Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Х. Садикова, Неравенства для истокопредставимых функций и их приложения, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 564–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:30:23

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ИСТОКОПРЕДСТАВИМЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Р. Х. Садикова

Доказаны дискретный и интегральный варианты неравенства для истокопредставимых функций. Из них выводятся неравенство Виртингера и его обобщения.

Библиография: 14 названий.

Введение

Известное неравенство Виртингера [1, с. 221]

$$\|x(\cdot)\|_{L_2[0,l]} \leq C \|x'(\cdot)\|_{L_2[0,l]}, \quad x(0) = 0, \quad x'(\cdot) \in L_2[0,l],$$

обобщалось многими авторами (В. А. Стеклов [2], Э. Шмидт [1, с. 382], В. Бляшке [3, с. 130], В. И. Левин [1, с. 382], Е. К. Годунова, В. И. Левин [4] и др.).

В работе рассматриваются точные дискретные и интегральные неравенства, содержащие неравенства подобного типа. Общие оценки с точными константами позволили вывести утверждения о существовании единственного решения систем уравнений и некоторых классов уравнений математической физики (см. § 4). Доказанные неравенства вносят определенный вклад в исследование теорем вложения С. Л. Соболева [5], С. М. Никольского [6] и др.

Настоящие результаты являются продолжением исследований автора [11]–[14]. Они нашли применение в работах А. П. Буслаева, В. М. Тихомирова [7], [8], Нгуен Тьен Нама [9].

§ 1. Неравенства для истокопредставимых функций

1.1. Дискретный вариант. Пусть $K = (k_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, – матрица размера $n \times m$. Если выполнены равенства $x_i = \sum_{j=1}^m k_{ij} u_j$, $i = 1, \dots, n$, то будем писать, что пары (x, u) , $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, связаны неравенством $x = Ku$. Будем говорить, что две вещественные функции f_1, f_2 удовлетворяют условию J , если они определены на полупрямой $\mathbb{R}_+$, f_1 переводит $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, обе строго монотонны, при этом f_2 возрастает и выпукла, $f_2 \circ f_1^{-1}$ выпукла на $\mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- а) функции f_1, f_2 удовлетворяют условию J ;
- б) заданы положительные числа $p_i, 1 \leq i \leq n$, в сумме равные 1;
- в) все элементы матрицы $K = (k_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, положительные;
- г) имеется пара $(\hat{x}, \hat{u})$, связанная равенством $\hat{x} = K\hat{u}$, такая, что $\hat{u}_j > 0, 1 \leq j \leq m$ (а значит, $\hat{x}_i > 0$), и числа s_j определены равенством

$$s_j = \hat{u}_j \sum_i p_i k_{ij} \hat{x}^{-1}.$$

Тогда для любой пары (x, u) , связанной равенством $x = Ku$, выполнено точное неравенство

$$f_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_1 \left(\frac{|x_i|}{\hat{x}_i} \right) \right) \leq f_2^{-1} \left(\sum_{j=1}^m s_j f_2 \left(\frac{|u_j|}{\hat{u}_j} \right) \right), \quad (1)$$

причем если f_2 строго выпукла, то равенство достигается лишь на парах (x, u) таких, что $u = c\hat{u}$ (т.е. $x = c\hat{x}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве мы используем следующие два неравенства.

НЕРАВЕНСТВО ИЕНСЕНА. Пусть функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенная на линейном пространстве X , выпукла и не принимает значений, равных $-\infty$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Тогда для любых $x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, выполнено

$$f \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i). \quad (2)$$

НЕРАВЕНСТВО ИЕССЕНА. Пусть f_1, f_2 удовлетворяют условию $J, p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тогда для любых положительных чисел $z_i, 1 \leq i \leq n$, имеет место

$$f_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_1(z_i) \right) \leq f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_2(z_i) \right). \quad (3)$$

Используя (3), (2) и условие $\hat{x}_i^{-1} \sum_{j=1}^m k_{ij} \hat{u}_j = 1$, имеем

$$\begin{aligned} f_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_1 \left(\frac{|x_i|}{\hat{x}_i} \right) \right) &\leq f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_2 \left(\frac{|x_i|}{\hat{x}_i} \right) \right) = f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_2 \left(\frac{|\sum_{j=1}^m k_{ij} u_j|}{\hat{x}_i} \right) \right) \\ &\leq f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_2 \left(\frac{\sum_{j=1}^m k_{ij} |u_j|}{\hat{x}_i} \right) \right) = f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_2 \left(\frac{\sum_{j=1}^m k_{ij} \hat{u}_j}{\hat{x}_i} \cdot \frac{|u_j|}{\hat{u}_j} \right) \right) \\ &\leq f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \hat{x}_i^{-1} \sum_{j=1}^m k_{ij} \hat{u}_j f_2 \left(\frac{|u_j|}{\hat{u}_j} \right) \right) = f_2^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \hat{u}_j \left(\sum_{i=1}^n k_{ij} p_i \hat{x}_i^{-1} \right) f_2 \left(\frac{|u_j|}{\hat{u}_j} \right) \right) \\ &= f_2^{-1} \left(\sum_{j=1}^m s_j f_2 \left(\frac{|u_j|}{\hat{u}_j} \right) \right), \end{aligned}$$

что и требовалось. Условие равенства выводится так же, как и в приведенном ниже непрерывном варианте.

1.2. Непрерывный вариант.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть на измеримом пространстве (T, Σ) заданы две положительные непрерывные меры μ и ν , причем ν – вероятностная мера, $\mu(T) < \infty$, и пусть выполнены следующие условия:

- а) функции f_1, f_2 определены на полупрямой $\mathbb{R}_+$, f_1 переводит $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, обе функции строго монотонны, f_2 возрастает и выпукла, $(f_2 \circ f_1^{-1})^{**}$ – вторая сопряженная на $\mathbb{R}_+$;
- б) ядро $K(\cdot, \cdot) \in L_1(T \times T, \mathbb{R}_+)$;
- в) три положительные на T функции $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$, нигде не обращающиеся в 0, и $s(\cdot)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \int_T K(t, \tau) \hat{u}(\tau) d\mu(\tau), \\ s(\tau) &= \hat{u}(\tau) \int_T K(t, \tau) \hat{x}^{-1}(\tau) d\nu(T),\end{aligned}$$

и, кроме того, $K(t, \cdot) \hat{x}^{-1}(\cdot) \in L_1(T, \nu) \quad \forall t \in T$.

Тогда для любой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, связанной соотношением

$$x(t) = \int_T K(t, \tau) u(\tau) d\mu(\tau),$$

если

$$\begin{aligned}f_1\left(\frac{|x(\cdot)|}{\hat{x}(\cdot)}\right) &\in L_1(T, \nu), \quad s(\cdot) f_2\left(\frac{|u(\cdot)|}{\hat{u}(\cdot)}\right) \in L_1(T, \mu), \\ \hat{x}^{-1}(t) K(t, \tau) \hat{u}(\tau) f_2\left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)}\right) &\in L_1(T \times T, \mu \times \nu),\end{aligned}$$

то выполнено точное неравенство

$$(f_2 \circ f_1^{-1})^{**} \left(\int_T f_1\left(\frac{|x(t)|}{\hat{x}(t)}\right) d\nu(t) \right) \leq \int_T s(\tau) f_2\left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)}\right) d\mu(\tau), \quad (4)$$

причем для строго выпуклой функции f_2 равенство достигается только на паре $(x(\cdot), u(\cdot))$ таких, что $u(\cdot) = c\hat{u}(\cdot)$ (т.е. $x(\cdot) = c\hat{x}(\cdot)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве мы используем следующие факты. Пусть функции f_1, f_2 , определенные на прямой $\mathbb{R}$, переводят $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, причем f_1 возрастает и выпукла, $(f_2 \circ f_1^{-1})^{**}$ – вторая сопряженная. Тогда на множестве $U(f_1, f_2)$ функций $u(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на измеримом пространстве (T, Σ, μ) с положительной непрерывной мерой μ , таких, что $f_i \circ u, i = 1, 2$, измеримы и принадлежат $L_1(T, \Sigma, \mu)$, выполнено неравенство

$$(f_2 \circ f_1^{-1})^{**} \left(\mu^{-1}(T) \int_T f_1(u(t)) d\mu(t) \right) \leq \mu^{-1}(T) \int_T f_2(u(t)) d\mu(t), \quad (5)$$

а при $f_2(u) = u$, выпуклой f_1 выделим интегральное неравенство Иенсена

$$f_1\left(\mu^{-1}(T) \int_T u(t) d\mu(t)\right) \leq \frac{1}{\mu(T)} \int_T f_1(u(t)) d\mu(t). \quad (6)$$

Также будет использована теорема Фубини.

Используя (5), (6) и условие

$$\hat{x}^{-1}(t) \int_T K(t, \tau) \hat{u}(\tau) d\mu(\tau) = 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} & (f_2 \circ f_1^{-1})^{**} \left(\int_T f_1 \left(\frac{|x(t)|}{\hat{x}(t)} \right) d\nu(t) \right) \\ & \leq \int_T f_2 \left(\frac{|x(t)|}{\hat{x}(t)} \right) d\nu(t) = \int_T f_2 \left(\hat{x}^{-1}(t) \left| \int_T K(t, \tau) u(\tau) d\mu(\tau) \right| \right) d\nu(t) \\ & \leq \int_T f_2 \left(\hat{x}^{-1}(t) \int_T K(t, \tau) |u(\tau)| d\mu(\tau) \right) d\nu(t) \\ & = \int_T f_2 \left(\hat{x}^{-1}(t) \int_T K(t, \tau) \hat{u}(\tau) \frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)} d\mu(\tau) \right) d\nu(t) \\ & \leq \int_T \hat{x}^{-1}(t) \int_T K(t, \tau) \hat{u}(\tau) f_2 \left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)} \right) d\mu(\tau) d\nu(t) \\ & = \int_T \hat{u}(\tau) \int_T K(t, \tau) \hat{x}^{-1}(t) d\nu(t) f_2 \left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)} \right) d\mu(\tau) \\ & = \int_T s(\tau) f_2 \left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)} \right) d\mu(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Выясним условие равенства доказанной оценки (4) при строго выпуклой f_2 . Определим пару функций $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которой все неравенства в (7) одновременно достигали бы равенства. Имеем

- 1) неравенство Иенсена (5) для строго выпуклой $f_2 \circ f_1^{-1}$ обращается в равенство лишь при $|x(\cdot)| = c\hat{x}(\cdot)$;
- 2) неравенство для модулей функции обращается в равенство для положительной функции $u(\cdot)$ (т.е. при $x(\cdot) > 0$);
- 3) неравенство Иенсена (6) для строго выпуклой f_2 достигает равенства только при $u(\cdot) = c\hat{u}(\cdot)$.

Отсюда следует, что неравенство (4) обращается в равенство лишь на парах функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ таких, что $u(\cdot) = c\hat{u}(\cdot)$ (т.е. $x(\cdot) = c\hat{x}(\cdot)$).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть на $I = [0, 1]$ заданы две положительные меры μ, ν , причем ν – вероятностная мера, $\mu(I) < \infty$. Пусть выполнены следующие условия:

- а) функции f_1, f_2 определены на полупрямой $\mathbb{R}_+$, f_1 переводит $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, обе строго монотонны, причем f_2 возрастает и выпукла, $(f_2 \circ f_1^{-1})^{**}$ – вторая сопряженная на $\mathbb{R}_+$;
- б) симметричное ядро $K(\cdot, \cdot) \in L_1(I \times I, \mathbb{R}_+)$;

в) *имеется пара функций $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, нигде не обращающихся в 0, соединенная равенствами*

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \int_0^t K(t, \tau) \hat{u}(\tau) d\mu(\tau) & \forall t \in [0, c], \\ -\int_t^1 K(\tau, t) \hat{u}(\tau) d\mu(\tau) & \forall t \in (c, 1], \end{cases} \quad c \in (0, 1),$$

такая, что $\hat{u}(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, c]$ и $\hat{u}(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in (c, 1]$, а значит $\hat{x}(\cdot) > 0$, при этом имеем функцию

$$s(\tau) = \hat{u}(\tau) \int_{\tau}^c K(t, \tau) \hat{x}^{-1}(t) d\nu(t), \quad K(t, \tau) \hat{x}^{-1}(t) \in L_1([\tau, c], \nu) \quad \forall \tau \in I.$$

Тогда для любой пары функций $(x(\cdot), u(\cdot))$, связанной соотношениями

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\mu(\tau) & \forall t \in [0, c), \\ -\int_t^1 K(\tau, t) u(\tau) d\mu(\tau) & \forall t \in (c, 1], \end{cases}$$

если

$$\begin{aligned} \hat{x}^{-1}(t) K(t, \tau) \hat{u}(\tau) f_2\left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)}\right) &\in L_1(I \times I, \mu \times \nu), \\ s(\cdot) f_2\left(\frac{|u(\cdot)|}{\hat{u}(\cdot)}\right) &\in L_1(I, \mu), \end{aligned}$$

то выполнено точное неравенство

$$(f_2 \circ f_1^{-1})^{**} \left(\int_I f_1\left(\frac{|x(t)|}{\hat{x}(t)}\right) d\nu(t) \right) \leq \int_I s(\tau) f_2\left(\frac{|u(\tau)|}{\hat{u}(\tau)}\right) d\mu(\tau),$$

причем для строго выпуклой f_2 равенство достигается только на паре функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ таких, что $u(\cdot) = c\hat{u}(\cdot)$ (т.е. $x(\cdot) = c\hat{x}(\cdot)$).

Доказательство опускаем, так как оно повторяет доказательство теоремы 1.2.

§ 2. Общие неравенства виргингеровского типа

ТЕОРЕМА 2.1 (общее неравенство виргингеровского типа в дискретном случае). Пусть $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$, $K = k_{ij}$, $k_{ij} > 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Тогда для того чтобы имело место точное неравенство

$$\|x\|_{\ell_q^n} \leq \hat{C} \|u\|_{\ell_p^m} \quad \forall (x, u), \quad x = Ku, \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась пара $(\hat{x}, \hat{u})$, $\hat{u}_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, связанная равенством $\hat{x} = K\hat{u}$, такая, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{u}_j^{p-1} &= \hat{\lambda}^q \sum_{i=1}^n k_{ij} \hat{x}_i^{q-1}, \quad \hat{\lambda}^{-1} = \hat{C} = \|\hat{x}\|_{\ell_q^n}, \quad \|\hat{u}\|_{\ell_p^m} = 1, \\ \hat{u}_j^{p-1} &= \hat{\lambda}^q \sum_{i=1}^n k_{ij} \left(\sum_{s=1}^m k_{is} \hat{u}_s \right)^{q-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве будем опираться на правило множителей Лагранжа [9, с. 253] и теорему 1.1.

Необходимость. Если $\hat{C}$ есть наилучшая константа в неравенстве (8), то тем самым решена задача

$$\|x\|_{\ell_q^n}^q \rightarrow \sup, \quad \|u\|_{\ell_p^m}^p \leq 1, \quad x = Ku.$$

Решение $(\bar{x}, \bar{u})$ этой задачи, очевидно, существует. При этом, конечно, $\bar{x}_j > 0$. Функции $x \mapsto \|x\|_{\ell_q^n}^q$ в окрестности $\bar{x}$ и $u \mapsto \|u\|_{\ell_p^m}^p$ при $p > 1$ (случай $p = 1$ надо рассматривать отдельно) в окрестности $\bar{u}$ непрерывно дифференцируемы. Значит, можно применить правило множителей Лагранжа, т.е. существуют $\bar{p}_i$, $1 \leq i \leq n$, $\bar{\mu}$, неравные одновременно 0, такие, что

$$(\bar{x}_i)_{(q)} = \bar{p}_i, \quad \sum_{i=1}^n k_{ij} \bar{p}_i = \bar{\mu} (\bar{u}_i)_{(p)}$$

тогда и только тогда, когда

$$\bar{u}_j^{p-1} = \hat{\lambda}^q \sum_{i=1}^n k_{ij} \bar{x}_i^{q-1}.$$

Здесь мы обозначили $a_{(q)} = |a|^q \operatorname{sign} a$ для $a \in \mathbb{R}$.

Достаточность. Пусть пара $(\hat{x}, \hat{u})$ удовлетворяет соотношениям (9). Положим $\hat{p}_i = \hat{\lambda}^q \hat{x}_i^q$, $s_j = \hat{u}_j^p$. Тогда получим

$$s_j = \hat{u}_j^p = \hat{u}_j \hat{u}_j^{p-1} = \hat{u}_j \hat{\lambda}^q \sum_{i=1}^n k_{ij} \hat{x}_i^{q-1} = \hat{u}_j \sum_{i=1}^n k_{ij} \hat{p}_i \hat{x}_i^{-1}, \quad \sum_{i=1}^n \hat{p}_i = \hat{\lambda}^q \|\hat{x}\|_{\ell_q^n}^q = 1,$$

т.е. все условия теоремы 1.1 выполнены.

Применяя теорему 1.1, получаем

$$\|x\|_{\ell_q^n}^q = \hat{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{\hat{\lambda} \hat{x}_i} \right|^q \hat{p}_i \right)^{1/q} \leq \hat{\lambda} \left(\sum_{j=1}^m s_j \left| \frac{u_j}{\hat{u}_j} \right|^p \right)^{1/p} = \hat{\lambda} \|u\|_{\ell_p^m},$$

и в случае $\bar{u} = c\hat{u}$, $\bar{x} = k\hat{x}$ неравенство превращается в равенство. Теорема доказана.

Приведем непрерывный вариант этой же теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2 (общее неравенство виртингеровского типа в интегральном случае). Пусть (T, Σ, μ) – метрический компакт T с некоторой σ -алгеброй Σ его борелевских подмножеств с борелевской непрерывной мерой μ ; $K(\cdot, \cdot) \in C(T \times T, \mathbb{R}_+)$, $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$. Тогда чтобы выполнялось точное неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq \hat{C} \|u(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \quad (10)$$

для любой пары функций $(x(\cdot), u(\cdot))$,

$$x(\cdot) = \int_T K(\cdot, \tau) u(\tau) d\mu(\tau), \quad (11)$$

достаточно, чтобы нашлась пара функций $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, связанная соотношением

$$\hat{x}(t) = \int_T K(t, \tau) \hat{u}(\tau) d\mu(\tau), \quad \hat{u}(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in T$$

(т.е. $\hat{x}(\cdot) > 0$), такая, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{u}^{p-1}(\tau) &= \hat{\lambda}^q \int_T K(t, \tau) (\hat{x}(t))^{q-1} d\mu(t), \\ \hat{\lambda}^{-1} &= \hat{C} = \|x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}, \quad \|u(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = 1, \\ \hat{u}^{p-1}(\tau) &= \hat{\lambda}^q \int_T K(t, \tau) \left(\int_T K(t, \tau) u(\tau) d\mu(\tau) \right)^{q-1} d\mu(t). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в теореме 1.2 $f_1(z) = z^q$, $f_2(z) = z^p$, $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$. Положим $d\nu(t) = \hat{\lambda}^q \hat{x}^q(t) d\mu(t)$ и $s(\tau) = \hat{u}^p(\tau)$. Тогда из точного неравенства (4) имеем

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq \hat{\lambda}^{-1} \|u(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}, \quad \hat{\lambda}^{-1} = \hat{C};$$

если для пары функций $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$: $\hat{x}(\cdot) = K\hat{u}(\cdot)$ выполнено равенство

$$1 = \frac{s(\tau)}{\hat{u}^p(\tau)} = \hat{u}^{1-p}(\tau) \int_T K(t, \tau) \hat{x}^{-1}(t) d\nu(t),$$

то

$$\hat{u}^{p-1}(\tau) = \hat{\lambda}^q \int_T K(t, \tau) (\hat{x}(t))^{q-1} d\mu(t).$$

В силу того, что доказанное неравенство (10) точное, решена задача

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}^q \rightarrow \sup, \quad \|u(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^p \leq 1, \quad x(\cdot) = Ku(\cdot),$$

следовательно, имеем $\|\hat{x}(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} = \hat{C} = \hat{\lambda}^{-1}$ при $\|\hat{u}(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = 1$, что и требовалось.

§ 3. Обобщенные неравенства Виртингера

Общие теоремы 1.1–1.3 могут быть применены к доказательству многих интересных неравенств. Приведем их.

ТЕОРЕМА 3.1 (обобщенное неравенство Виртингера). Пусть $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_p^1(I, \Gamma_0)$ (иначе $x(0) = 0$, $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$, $\int_0^1 |\dot{x}|^p dt < \infty$) имеет место точное неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{L_q[0, 1]} \leq K_{pq} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_p[0, 1]}, \quad (12)$$

где

$$K_{pq} = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} \right)^{-(1/q + 1/p')} q^{-1/q} (p')^{-1/p'} \frac{\Gamma(1 + 1/q + 1/p')}{\Gamma(1 + 1/q) \Gamma(1 + 1/p')},$$

причем при $p > 1$ равенство достигается лишь на функциях $x(t) = c\hat{x}(t)$, где функция $\hat{x}(\cdot)$ однозначно определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^q \int_t^1 \hat{x}^{q-1}(\tau) d\tau &= \dot{\hat{x}}^{p-1}(t), \quad \hat{x}(t) > 0, \quad 0 < t \leq 1, \\ \int_0^1 \hat{x}^p(t) dt &= 1, \quad \lambda = \left(\int_0^1 \hat{x}^q(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

Это утверждение следует из теоремы 1.2 и следующей леммы.

ЛЕММА 1 [12]. Пусть $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$, функция $x(\cdot)$ такая, что

$$\begin{aligned} \hat{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(1) = 0, \quad \int_0^1 \dot{\hat{x}}^p(t) dt = 1, \\ \hat{\lambda}^q \int_0^1 \hat{x}^q(t) dt = 1, \quad ((\hat{x}(t))^{p-1})' = -\hat{\lambda}^q \hat{x}^{q-1}(t). \end{aligned}$$

Тогда $\hat{\lambda}^{-1} = K_{pq}$.

Частными случаями неравенства (12), следовательно, и общего неравенства (4), являются неравенство Стеклова–Виртингера ($p = q = 2$ [5], [1, с. 223]), обобщения неравенства Виртингера: Харди, Литтлвуда, Поля ($p = q = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, [1, с. 219]), Левина ($p = q \neq 2k$, $k > 1$ и k не является целым числом, $\dot{x}(\cdot) \geq 0$ [1, с. 238]), Левина и Годуновой ($p = q > 1$ [4]). Подобно неравенству (12) известно неравенство Шмидта [1, с. 382] для более узкого класса функций и с константой в 4 раза меньшей, чем в нашем неравенстве.

Многомерный вариант обобщенного неравенства Виртингера. Пусть $T = \prod_{i=1}^n \Delta_i$ — n -мерный параллелепипед, $\Delta_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} W_p^*(T, \Gamma_0) = \left\{ x(\cdot) \mid x(t_1, \dots, t_n) = \int_{a_1}^{t_1} \cdots \int_{a_n}^{t_n} u(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n, \right. \\ \left. \|u(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

иначе говоря, $W_p^*(T, \Gamma_0)$ — это совокупность функций $x(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^n$, у которых существует обобщенная производная

$$\frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n},$$

принадлежащая пространству L_p на T (с лебеговой мерой), и которые удовлетворяют граничным условиям Γ_0 :

$$x(a_1, t_2, \dots, t_n) = x(t_1, a_2, t_2, \dots, t_n) = \cdots = x(t_1, \dots, t_{n-1}, a_n) = 0.$$

Класс функций

$$\begin{aligned} W_p^*(T, \overset{\circ}{\Gamma}) = \left\{ x(\cdot) \mid x(t_1, \dots, t_n) = \int_{a_1}^{t_1} \cdots \int_{a_n}^{t_n} u(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n, \right. \\ \left. x(t_1, \dots, t_n) = - \int_{t_1}^{b_1} \cdots \int_{t_n}^{b_n} u(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n, \|u(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

есть такая же совокупность функций, как и $W_p^*(T, \Gamma_0)$, с той лишь разницей, что функции обращаются в 0 на всей границе области определения T .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $p > 1$ и $0 < q \leq p < \infty$. Тогда для всякой функции $x(\cdot) \in W_p^*(T, \Gamma_0)$ имеет место неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq (K_{pq})^n \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)^{1/p' + 1/q} \left\| \frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \right\|_{L_p(T)},$$

где

$$K_{pq} = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} \right)^{-(1/q + 1/p')} q^{-1/q} (p')^{-1/p'} \frac{\Gamma(1 + 1/q + 1/p')}{\Gamma(1 + 1/q) \Gamma(1 + 1/p')},$$

причем равенство достигается лишь на функциях

$$x(t) = x(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n x_i(t_i), \quad (13)$$

где $x_i(t_i) = \widehat{x}_i(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, а функция $\widehat{x}_i(t_i)$ однозначно определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \widehat{x}(a) = 0, \quad \widehat{x}(b) = 0, \quad \widehat{\lambda}^q \int_t^b \widehat{x}^{q-1}(\tau) d\tau = \widehat{x}^{p-1}(t), \\ \widehat{x}(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b), \quad \int_a^b \widehat{x}^p(t) dt = 1, \quad \widehat{\lambda} = \left(\int_a^b \widehat{x}^q(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из теоремы 1.2, если учесть, что T — n -мерный параллелепипед, $a_i \leq t_i \leq b_i$, с лебеговой мерой

$$\begin{aligned} K(t, \tau) = K(t_1, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_n) = \begin{cases} 1, & \tau_i \leq t_i, \\ 0, & \tau_i > t_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \\ x(t) = x(t_1, \dots, t_n) = \int_{a_1}^{t_1} \cdots \int_{a_n}^{t_n} \frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial \tau_1 \cdots \partial \tau_n} d\tau_1 \cdots d\tau_n, \\ d\nu(t) = \widehat{\lambda}^q \widehat{x}^q(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n, \\ \widehat{\lambda}^q \int_T \widehat{x}^q(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n = 1, \quad d\mu = dt_1 \cdots dt_n, \\ s(t) = s(t_1, \dots, t_n) = \widehat{\lambda}^q \frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \int_{t_1}^{b_1} \cdots \int_{t_n}^{b_n} \widehat{x}^{q-1}(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n, \\ f_1(z) = z^p, \quad p > 1, \quad 0 < q \leq p < \infty, \end{aligned}$$

т.е. $(f_2 \circ f_1^{-1})^{**}(z) = z^{p/q}$ выпуклая. По теореме Фенхеля–Моро [10, с. 224] $(f_2 \circ f_1^{-1})^{**} = f_2 \circ f_1^{-1}$. Тогда из неравенства (1) получаем

$$\left(\int_T |x(t_1, \dots, t_n)|^q dt_1 \cdots dt_n \right)^{1/q} \leq \lambda^{-1} \left(\int_T \left| \frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \right|^p dt_1 \cdots dt_n \right)^{1/p},$$

если

$$\left(\frac{\partial^n \widehat{x}(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \right)^{1-p} \int_{t_1}^{b_1} \cdots \int_{t_n}^{b_n} \widehat{\lambda}^q \widehat{x}^{q-1}(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n = 1. \quad (14)$$

Пусть функция $\hat{x}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \hat{x}_i(t_i)$ — функция с разделенными переменными ($\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2). Тогда уравнение (14) примет вид

$$\prod_{i=1}^n (\dot{\hat{x}}_i(t_i))^{p-1} = \prod_{i=1}^n \hat{\lambda}_i^q \int_{t_i}^{b_i} \dot{\hat{x}}_i^{q-1}(\tau_i) d\tau_i.$$

Рассмотрим n уравнений

$$(\dot{\hat{x}}_i(t_i))^{p-1} = \hat{\lambda}_i^q \int_{t_i}^{b_i} \dot{\hat{x}}_i^{q-1}(\tau_i) d\tau_i,$$

откуда

$$((\dot{\hat{x}}_i(t_i))^{p-1})' = -\hat{\lambda}_i^q \hat{x}_i^{q-1}(t_i).$$

Константа λ_i^{-1} вычислена в лемме 1. Поэтому

$$\hat{\lambda}^{-1} = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1} = \prod_{i=1}^n K_{pq} (b_i - a_i)^{1/p'+1/q} = (K_{pq})^n \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)^{1/p'+1/q}.$$

Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $p > 1$, $0 < q \leq p < \infty$. Тогда для всякой функции (13) имеет место точное неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq (K_{pq})^n 2^{-n} \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)^{1/p'+1/q} \left\| \frac{\partial^n x(\cdot)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \right\|_{L_p(T)},$$

причем равенство достигается лишь на функциях (13) таких, что $x_i(t_i, c) = c \hat{x}_i(t_i)$, и каждая из функций $x_i(t_i)$ однозначно определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \int_t^b \hat{x}^{q-1}(\tau) d\tau &= \dot{\hat{x}}^{p-1}(t), \quad \hat{x}(t) > 0, \quad a < t < b, \quad \hat{x}(a) = \hat{x}(b) = 0, \\ \hat{x}(c) &= 0, \quad c \in (a, b), \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad \hat{x}: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \hat{x}: (c, b] \rightarrow \mathbb{R}_-, \\ \int_a^b \hat{x}^p(t) dt &= 1, \quad \hat{\lambda} = \left(\int_a^b \hat{x}^q(t) dt \right)^{-1/q}, \end{aligned}$$

откуда $\hat{\lambda}^{-1} = \|\hat{x}(\cdot)\|_{L_q[a, b]}$.

Доказательство этого утверждения аналогично предшествующему. Разница заключается в том, что при вычислении константы $\lambda^{-1} = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ используется другая лемма, а именно:

ЛЕММА 2. Пусть $0 < q \leq p < \infty$, $p > 1$, и функция $\hat{x}(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}^q \int_t^b \hat{x}^{q-1}(\tau) d\tau &= \dot{\hat{x}}^{p-1}(t), \\ \hat{x}(a) = \hat{x}(b) &= 0, \quad \dot{\hat{x}}(c) = 0, \quad c \in (a, b), \quad c = \frac{a+b}{2}, \\ \hat{x}: [a, c] &\rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \hat{x}: (c, b] \rightarrow \mathbb{R}_-, \\ \int_a^b \dot{\hat{x}}^p(t) dt &= 1, \quad \hat{\lambda}^{-q} = \int_a^b \hat{x}^q(t) dt.\end{aligned}$$

Тогда

$$\lambda^{-1} = \begin{cases} K_{pq} 2^{-1} (b-a)^{1/p'+1/q}, & \text{если } c = \frac{a+b}{2}, \\ K_{pq} (b-a)^{1/q+1/p'} (c-a), & \text{если } c \in (a, b). \end{cases}$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 1.

§ 4. Некоторые приложения

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция $x(\cdot)$ принадлежит $W_p^r(I)$, $I = [0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяет краевым условиям $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) = 0$, $i = 0, \dots, r-1$. Тогда при $0 < q \leq p < \infty$ имеет место точное неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(I)} \leq \hat{C} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p(I)},$$

где константа $\hat{C}$ однозначно характеризуется тем, что существует единственное решение $\hat{x}(\cdot)$ уравнения

$$\begin{aligned}((\hat{x}^{(r)}(\cdot))^{p-1})^{(r)} + \hat{C}^{-q} \hat{x}(\cdot)^{q-1} &= 0, \quad x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, \dots, 2r-1, \\ \int_I |\hat{x}^{(r)}(t)|^p dt &= 1, \quad \hat{C} = \left(\int_I \hat{x}^q dt \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из теоремы 1.2, если положить

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} \hat{x}^{(r)}(\tau) d\tau, \\ -\frac{1}{\Gamma(r)} \int_t^1 (\tau-t)^{r-1} \hat{x}^{(r)}(\tau) d\tau, \end{cases} \\ d\nu(t) &= \hat{C}^{-q} \hat{x}^q(t) dt, \quad d\mu(t) = dt, \quad s(\tau) = \hat{x}^{(r)}(\tau) \int_\tau^c \frac{1}{\Gamma(r)} (t-\tau)^{r-1} \hat{C}^{-q} \hat{x}^{q-1}(t) dt.\end{aligned}$$

Из неравенства (4) следует точное неравенство, если выполнено условие

$$(\hat{x}^{(r)}(\tau))^{1-p} \hat{C}^{-q} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_\tau^c (t-\tau)^{r-1} \hat{x}^{q-1}(t) dt = 1,$$

откуда

$$(\widehat{x}^{(r)}(\tau))^{p-1} = \widehat{C}^{-q} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{\tau}^c (t-\tau)^{r-1} \widehat{x}^{q-1}(t) dt$$

и

$$((\widehat{x}^{(r)}(\cdot))^{p-1})^{(r)} = (-1)^r \widehat{C}^{-q} \widehat{x}^{q-1}(\cdot)$$

с краевыми условиями $\widehat{x}^{(i)}(0) = \widehat{x}^{(i)}(1) = 0, i = 0, \dots, r-1$, и

$$\int_T |\widehat{x}^{(r)}(t)|^p dt = 1, \quad \widehat{C} = \|\widehat{x}\|_{L_q(T)}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $0 < q \leq p < \infty, p > 1$. Тогда для любой пары (x, u) , $x_j = \sum_{i=1}^n k_{ij} u_i$, имеет место точное неравенство

$$\|x\|_{\ell_q^n} \leq \widehat{C} \|u\|_{\ell_p^m},$$

где константа $\widehat{C}$ однозначно характеризуется тем, что существует единственное положительное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \widehat{u}_j^{p-1} &= \widehat{C}^{-q} \sum_{i=1}^n k_{ij} \left(\sum_{s=1}^m k_{is} \widehat{u}_s \right)^{q-1}, \quad j = 1, \dots, m, \\ \|\widehat{u}\|_{\ell_p^m}^p &= 1, \quad \widehat{C} = \left\| \sum_{s=1}^m k_{is} \widehat{u}_s \right\|_{\ell_q^n}. \end{aligned}$$

Это следует из теоремы 1.1.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть T – метрический компакт с некоторой σ -алгеброй его борелевских множеств с борелевской непрерывной мерой μ ; $K(\cdot, \cdot) \in C(T \times T, \mathbb{R}_+)$, $0 < q \leq p < \infty, p > 1$. Тогда для любой пары функций $(x(\cdot), u(\cdot))$, связанной соотношением (11), имеет место точное неравенство (10), где константа $\widehat{C}$ однозначно характеризуется тем, что существует единственное положительное решение уравнения

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{p-1}(\tau) &= \widehat{C}^{-q} \int_T K(t, \tau) \left(\int_T K(t, \tau) u(\tau) d\mu(\tau) \right)^{q-1} d\mu(t), \\ \widehat{C} &= \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}, \quad \|\widehat{u}(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = 1. \end{aligned}$$

Это утверждение следует из теоремы 2.2.

Автор благодарен профессору В.М. Тихомирову за внимание к работе и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [2] Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. Ч. I, II. Петербург: Типогр. РАН, 1922–1923.
- [3] Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.
- [4] Годунова Е. К., Левин В. И. О некоторых интегральных неравенствах, содержащих производные // Изв. вузов. Матем. 1969. № 12. С. 20–24.
- [5] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, 1962.
- [6] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [7] Буслаев А. П., Тихомиров В. М. Некоторые вопросы нелинейного анализа и теории приближений // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 13–18.
- [8] Буслаев А. П., Тихомиров В. М. Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1587–1606.
- [9] Нгуен Тьен Нам. Спектр нелинейных интегральных уравнений и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 4. С. 101–110.
- [10] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [11] Садикова Р. Х. Неравенства для истокообразно представимых функций // Изв. вузов. Матем. 1979. № 11. С. 62–64.
- [12] Садикова Р. Х. Неравенства с производными // Деп. Изв. вузов. Матем. 1984. № 2632-84.
- [13] Садикова Р. Х. Неравенства для производных дробного порядка // Деп. Изв. вузов. Матем. 1989. № 3397-89.
- [14] Садикова Р. Х. Общий класс неравенств с точными константами. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: Университет дружбы народов, 1990.

Московская академия тонкой химической технологии
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.05.95