mathbb{Z}_m$ множество $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Множество вершин графа де Брейна порядка r на $n = m^r$ вершинах составляют все r -мерные целочисленные векторы вида $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{r-1})$, $\nu_i \in \mathbb{Z}_m$, $i = \overline{0, r-1}$. Из вершины $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{r-1})$ исходит m дуг в вершины $(\varepsilon, \nu_0, \dots, \nu_{r-2})$; в нее входит также m дуг из вершин $(\nu_1, \dots, \nu_{r-1}, \varepsilon)$, где ε – любой элемент $\mathbb{Z}_m$. Петли имеются в точности на m вершинах $(\nu, \dots, \nu)$, $\nu \in \mathbb{Z}_m$. При $r = 1$ граф де Брейна – это полный граф на $n = m$ вершинах. При $r > 1$ граф де Брейна на m^r вершинах двойственен графу де Брейна на m^{r-1} вершинах, т.е. он не является простым. Другие примеры ∂ -графов приведены на рис. 1. Здесь $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ – ∂ -графы порядка 3 на восьми вершинах; $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ – ∂ -графы порядка 2 на девяти вершинах; $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ – простые ∂ -графы; $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_5$ – графы де Брейна. Широкие классы простых ∂ -графов строятся ниже в теореме 3 путем “локальных деформаций” графов де Брейна.

Выведем некоторые свойства ∂ -графов и их матриц смежности. Напомним сначала хорошо известные свойства матриц смежности ориентированных графов (см. [6]). Если $A = (a_{ij})$ – матрица смежности графа Γ , $a_{ij} = 0$ или 1, то число путей длины l из вершины с номером i в вершину с номером j равно элементу $a_{ij}^{(l)}$ в матрице A^l , $l = 1, 2, \dots$. Число петель в Γ – это число единиц на главной диагонали A , т.е. оно равно следу матрицы A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – ∂ -граф порядка r . Тогда

- а) число n вершин графа Γ есть r -я степень целого числа m ;
- б) из каждой вершины Γ исходит всего m дуг;
- в) в каждую вершину Γ входит всего m дуг;
- г) число петель в Γ равно m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Обозначим через $X = X(\Gamma)$ матрицу смежности ∂ -графа Γ . Требование определения 1 равносильно выполнению условия

$$X^r = J, \quad (1)$$

где J – вещественная матрица порядка n , все элементы которой равны 1. Для характеристического многочлена матрицы J имеем представление $\chi_J(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1}$. Собственные значения J – это n и $(n-1)$ -кратный 0. Поэтому согласно (1) собственные значения X – это m и $(n-1)$ -кратный 0, где $m^r = n$, и

$$\chi_X(\lambda) = \lambda^n - m\lambda^{n-1}. \quad (2)$$

Число m , будучи следом целочисленной матрицы X , должно быть целым.

б) Рассмотрим линейные преобразования вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, представленные (в естественном базисе) матрицами J и X . Вектор-столбец $\mathbf{j} = (1, 1, \dots, 1)^t$ является, очевидно, собственным вектором преобразования с матрицей J , соответствующим собственному значению n . Согласно (1) он является также собственным вектором для преобразования с матрицей X , отвечающим единственному ненулевому собственному значению m , т.е. $X\mathbf{j} = m\mathbf{j}$. Таким образом, сумма элементов в каждой строке X , т.е. число единиц в каждой строке, должно равняться m , и мы получаем, что из каждой вершины Γ исходит всего m дуг.

в) Транспонированная матрица X^t также удовлетворяет (1). Поэтому в соответствии с б) число единиц в каждой строке X^t , т.е. число единиц в каждом столбце X , также равно m . Таким образом, в каждую вершину Γ входит всего m дуг.

г) Число петель в Γ равно числу единиц на главной диагонали X . Из (2) следует, что оно равно m .

Свойства ∂ -графов в теореме 1 выведены из соответствующих свойств их матриц смежности. Выпишем их в явном виде, так как они будут использованы в дальнейшем при построении ∂ -графов. Пусть $X = X(\Gamma)$ – матрица смежности ∂ -графа Γ порядка r . Тогда

- а) порядок n матрицы X есть r -я степень целого числа m ;
- б) каждая строка X содержит в точности m единиц;
- в) каждый столбец X содержит в точности m единиц;
- г) число единиц на главной диагонали X равно m .

Далее, мы укажем критерий простоты ∂ -графа. Он получается как следствие утверждения, относящегося к более широкому классу графов. Пусть Γ – связный ориентированный граф с множеством вершин V . Напомним, что *доминирующим множеством* графа Γ называется такое подмножество $D \subseteq V$, что

$$V = \bigcup_{v \in D} \Gamma(v).$$

Если при этом никакое собственное подмножество множества D не обладает указанным свойством, то D называется *минимальным доминирующим множеством*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Gamma = (V, E)$ – связный ориентированный граф с множеством вершин V и множеством дуг E . Предположим, что выполнены условия:

- а) Γ обладает $\mathcal{N}$ -свойством;
- б) если $v_1, v_2 \in V$ и в Γ есть путь длины 2 из v_1 в v_2 , то такой путь единственный.

Тогда существует и единственен с точностью до изоморфизма связный ориентированный граф Γ_1 , для которого $\Gamma_1^+ \cong \Gamma$. Если при этом Γ – ∂ -граф порядка $r > 1$, то Γ_1 – ∂ -граф порядка $r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – какое-либо минимальное доминирующее множество для Γ . Так как Γ – граф с $\mathcal{N}$ -свойством, то для любых двух различных вершин $v_1, v_2 \in D$ имеем $\Gamma(v_1) \cap \Gamma(v_2) = \emptyset$ (иначе D не было бы минимальным). Поэтому любой вершине $w \in V$ однозначно соответствует вершина $v \in D$ такая, что $w \in \Gamma(v)$. Определим теперь граф $\Gamma^- = (V^-, E^-)$ с множеством вершин V^- и множеством дуг E^- . Пусть множество вершин V^- графа Γ^- составляют все вершины какого-либо минимального доминирующего множества D графа Γ . Если $v_1, v_2 \in D$, то пусть $(v_1, v_2) \in E^-$ тогда и только тогда, когда найдутся две вершины $w_1 \in \Gamma(v_1)$, $w_2 \in \Gamma(v_2)$ такие, что $(w_1, w_2) \in E$. Заметим, что если $w, w' \in \Gamma(v)$, $v \in V$, то при $w \neq w'$ имеем $\Gamma(w) \cap \Gamma(w') = \emptyset$, иначе в Γ было бы вопреки условию теоремы два пути длины 2 из v в вершину из этого пересечения. Поэтому если $(v_1, v_2) \in E^-$, то соответствующая вершина $w_1 \in \Gamma(v_1)$ определяется однозначно. С другой стороны, в качестве w_2 можно брать любую вершину в $\Gamma(v_2)$, так как в силу $\mathcal{N}$ -свойства

$$\Gamma(w_1) = \Gamma(v_2). \quad (3)$$

Построим теперь изоморфизм φ графов $(\Gamma^-)^+$ и Γ . Пусть $e = (v_1, v_2) \in E^-$, где $v_1, v_2 \in V^- = D$. Положим $\varphi((v_1, v_2)) = w_1$, где $w_1 \in \Gamma(v_1)$ – вершина, однозначно, как показано выше, определяемая дугой e из условия (3). Обратно, если $w_1 \in V$, то

w_1 можно сопоставить дугу $(v_1, v_2) \in E^-$ так, что вершины $v_1, v_2 \in D$ однозначно определяются условиями $w_1 \in \Gamma(v_1)$ и (3). Таким образом, соответствие φ взаимно однозначно. Далее, очевидно, что (e_1, e_2) – дуга в $(\Gamma^-)^+$ (т.е. $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3)$) тогда и только тогда, когда $(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) \in E$. Таким образом, φ – изоморфизм $(\Gamma^-)^+$ и Γ .

Пусть теперь Γ – ∂ -граф порядка $r > 1$. Ясно, что если v_1, v_2 – две вершины из $V^- = D$, то в Γ^- существует единственный путь длины $r - 1$, соответствующий единственному пути длины r из $\varphi((u_1, v_1))$ в $\varphi((v_2, u_2))$, где $(u_1, v_1), (v_2, u_2) \in E^-$. Таким образом, Γ^- – ∂ -граф порядка $r - 1$.

Наконец, если Γ_1, Γ_2 – два связных ориентированных графа, для которых $\Gamma_1^+ \cong \Gamma_2^+$, то, очевидно, $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *∂ -граф Γ является простым тогда и только тогда, когда в нем существуют две вершины, окрестности которых не совпадают, но имеют непустое пересечение (т.е. две вершины, которые не обладают $\mathcal{N}$ -свойством).*

Наряду с представлением $\Gamma \cong (\Gamma^-)^+$ в теореме 2 для графа Γ без параллельных дуг имеем также $(\Gamma^+)^- \cong \Gamma$. Действительно, обозначим $\Gamma_1 = \Gamma^+$. Тогда Γ_1 – граф, обладающий $\mathcal{N}$ -свойством, в котором нет двух путей длины 2 с общим началом и концом. По теореме 2 $\Gamma^+ = \Gamma_1 \cong (\Gamma_1^-)^+$, ввиду единственности такого представления Γ_1 имеем $\Gamma \cong \Gamma_1^- = (\Gamma^+)^-$. Очевидно также, что $(\bar{\Gamma})^+ = \bar{\Gamma}^+$ и $(\bar{\Gamma})^- = \bar{\Gamma}^-$.

В оставшейся части работы предлагается один метод построения простых ∂ -графов порядка r на $n = m^r$ вершинах для произвольных $m > 1$ и $r > 1$. При этом за основу берется граф де Брейна на m^r вершинах. В нем m^2 дуг, исходящих из m вершин окрестности $\Gamma(v)$ некоторой вершины v , заменяются другими m^2 дугами; такая процедура может быть повторена еще для нескольких окрестностей.

Далее вершины ∂ -графа нумеруем числами из множества $\mathbb{Z}_n$, понимая их как элементы полной системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю n . Для числа $\nu \in \mathbb{Z}_n, n = m^r$, используем представление в m -ичной системе счисления:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 m + \dots + \nu_{r-2} m^{r-2} + \nu_{r-1} m^{r-1}, \quad \nu_i \in \mathbb{Z}_m, \quad i = \overline{0, r-1}.$$

Для целого числа k пусть $\bar{k} = k - [k/n]n$, где $[\cdot]$ есть целая часть числа. Ясно, что $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ и $\bar{k} \equiv k \pmod{n}$. Для данного целого k обозначим через k^* число $\overline{kt}$. Ясно, что если $m \mid k$, то $m^2 \mid k^*$.

В графе де Брейна из вершины $\nu \in \mathbb{Z}_n$ исходят дуги в вершины $\overline{\nu m} + \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{Z}_m$. Пусть $A = A_{m^r}$ – матрица смежности графа де Брейна порядка r на m^r вершинах; если m и r фиксированы, то называем ее кратко матрицей де Брейна. Чтобы более наглядно представить строение матрицы де Брейна, рассмотрим на ней прямоугольную сетку: горизонтали пусть следуют через каждую строку матрицы, а вертикали – через каждые m столбцов. Образовавшиеся прямоугольные ячейки заполнены или сплошь единицами, или только нулями (последние преобладают). Первый единичный прямоугольник расположен в левом верхнем углу матрицы A . Каждый следующий единичный прямоугольник примыкает своим левым верхним углом к правому нижнему углу предыдущего единичного прямоугольника. Если очередной прямоугольник оказывается при этом за правой границей A , то он как бы передвигается на n позиций влево. Последний единичный прямоугольник расположен в нижнем правом углу матрицы A .

Для аналогичного представления матриц A^s при $s > 1$ также рассмотрим подобную сетку с вертикалями, следующими через каждые m^s столбцов. Единичные прямоугольники снова следуют вниз направо, начиная с левого верхнего угла, соприкасаясь друг с другом вершинами. Это свойство матриц A^s легко проверяется индукцией по s : $A^s = A \cdot A^{s-1}$, $s = \overline{2, r}$ (такая проверка облегчает понимание дальнейших рассуждений). Заметим, что матрицы A^s , $s = \overline{1, r-1}$, — это g -циркулянты при $g = m^s$, т.е. такие квадратные матрицы, у которых каждая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом на g позиций вправо (см. [7]). По этой причине описанные выше расположение и способ следования друг за другом ненулевых прямоугольников сетки будем называть диагонально-циркулянтным.

В дальнейшем будет использоваться более крупная, в m раз увеличенная, сетка на матрице A с горизонталями, следующими через m строк, и вертикалями, следующими через m^2 столбцов. Способ следования ненулевых прямоугольных ячеек размера $m \times m^2$ в этой сетке такой же, что был описан выше для мелкой сетки, т.е. диагонально-циркулянтный: ненулевой прямоугольник соприкасается со следующим за ним своим правым нижним углом. Нулевые ячейки снова преобладают. Ненулевые ячейки как $(0, 1)$ -матрицы размера $m \times m^2$ все одинаковы. Мы их будем называть стандартными матрицами. Положение стандартной подматрицы в A определяется номером ее первой строки $k \in \mathbb{Z}_n$, $m \mid k$. Номером ее первого столбца будет $k^* = \overline{mk}$. У следующей за ней стандартной подматрицы в A номер первой строки равен $k + m$, если $k \neq m^r - m$.

Предлагаемый нами способ построения ∂ -графов будет заключаться в построении их матриц смежности путем замены стандартных матриц в нескольких ненулевых ячейках матрицы A на некоторые специальные матрицы, называемые допустимыми. $(0, 1)$ -матрица размера $m \times m^2$ называется *допустимой*, если в каждом ее столбце ровно одна единица, а в одной строке не может быть двух единиц, отстоящих одна от другой на расстоянии, кратном m . Ясно, что допустимая матрица имеет в точности m единиц в каждой строке, причем номера столбцов, где они расположены, своими младшими цифрами исчерпывают все значения из $\mathbb{Z}_m$ (столбцы нумеруются числами из $\mathbb{Z}_{m^2}$ в m -ичной системе). Если в допустимой матрице есть строка с единицами в столбцах с номерами $\varepsilon m, \varepsilon m + 1, \dots, \varepsilon m + m - 1$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}_m$, то называем ее стандартной ε -строкой. Матрица, получающаяся из стандартной с помощью любой из $m!$ перестановок ее строк, является допустимой; она имеет стандартную ε -строку для всякого $\varepsilon \in \mathbb{Z}_m$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A = A_{m^r}$ — матрица смежности графа де Брейна на m^r вершинах, $m > 1$, $r > 1$, с прямоугольной сеткой через m строк и m^2 столбцов, $B_1, \dots, B_t$ — некоторый набор из $t \geq 1$ допустимых матриц. Пусть X — матрица, получающаяся из A заменой ее ненулевых ячеек с номерами первых строк $k_i \in \mathbb{Z}_n$, $m \mid k_i$, $i = \overline{1, t}$, на матрицы B_i , $i = \overline{1, t}$. Предположим, что при

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_i - k_j^*}{m} \in \mathbb{Z}_m, \quad i, j = \overline{1, t}, \quad (4)$$

допустимая матрица B_j имеет стандартную ε_{ij} -строку. Тогда X — матрица смежности ∂ -графа порядка r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам требуется проверить равенство (1). С этой целью будем вычислять матрицы X^s , $s = \overline{1, r}$. На матрице X^s , $s = \overline{1, r-1}$, рассмотрим сетку с горизонталями, следующими через m строк, и вертикалями, следующими через m^{s+1} столб-

цов. В результате X^s разбивается на s -ячейки $x_{ij}^{(s)}$ размера $m \times m^{s+1}$, $i = \overline{0, m^{r-1} - 1}$, $j = \overline{0, m^{r-s-1} - 1}$.

Проверим вначале, что ненулевые s -ячейки в X^s , $s = \overline{1, r-1}$, располагаются в диагонально-циркулянтном порядке, т.е. расположены там же, где и ненулевые s -ячейки в матрице A^s . Для этого воспользуемся индукцией по s и при $s \geq 2$ равенством

$$X^s = X^1 \cdot X^{s-1}. \quad (5)$$

На X^{s-1} рассмотрим дополнительную сетку с горизонталями через m^2 строк и вертикалями через m^{s+1} столбцов. При этом будем говорить, что матрица X^{s-1} разбивается на $(s-1)$ -блоки $\bar{x}_{jk}^{(s-1)}$ размера $m^2 \times m^{s+1}$, $j = \overline{0, m^{r-2} - 1}$, $k = \overline{0, m^{r-s-1} - 1}$. Из равенства (5) имеем

$$x_{ik}^{(s)} = \sum_{j=0}^{m^{r-2}-1} x_{ij}^{(1)} \cdot \bar{x}_{jk}^{(s-1)}, \quad i = \overline{0, m^{r-1} - 1}, \quad k = \overline{0, m^{r-s-1} - 1}.$$

В этой сумме ненулевым может быть только одно слагаемое, отвечающее при каждом $i = \overline{0, m^{r-1} - 1}$ одной ненулевой 1-ячейке $x_{ij}^{(1)}$ для некоторого $j \in \overline{0, m^{r-2} - 1}$, $j = j(i)$.

Далее, по предположению индукции ненулевые $(s-1)$ -блоки $\bar{x}_{jk}^{(s-1)}$ располагаются в диагонально-циркулянтном порядке, а один ненулевой $(s-1)$ -блок содержит m ненулевых $(s-1)$ -ячеек, располагающихся в $(s-1)$ -блоке также в диагонально-циркулянтном порядке. В силу этого при каждом $j \in \overline{0, m^{r-2} - 1}$ только при одном $k \in \overline{0, m^{r-s-1} - 1}$, $k = k(j)$, $(s-1)$ -блок $\bar{x}_{jk}^{(s-1)}$ ненулевой. Таким образом, при каждом $i \in \overline{0, m^{r-1} - 1}$ только при одном $k \in \overline{0, m^{r-s-1} - 1}$, $k = k(j(i))$, s -ячейка $x_{ik}^{(s)}$ ненулевая, и

$$x_{i,k(j(i))}^{(s)} = x_{i,j(i)}^{(1)} \cdot \bar{x}_{j(i),k(j(i))}^{(s-1)}. \quad (6)$$

Следуют они одна за другой диагонально-циркулянтным способом из-за того, что оба семейства сомножителей в (6) этим свойством обладают:

$$-k(j((i+1) \bmod m^{r-1})) = k((j(i)+1) \bmod m^{r-2}) = (k(j(i))+1) \bmod m^{r-s-1}$$

(здесь запись $l \bmod m^t$ означает наименьший неотрицательный вычет целого числа l по модулю m^t).

Докажем теперь три леммы относительно произведений (6). Их формулировки используют понятия s -стандартных и s -квазистандартных матриц, $s = \overline{1, r-1}$.

Матрицу из нулей и единиц размера $m \times m^{s+1}$, являющуюся ненулевой s -ячейкой матрицы A^s , называем s -стандартной. Стандартная матрица – это 1-стандартная матрица. Единицы s -стандартной матрицы сосредоточены в m отрезках из m^s подряд идущих единиц, располагающихся диагонально-циркулянтным способом. Матрицу из нулей и единиц размера $m \times m^{s+1}$, у которой в каждом столбце ровно одна единица, называем s -квазистандартной. Кроме этого, квазистандартным s -блоком, $s = \overline{1, r-2}$, будем называть $(0, 1)$ -матрицу размера $m^2 \times m^{s+2}$, в которой имеется только m ненулевых s -ячеек (матриц размера $m \times m^{s+1}$), располагающихся в диагонально-циркулянтном порядке и являющихся s -квазистандартными (в частности, s -стандартными) матрицами. Под квазистандартным $(r-1)$ -блоком понимаем матрицу размера $m^2 \times m^r$, состоящую из m $(r-1)$ -квазистандартных матриц, располагающихся одна под другой в виде полос ширины m , которые нумеруем сверху вниз элементами из $\mathbb{Z}_m$.

ЛЕММА 1. Произведение стандартной матрицы на квазистандартный s -блок, $s = \overline{1, r-2}$, есть $(s+1)$ -стандартная матрица.

Утверждение получается непосредственной проверкой.

ЛЕММА 2. Произведение 1-квазистандартной (в частности, допустимой) матрицы на квазистандартный s -блок, $s = \overline{1, r-2}$, есть $(s+1)$ -квазистандартная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = (b_{ij})$ – 1-квазистандартная матрица, $C = (c_{jk})$ – квазистандартный s -блок, $s = \overline{1, r-2}$. Столбец с номером k в BC формируется путем скалярного умножения вектор-строк $0, 1, \dots, t-1$ в B на вектор-столбец k в C . Так как C s -квазистандартна, имеется в точности один индекс $j = j(k)$, для которого $c_{jk} = 1$. Точно так же ввиду квазистандартности B имеется в точности один индекс $i = i(j)$, для которого $b_{ij} = 1$. Поэтому умножение строки $i(j)$ из B на столбец k из C дает 1, а умножение остальных строк дает 0. Следовательно, в каждом столбце BC имеется в точности одна единица, и, тем самым, матрица BC размера $t \times t^{s+2}$ $(s+1)$ -квазистандартна.

ЛЕММА 3. Произведение допустимой (в частности, стандартной) матрицы B на квазистандартный $(r-1)$ -блок C есть матрица, у которой все $t \times t^r$ элементов равны 1, если выполнено условие: B содержит стандартную i -строку в том случае, когда i -я $(r-1)$ -квазистандартная подматрица в C не является $(r-1)$ -стандартной, $i \in \mathbb{Z}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждую строку матрицы B скалярно умножим на все столбцы матрицы C . Если строка стандартная, то фактически происходит скалярное умножение вектор-столбца из t единиц на столбцы $(r-1)$ -квазистандартной матрицы, в результате чего всегда получается единица. Если же строка не является стандартной, то ее единицы (после транспонирования строки) могут быть по условию только в областях $(r-1)$ -стандартных подматриц квазистандартного $(r-1)$ -блока C . Единицы одного столбца этого $(r-1)$ -блока, принадлежащие $(r-1)$ -стандартным матрицам, располагаются в строках, у которых младшие разряды номеров одинаковы, а t единиц транспонированной строки допустимой матрицы B расположены в строках, номера которых своими младшими разрядами исчерпывают все значения из $\mathbb{Z}_m$. Таким образом, скалярное произведение нестандартной строки B на каждый столбец C также будет равно 1.

Обратимся, наконец, к индуктивному вычислению матриц X^s , $s = \overline{2, r-1}$, с помощью равенств (5) и (6). Из лемм 1 и 2 заключаем, что в матрице X^{r-1} $(r-1)$ -ячейки (полосы размера $t \times t^r$) с номерами первых строк k_i , $i = \overline{1, t}$, будут $(r-1)$ -квазистандартными, а все остальные $(r-1)$ -ячейки в X^{r-1} будут $(r-1)$ -стандартными.

Для вычисления X^r воспользуемся равенством (5) при $s = r$ и леммой 3. Применение последней возможно ввиду наличия у B_j стандартной ε_{ij} -строки в случае выполнения условия (4). При этом $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{Z}_m$ является номером той $(r-1)$ -ячейки, которая начинается строкой k_i в квазистандартном $(r-1)$ -блоке, начинающемся строкой k_j^* . Лемма 3 обеспечивает выполнение равенства (1).

В заключение сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (4), равносильное включению $\{k_i, k_i + 1, \dots, k_i + m - 1\} \subset \{k_j^*, k_j^* + 1, \dots, k_j^* + m^2 - 1\}$, может не выполняться ни для одного $i = \overline{1, t}$ и $j = \overline{1, t}$, тогда на допустимые матрицы $B_1, \dots, B_t$ никаких дополнительных требований не накладывается.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для получения с помощью теоремы 3 простых ∂ -графов порядка r необходимо согласно следствию из теоремы 2 дополнительно обеспечить, чтобы в матрице X , являющейся решением уравнения (1), были две строки, неравные друг другу и неортогональные как векторы в $\mathbb{R}^n$. Для этого в одной из m^{r-2} колонок прямоугольных ячеек на X среди m ненулевых прямоугольников должно быть два, не получающихся один из другого перестановкой строк.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сформулированное в теореме 3 требование к допустимым матрицам не является необходимым. Так при $r = 2, m > 2, t = 1, k_1 = pm, p \in \overline{1, m-2}$, можно взять допустимую матрицу, получающуюся из стандартной перенесением $m - m_0$ последних единиц ее q -й строки, $m_0 \in \overline{p+1, m-1}, q \in \overline{0, p-1}$, в ее p -ю строку, а $m - m_0$ последних единиц p -й строки в q -ю. Условие (4) при $i = j = 1$ справедливо, ибо

$$\varepsilon_{11} = \frac{k_1 - k_1^*}{m} = \frac{pm - 0}{m} = p \in \mathbb{Z}_m,$$

но в построенной допустимой матрице нет стандартной p -строки, тем не менее, как легко убедиться, $X^2 = J$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На исчерпывающее описание простых ∂ -графов в настоящее время рассчитывать трудно. Но определенные надежды на это все же имеются в связи с тем, что матрица смежности произвольного ∂ -графа Γ порядка r на m^r вершинах, как и матрица A_{m^r} , разбивается горизонталями на m подматриц размера $m^{r-1} \times m^r$, у которых в каждом столбце ровно по одной единице. Для этого нумерация вершин Γ выбирается так, что m^{r-1} концов направленных путей длины r , выходящих из фиксированного начала и имеющих одну и ту же первую дугу, располагаются подряд. Для начальных значений параметров конкретно реализованный прямой перебор позволил убедиться, что при $m = r = 2$ простых ∂ -графов нет, при $m = 2, r = 3$ они исчерпываются графами $\mathcal{T}_1, \overline{\mathcal{T}}_1$ (см. рис. 1), а при $m = 3, r = 2$ — графами $\mathcal{T}_2, \overline{\mathcal{T}}_2, \mathcal{T}_3, \overline{\mathcal{T}}_4, \overline{\mathcal{T}}_4$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Среди получаемых по теореме 3 ∂ -графов нетрудно выбрать графы, неизоморфные друг другу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- [2] Good I. J. Normal recurring decimals // J. London Math. Soc. 1946. V. 21. P. 167–169.
- [3] Fredricksen H. A survey of full length nonlinear shift register cycle algorithms // SIAM Rev. 1982. V. 24. № 2. P. 195–221.
- [4] Кратко М. И., Строк В. В. Последовательности де Брейна с ограничениями // Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов. М.: Наука, 1980. С. 80–84.
- [5] Ширишева И. В. О числе конечных автоматов, устанавливаемых постоянным входом в фиксированное состояние // Дискретная матем. 1994. Т. 6. № 4. С. 80–86.
- [6] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [7] Allow C. M., Brenner J. L. Roots and canonical forms for circulant matrices // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 107. P. 60–76.