Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Алиев, О представимости аналитических функций по своим граничным значениям, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 8–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:07:49

УДК 517.51

О ПРЕДСТАВИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО СВОИМ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

Р. А. Алиев

Пусть ν – произвольная конечная комплексная борелевская мера на интервале $[0; 2\pi)$, $u(re^{i\varphi})$ – ее интеграл Пуассона, а $v(re^{i\varphi})$ – функция, гармонически сопряженная с $u(re^{i\varphi})$, $F(z) = u(z) + iv(z)$, $z = re^{i\varphi}$, $F(t)$ – некасательное предельное значение аналитической функции $F(z)$ при $z \rightarrow t = e^{i\theta}$. В работе рассматривается вопрос о представлении аналитической функции $F(z)$ через граничные значения $F(t)$.

Библиография: 9 названий.

В своей заметке П. Л. Ульянов [1] показал, что если ν – абсолютно непрерывная конечная мера относительно меры Лебега на интервале $[0; 2\pi)$, $u(re^{i\varphi})$ – ее интеграл Пуассона, а $v(re^{i\varphi})$ – функция, гармонически сопряженная с $u(re^{i\varphi})$, то аналитическую функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, $z = re^{i\varphi}$, можно представить A -интегралом Коши от своих граничных значений, т.е. справедлива формула

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda} \frac{F(t)}{t - z} dt, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (1)$$

где $F(t)$ – некасательное предельное значение аналитической функции $F(z)$ при $z \rightarrow t = e^{i\theta}$ и $T_\lambda = \{t = e^{i\theta} : |F(t)/(t - z)| \leq \lambda\}$.

В дальнейшем И. А. Виноградовой [2], [3] было введено понятие LG^* -интеграла и доказано, что если функция $F(z)$ представима LG^* -интегралом типа Коши, то $F(z)$ представима LG^* -интегралом Коши. Так как LG^* -интеграл является сужением A -интеграла, формула (1) остается в силе и в этом случае.

Однако когда мера ν не является абсолютно непрерывной, формула (1) становится несправедливой. Например, для дискретной меры

$$\nu(X) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } 0 \in X, \\ 0 & \text{при } 0 \notin X, \end{cases}$$

аналитическая функция $F(z) = u(z) + iv(z)$ и ее граничные значения соответственно будут $F(z) = (1 + z)/(1 - z)$ и $F(t) = (1 + t)/(1 - t)$, но предел

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda} \frac{F(t)}{t - z} dt &= \text{v. p.} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{t-z} dt \\ &= \text{v. p.} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{1+t}{1-z} \left\{ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t-z} \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-z} \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{1+t}{1-t} dt + \frac{1}{1-z} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{1+t}{t-z} dt \\
&= \frac{z}{1-z} \neq F(z),
\end{aligned}$$

где T – единичная окружность в комплексной плоскости C с центром в начале координат.

В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении аналитической функции $F(z) = u(z) + iv(z)$ через граничные значения $F(t)$ для произвольных конечных комплексных мер.

Приведем некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем.

Через M_C , M_R , M_+ , M_S будем обозначать соответственно множество всех конечных комплексных, действительных, неотрицательных и сингулярных борелевских мер на интервале $T_0 = [0; 2\pi)$. Будем говорить, что мера ν *сосредоточена на борелевском множестве* $A \subset T_0$, если для всех борелевских множеств $B \subset T_0$ $\nu(B) = \nu(B \cap A)$. Через $\text{supp } \nu$ будем обозначать носитель меры ν (т.е. наименьшее замкнутое множество $E \subset T_0$, на котором сосредоточена мера ν), а через $\|\nu\|$ – полную вариацию этой меры.

Для любой действительной функции f на T_0 обозначим

$$\begin{aligned}
(f > \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in T_0: f(\theta) > \lambda\}, & (f < \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in T_0: f(\theta) < \lambda\}, \\
(f \geq \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in T_0: f(\theta) \geq \lambda\}, & (f \leq \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in T_0: f(\theta) \leq \lambda\}.
\end{aligned}$$

1. Равенство Рисса для конечных комплексных мер. Пусть $\nu \in M_C$. Функция $\tilde{\nu}$, сопряженная к мере ν , определяется следующим образом:

$$\tilde{\nu}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{t \in T_0: |t-\theta| > \varepsilon\}} \text{ctg} \frac{\theta-t}{2} d\nu(t), \quad \theta \in T_0;$$

в частности, когда ν абсолютно непрерывна, $d\nu(t) = f(t) dt$, то функция $\tilde{\nu}$ называется также *сопряженной* к функции $f(t)$ и обозначается через $\bar{f}$.

Теорема М. Рисса [4] утверждает, что если мера ν абсолютно непрерывна, $d\nu(t) = f(t) dt$ и функция $f(t) \in L^p[0; 2\pi)$, $1 < p < +\infty$, то для любой функции $g(t) \in L^q[0; 2\pi)$, где $1/p + 1/q = 1$, имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \bar{g}(\theta) d\nu(\theta) = - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{(|\tilde{\nu} \cdot g| \leq \lambda)} \tilde{\nu}(\theta) g(\theta) d\theta. \quad (2)$$

В дальнейшем Ульяновым [5] было доказано, что равенство (2) остается в силе, когда $f(t) \in L[0; 2\pi)$ и $g(t)$ такая ограниченная функция, что $\bar{g}(t)$ также является ограниченной функцией.

В этом пункте доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Если ν – конечная комплексная борелевская мера на T_0 и функция $g(t)$ непрерывна по Гёльдеру на T_0 , то существует предел*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{(|\tilde{\nu} \cdot g| \leq \lambda)} \tilde{\nu}(\theta) g(\theta) d\theta$$

и справедливо равенство (2).

Мы будем использовать следующие две теоремы, доказанные С. А. Виноградовым, С. В. Хрушевым [6] (теорема А) и Т. С. Салимовым [7] (теорема В).

ТЕОРЕМА А [6]. Для любой конечной комплексной борелевской меры μ на единичной окружности T комплексной плоскости C справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| > \lambda\} = \frac{2}{\pi} \|\mu_s\|,$$

где μ_s – сингулярная часть меры μ , m – мера Лебега.

ТЕОРЕМА В [7]. Для любой конечной комплексной борелевской меры μ на T выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} \tilde{\mu}(e^{i\theta}) d\theta = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{\theta: |\theta-t| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} g(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} [g(\theta) - g(t)] d\theta + \frac{1}{2\pi} g(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{\theta: |\theta-t| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} [g(t) - g(\theta)] d\theta \end{aligned}$$

и функция

$$K(t, \theta) = \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} [g(t) - g(\theta)]$$

абсолютно интегрируема по θ и существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |K(t, \theta)| d\theta \right) d\nu(t),$$

то (см. [8, гл. 5, § 6])

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \bar{g}(t) d\nu(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} [g(t) - g(\theta)] d\theta \right) d\nu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} [g(t) - g(\theta)] d\nu(t) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим меру $d\mu(e^{i\theta}) = g(\theta) d\nu(\theta)$, $\theta \in [0; 2\pi)$, на единичной окружности T . По теореме В

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} \tilde{\mu}(e^{i\theta}) d\theta = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{t \in T_0: |t-\theta| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} d\mu(e^{it}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{t \in T_0: |t-\theta| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} g(t) d\nu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} [g(t) - g(\theta)] d\nu(t) + g(\theta) \bar{\nu}(\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Из равенства (3) следует, что функция

$$J(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} [g(t) - g(\theta)] d\nu(t)$$

интегрируема на интервале $[0; 2\pi)$. Тогда в силу (4) из (5) получим, что

$$\int_0^{2\pi} J(\theta) d\theta + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} g(\theta) \tilde{\nu}(\theta) d\theta = 0.$$

Это означает, что существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} g(\theta) \tilde{\nu}(\theta) d\theta$$

и справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} g(\theta) \tilde{\nu}(\theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} J(\theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} \bar{g}(t) d\nu(t). \quad (6)$$

Из интегрируемости функции $J(\theta)$ вытекает, что

$$m\{\theta: |J(\theta)| \geq \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Так как $\tilde{\mu}(e^{i\theta}) = J(\theta) + g(\theta) \tilde{\nu}(\theta)$ и по теореме А существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m(|\tilde{\mu}| > \lambda) = \frac{2}{\pi} \|\mu_s\|,$$

то

$$\begin{aligned} m((|\tilde{\mu}| > \lambda) \cap (|g\tilde{\nu}| \leq \lambda)) &\leq m(\lambda < |\tilde{\mu}| \leq (1 + \alpha)\lambda) + m((|\tilde{\mu}| > (1 + \alpha)\lambda) \cap (|g\tilde{\nu}| \leq \lambda)) \\ &\leq m(|\tilde{\mu}| > \lambda) - m(|\tilde{\mu}| > (1 + \alpha)\lambda) + m(|J| > \alpha\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\mu}| > \lambda) \cap (|g\tilde{\nu}| \leq \lambda)) \leq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \|\mu_s\|.$$

Из произвольности α получим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\mu}| > \lambda) \cap (|g\tilde{\nu}| \leq \lambda)) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\mu}| \leq \lambda) \cap (|g\tilde{\nu}| > \lambda)) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(|\tilde{\nu}g| \leq \lambda)} \tilde{\nu}(\theta)g(\theta) d\theta &= \int_{(|\tilde{\mu}| \leq \lambda)} \tilde{\nu}(\theta)g(\theta) d\theta + \int_{(|\tilde{\nu}g| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\mu}| > \lambda)} \tilde{\nu}(\theta)g(\theta) d\theta \\ &\quad - \int_{(|\tilde{\mu}| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\nu}g| > \lambda)} \tilde{\nu}(\theta)g(\theta) d\theta = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Поскольку $|I_2| \leq \lambda m((|g\tilde{\nu}| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\mu}| > \lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{(|\tilde{\mu}| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\nu}g| > \lambda)} (\tilde{\mu}(e^{i\theta}) - J(\theta)) d\theta \right| \\ &\leq \lambda m((|\tilde{\mu}| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\nu}g| > \lambda)) + \int_{(|\tilde{\mu}| \leq \lambda) \cap (|\tilde{\nu}g| > \lambda)} |J(\theta)| d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

из существования предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\{\theta \in T_0: |\tilde{\mu}(e^{i\theta})| \leq \lambda\}} g(\theta)\tilde{\nu}(\theta) d\theta$$

следует существование предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{(|\tilde{\nu} \cdot g| \leq \lambda)} \tilde{\nu}(\theta)g(\theta) d\theta$$

и их равенство, а из равенства (6) следует равенство (2). Теорема доказана.

2. Представимость аналитических функций по своим граничным значениям. Для произвольных конечных мер сначала докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть мера $\nu \in M_C$, $u(re^{i\varphi})$ – ее интеграл Пуассона, а $v(re^{i\varphi})$ – функция, гармонически сопряженная с $u(re^{i\varphi})$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda} \frac{F(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\nu_s(\theta), \quad z = re^{i\varphi}, \quad (7)$$

где $F(z) = u(z) + iv(z)$, $F(t)$ – некасательное предельное значение функции $F(z)$ при $z \rightarrow t = e^{i\theta}$, $T_\lambda = \{t = e^{i\theta}: |F(t)/(t-z)| \leq \lambda\}$ и ν_s – сингулярная часть меры ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta) d\nu(\theta), \quad v(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_z(\theta) d\nu(\theta),$$

где

$$\begin{aligned} P_z(\theta) &= \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}, \\ Q_z(\theta) &= -\operatorname{Im} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{2r \sin(\theta - \varphi)}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}, \end{aligned} \quad z = re^{i\varphi},$$

то

$$\begin{aligned} F(z) &= u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta) d\nu(\theta) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_z(\theta) d\nu(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[P_z(\theta) - \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} \right] d\nu(\theta) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[Q_z(\theta) + \frac{ire^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} \right] d\nu(\theta). \end{aligned}$$

Обозначим

$$R_z(\theta) = P_z(\theta) - \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}}.$$

Из доказанного в [1] равенства

$$\overline{R_z}(\theta) = Q_z(\theta) + \frac{ire^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}}$$

и из теоремы 1 получим, что

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_z(\theta) d\nu(\theta) + \frac{i}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda^*} R_z(\theta) \bar{\nu}(\theta) d\theta, \quad (8)$$

где $T_\lambda^* = \{\theta \in T_0 : |R_z(\theta) \bar{\nu}(\theta)| \leq \lambda\}$.

С другой стороны

$$R_z(\theta) = \frac{1}{1 - re^{i(\varphi-\theta)}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}},$$

так как

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} - \frac{re^{i\alpha}}{1 - re^{i\alpha}} = \frac{1}{1 - re^{-i\alpha}}.$$

Полагая в формуле (8) $e^{i\theta} = t$, имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\nu(\theta)}{t - z} + \frac{i}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda^*} \frac{e^{i\theta} \bar{\nu}(\theta) d\theta}{t - z}$$

и $T_\lambda^* = \{\theta \in T_0 : |\bar{\nu}(\theta)/(t - z)| \leq \lambda\}$.

Пусть $d\nu(\theta) = f(\theta) d\theta + d\nu_s(\theta)$. Тогда [9]

$$F(t) = F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\bar{\nu}(\theta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} f(\theta) d\theta}{t - z} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\nu_s(\theta)}{t - z} + \frac{i}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda^*} \frac{e^{i\theta} \bar{\nu}(\theta) d\theta}{t - z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\nu_s(\theta) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda^*} \frac{(f(\theta) + i\bar{\nu}(\theta))}{t - z} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\nu_s(\theta) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda^*} \frac{F(t)}{t - z} i e^{i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Из соотношения $m\{\theta \in T_0: |f(\theta)/(t-z)| \geq \lambda\} = o(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, вытекает, что $m(T_\lambda \Delta T_\lambda^*) = o(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

Следовательно, из (9) получим, что

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\nu_s(\theta) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda} \frac{F(t)}{t-z} dt.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем функции, определенные на T_0 , будем рассматривать как периодические функции, определенные на действительной прямой $\mathbb{R}$ с периодом 2π .

Для любой действительной функции f на T_0 обозначим

$$P(f; q; \theta_0; \theta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi q^{n-1}}{2} \cdot f(\theta)$$

при $\theta \in (\theta_0 + \pi q^n; \theta_0 + \pi q^{n-1}) \cup (\theta_0 - \pi q^{n-1}; \theta_0 - \pi q^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$, $\theta_0 \in T_0$,

$$P_1(f; \theta_0) = \lim_{q \rightarrow 1-} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \cdot m\{\theta \in (\theta_0; \theta_0 + \pi): |P(f; q; \theta_0; \theta)| > \alpha\}, \quad (10)$$

$$P_2(f; \theta_0) = \lim_{q \rightarrow 1-} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \cdot m\{\theta \in (\theta_0 - \pi; \theta_0): |P(f; q; \theta_0; \theta)| > \alpha\}, \quad (11)$$

$$r_{\lambda, f}(\theta_0) = \begin{cases} \operatorname{sign}(P_2(f; \theta_0) - P_1(f; \theta_0)) & \text{при } f(\theta_0) > \lambda, \\ 0 & \text{при } |f(\theta_0)| \leq \lambda, \\ \operatorname{sign}(P_1(f; \theta_0) - P_2(f; \theta_0)) & \text{при } f(\theta_0) < -\lambda, \end{cases}$$

если существуют пределы в правых частях равенств (10), (11) почти для всех $\theta_0 \in [0, 2\pi)$.

Отметим, что для любой меры $\nu \in M_R$ функция $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0)$ существует почти всюду. Действительно, из теоремы А следует, что для любого $0 < q < 1$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \cdot m\{\theta \in (\theta_0; \theta_0 + \pi): |P(\tilde{\nu}; q; \theta_0; \theta)| > \alpha\} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi q^{n-1}}{2} \int_{\theta_0 + \pi q^n}^{\theta_0 + \pi q^{n-1}} |d\nu_s(\theta)|,$$

где ν_s – сингулярная часть меры ν , и поэтому

$$P_1(\tilde{\nu}; \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} |d\nu_s(\theta)|. \quad (12)$$

Аналогично,

$$P_2(\tilde{\nu}; \theta_0) = \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} |d\nu_s(\theta)|. \quad (13)$$

Отсюда следует, что функции $P_1(\tilde{\nu}; \theta_0)$ и $P_2(\tilde{\nu}; \theta_0)$ и, следовательно, функция $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0)$ существуют почти всюду. Из (12), (13) также следует, что функция $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0)$ не зависит от абсолютно непрерывной части меры ν .

ТЕОРЕМА 3. Для любой меры $\nu \in M_R$ справедливо равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0. \quad (14)$$

Так как функция $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0)$ не зависит от абсолютно непрерывной части меры ν , достаточно доказать теорему для сингулярных мер. Поэтому в дальнейшем в доказательстве этой теоремы будем считать меру ν сингулярной и в формуле (14) вместо ν_s будем писать ν .

Приведем леммы, используемые при доказательстве теоремы 3.

ЛЕММА 1. Для любой меры $\nu \in M_+$ справедливо равенство (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (12), (13) получим, что

$$P_1(\tilde{\nu}; \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\nu(\theta), \quad P_2(\tilde{\nu}; \theta_0) = \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\nu(\theta).$$

Следовательно, при $\tilde{\nu}(\theta_0) > \lambda$ ($\lambda > 0$) имеем

$$\begin{aligned} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) &= \operatorname{sign}(P_2(\tilde{\nu}; \theta_0) - P_1(\tilde{\nu}; \theta_0)) \\ &= \operatorname{sign} \left(\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\nu(\theta) \right) = \operatorname{sign} \tilde{\nu}(\theta_0) = 1, \end{aligned}$$

а при $\tilde{\nu}(\theta_0) < -\lambda$ имеем $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) = \operatorname{sign}(-\tilde{\nu}(\theta_0)) = 1$.

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m\{\theta_0 \in T_0 : |\tilde{\nu}(\theta_0)| > \lambda\} = \frac{2}{\pi} \|\nu_s\| = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_s(\theta).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если мера $\nu_1 \in M_R$ сосредоточена на множестве $A \subset T_0$, а мера $\nu_2 \in M_R$ на $T_0 \setminus A$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\nu}_1| > \lambda) \cap (|\tilde{\nu}_2| > \lambda)) = 0. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Существуют меры $\mu_1, \mu_2 \in M_R$ с носителем соответственно в A и $T \setminus A$ такие, что

$$\|\mu_1 - \nu_1\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|\mu_2 - \nu_2\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Обозначим $F_1 = \operatorname{supp} \mu_1$, $F_2 = \operatorname{supp} \mu_2$. Для $\delta > 0$ положим

$$F_{j, \delta} = \{\theta \in T_0 : \operatorname{dist}(\theta, F_j) \leq \delta\}, \quad j = 1, 2,$$

где $\operatorname{dist}(\theta, F_j)$ обозначает евклидово расстояние от точки θ до множества F_j . Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что $F_{1, \delta} \cap F_{2, \delta} = \emptyset$.

Обозначим

$$\lambda_\delta = \max \left\{ \sup_{\theta \in T_0 \setminus F_{1,\delta}} |\tilde{\mu}_1(\theta)|, \sup_{\theta \in T_0 \setminus F_{2,\delta}} |\tilde{\mu}_2(\theta)| \right\}.$$

Возьмем $\lambda > 2\lambda_\delta$. Тогда из включений

$$(|\tilde{\mu}_1| > \lambda) \subset F_{1,\delta}, \quad (|\tilde{\mu}_2| > \lambda) \subset F_{2,\delta}$$

получим, что

$$(|\tilde{\mu}_1| > \lambda) \cap (|\tilde{\mu}_2| > \lambda) = \emptyset.$$

С другой стороны, из включений

$$\begin{aligned} (|\tilde{\nu}_1| > \lambda) &\subset \left(|\tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right) \cup \left(|\tilde{\nu}_1 - \tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right), \\ (|\tilde{\nu}_2| > \lambda) &\subset \left(|\tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right) \cup \left(|\tilde{\nu}_2 - \tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right) \end{aligned}$$

следует, что

$$(|\tilde{\nu}_1| > \lambda) \cap (|\tilde{\nu}_2| > \lambda) \subset \left[\left(|\tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right) \cap \left(|\tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right) \right] \cup \left(|\tilde{\nu}_1 - \tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right) \cup \left(|\tilde{\nu}_2 - \tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\nu}_1| > \lambda) \cap (|\tilde{\nu}_2| > \lambda)) \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m \left[\left(|\tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right) \cap \left(|\tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right) \right] + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m \left(|\tilde{\nu}_1 - \tilde{\mu}_1| > \frac{\lambda}{2} \right) \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m \left(|\tilde{\nu}_2 - \tilde{\mu}_2| > \frac{\lambda}{2} \right) \\ &= 0 + \frac{4}{\pi} \|\mu_{1,s} - \nu_{1,s}\| + \frac{4}{\pi} \|\mu_{2,s} - \nu_{2,s}\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\nu_{1,s}$, $\nu_{2,s}$, $\mu_{1,s}$, $\mu_{2,s}$ — сингулярные части соответственно мер ν_1 , ν_2 , μ_1 , μ_2 .

Из произвольности ε получим равенство (15). Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По теореме Хана–Жордана существуют неотрицательные меры ν_1 и ν_2 , сосредоточенные соответственно на некоторых множествах A и $T_0 \setminus A$, такие, что $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

Тогда

$$\begin{aligned} P_1(\tilde{\nu}; \theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} |d\nu_1(\theta) - d\nu_2(\theta)| = - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} (d\nu_1(\theta) + d\nu_2(\theta)), \\ P_2(\tilde{\nu}; \theta_0) &= \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} (d\nu_1(\theta) + d\nu_2(\theta)). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\tilde{\nu}(\theta_0) > \lambda$ ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) &= \text{sign}(P_2(\tilde{\nu}; \theta_0) - P_1(\tilde{\nu}; \theta_0)) \\ &= \text{sign}\left(\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \text{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} (d\nu_1(\theta) + d\nu_2(\theta))\right) = \text{sign}(\tilde{\nu}_1(\theta_0) + \tilde{\nu}_2(\theta_0)), \end{aligned}$$

а при $\tilde{\nu}(\theta_0) < -\lambda$ $r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) = -\text{sign}(\tilde{\nu}_1(\theta_0) + \tilde{\nu}_2(\theta_0))$.

Поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda [J_1(\lambda) - J_2(\lambda)], \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(\lambda) &= m((\tilde{\nu} > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 > 0)) + m((\tilde{\nu} < -\lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 < 0)), \\ J_2(\lambda) &= m((\tilde{\nu} > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 < 0)) + m((\tilde{\nu} < -\lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 > 0)). \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda J_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_1(\theta), \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda J_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_2(\theta). \quad (17)$$

Возьмем любое число $0 < \varepsilon < 1$.

Для любого $\theta \in (\tilde{\nu} > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 > 0)$ из неравенств

$$\tilde{\nu}(\theta) = \tilde{\nu}_1(\theta) - \tilde{\nu}_2(\theta) > \lambda, \quad \tilde{\nu}_1(\theta) + \tilde{\nu}_2(\theta) > 0$$

вытекает, что

$$0 < \tilde{\nu}_1(\theta) + \tilde{\nu}_2(\theta) < 2\tilde{\nu}_1(\theta) - \lambda.$$

Отсюда $\tilde{\nu}_1(\theta) > \lambda/2$. Поэтому

$$((\tilde{\nu} > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 > 0)) \subset \left((\tilde{\nu}_1 > (1 - \varepsilon)\lambda) \cup \left[\left(\tilde{\nu}_1 > \frac{\lambda}{2} \right) \cap (\tilde{\nu}_2 < -\varepsilon\lambda) \right] \right).$$

Аналогично доказывается, что

$$((\tilde{\nu} < -\lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 < 0)) \subset \left((\tilde{\nu}_1 < -(1 - \varepsilon)\lambda) \cup \left[\left(\tilde{\nu}_1 < -\frac{\lambda}{2} \right) \cap (\tilde{\nu}_2 > \varepsilon\lambda) \right] \right).$$

Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda J_1(\lambda) &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m(|\tilde{\nu}_1| > (1 - \varepsilon)\lambda) \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m\left[\left(|\tilde{\nu}_1| > \frac{\lambda}{2}\right) \cap (|\tilde{\nu}_2| > \varepsilon\lambda)\right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} \|\nu_1\|. \end{aligned}$$

Отсюда из произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda J_1(\lambda) \leq \frac{2}{\pi} \|\nu_1\| = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_1(\theta). \quad (18)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda J_2(\lambda) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu_2(\theta). \quad (19)$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda [J_1(\lambda) + J_2(\lambda)] \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [d\nu_1(\theta) + d\nu_2(\theta)].$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda [J_1(\lambda) + J_2(\lambda)] &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda [m(|\tilde{\nu}| > \lambda) - m((|\tilde{\nu}| > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 = 0))] \\ &= \frac{2}{\pi} \|\tilde{\nu}\| - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((|\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_2| > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_2 = -\tilde{\nu}_1)) \\ &= \frac{2}{\pi} \|\tilde{\nu}\| - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((2|\tilde{\nu}_1| > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_2 = -\tilde{\nu}_1)) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [d\nu_1(\theta) + d\nu_2(\theta)], \end{aligned}$$

потому что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m((2|\tilde{\nu}_1| > \lambda) \cap (\tilde{\nu}_2 = -\tilde{\nu}_1)) \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m\left(\left(|\tilde{\nu}_1| > \frac{\lambda}{2}\right) \cap \left(\tilde{\nu}_2 > \frac{\lambda}{2}\right)\right) = 0.$$

Поэтому неравенства (18) и (19) превращаются в равенства, т.е. выполняются равенства (17). Тогда из (16) получим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [d\nu_1(\theta) - d\nu_2(\theta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\nu(\theta).$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Для любой непрерывной по Гёльдеру функции f на T_0 и для любой меры $\nu \in M_R$ выполняется равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим меру $d\mu(\theta) = f(\theta) d\nu(\theta)$. Тогда

$$\tilde{\mu}(\theta) = J(\theta) + f(\theta)\tilde{\nu}(\theta),$$

где

$$J(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} [f(\theta_0) - f(\theta)] d\nu(\theta_0)$$

— интегрируемая функция.

Из теоремы 5 следует, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0. \quad (20)$$

Из интегрируемости функции $J(\theta)$ получим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(J > \lambda) = 0 \quad (21)$$

и, следовательно (см. доказательство теоремы 1),

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m((|\tilde{\mu}| > \lambda) \Delta (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)) = 0. \quad (22)$$

Из (22) вытекает, что для любого $0 < q < 1$ пределы

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \cdot m\{\theta \in (\theta_0; \theta_0 + \pi) : |P(\tilde{\mu}; q; \theta_0; \theta)| > \alpha\}$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \cdot m\{\theta \in (\theta_0; \theta_0 + \pi) : |P(f \cdot \tilde{\nu}; q; \theta_0; \theta)| > \alpha\}$$

совпадают почти всюду. Тогда почти всюду

$$P_1(\tilde{\mu}; \theta_0) = P_1(f \cdot \tilde{\nu}; \theta_0).$$

Аналогично доказывается, что почти всюду

$$P_2(\tilde{\mu}; \theta_0) = P_2(f \cdot \tilde{\nu}; \theta_0).$$

Это означает, что почти для всех $\theta_0 \in (|\tilde{\mu}| > \lambda) \cap (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)$

$$r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) = r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0 &= \int_{(|\tilde{\mu}| > \lambda)} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0 \\ &= \int_{(|\tilde{\mu}| > \lambda) \cap (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)} r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 + \int_{(|\tilde{\mu}| > \lambda) \setminus (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0 \\ &= \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 - \int_{(|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda) \setminus (|\tilde{\mu}| > \lambda)} r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 \\ &\quad + \int_{(|\tilde{\mu}| > \lambda) \setminus (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{(|\tilde{\mu}| > \lambda) \setminus (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)} r_{\lambda, \tilde{\mu}}(\theta_0) d\theta_0 - \int_{(|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda) \setminus (|\tilde{\mu}| > \lambda)} r_{\lambda, f \cdot \tilde{\nu}}(\theta_0) d\theta_0 \right| \\ &\leq m((|\tilde{\mu}| > \lambda) \Delta (|f \cdot \tilde{\nu}| > \lambda)). \end{aligned}$$

Поэтому из (20) и (22) получим, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \bar{\mu}}(\theta_0) d\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f \cdot \bar{\nu}}(\theta_0) d\theta_0.$$

Лемма доказана.

Аналогично лемме 3 можно доказать, что для любых непрерывных по Гёльдеру функций f_1 и f_2 , и для любых мер $\nu_1, \nu_2 \in M_R$ выполняется равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) d\nu_{1,s}(\theta) + f_2(\theta) d\nu_{2,s}(\theta)) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f_1 \cdot \bar{\nu}_1 + f_2 \cdot \bar{\nu}_2}(\theta_0) d\theta_0, \quad (23)$$

где $\nu_{1,s}$ и $\nu_{2,s}$ – сингулярные части соответственно мер ν_1 и ν_2 .

В этом случае нужно рассмотреть меру $\mu = f_1 \cdot \nu_1 + f_2 \cdot \nu_2$.

ЛЕММА 4. *Для любой меры $\nu \in M_C$ и непрерывной по Гёльдеру комплексной функции $f = f_1 + if_2$ выполняется равенство*

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Re}(f \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0 + i \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Im}(f \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu = \nu_1 + i\nu_2$. Тогда из равенства (24) получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\nu_s(\theta) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) d\nu_{1,s}(\theta) - f_2(\theta) d\nu_{2,s}(\theta)) + \frac{2i}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) d\nu_{2,s}(\theta) + f_2(\theta) d\nu_{1,s}(\theta)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f_1 \cdot \bar{\nu}_1 - f_2 \cdot \bar{\nu}_2}(\theta_0) d\theta_0 + i \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f_1 \cdot \bar{\nu}_2 + f_2 \cdot \bar{\nu}_1}(\theta_0) d\theta_0 \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Re}(f \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0 + i \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Im}(f \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основную теорему этой работы, т.е. представление аналитической функции через граничные значения для произвольных мер.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть мера $\nu \in M_C$, $u(re^{i\varphi})$ – ее интеграл Пуассона, а $v(re^{i\varphi})$ – гармонически сопряженная функция с $u(re^{i\varphi})$. Тогда*

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{T_\lambda} \frac{F(t)}{t - z} dt + \frac{1}{4i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Re } h}(\theta_0) d\theta_0 \\ &\quad + \frac{1}{4} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \text{Im } h}(\theta_0) d\theta_0, \quad z = re^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $h(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} F(e^{i\theta})$, $F(z) = u(z) + iv(z)$, $F(t)$ – некасательные предельные значения функции $F(z)$ при $z \rightarrow t = e^{i\theta}$, $T_\lambda = \{t = e^{i\theta} : |h(\theta)| \leq \lambda\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $g(\theta) = ie^{i\theta}/(e^{i\theta} - z)$. Из леммы 4 вытекает, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\nu_s(\theta) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Re}(g \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0 + i \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Im}(g \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0.$$

Пусть $d\nu(\theta) = f(\theta) d\theta + d\nu_s(\theta)$. Тогда [9]

$$F(t) = F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\bar{\nu}(\theta).$$

Отсюда

$$g(\theta) \cdot \bar{\nu}(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} \cdot i\bar{\nu}(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} [F(e^{i\theta}) - f(\theta)] = h(\theta) + ig(\theta)f(\theta).$$

Так как функция $g(\theta)f(\theta)$ интегрируема, рассуждая как в доказательстве леммы 3 получим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Re}(g \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Re} h}(\theta_0) d\theta_0, \quad (25)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Im}(g \cdot \bar{\nu})}(\theta_0) d\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, \operatorname{Im} h}(\theta_0) d\theta_0. \quad (26)$$

Применяя лемму 4 к непрерывной по Гёльдеру функции $g(t)$, из равенств (25), (26) и из теоремы 2 следует равенство (24).

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Т. С. Салимову за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ульянов П. Л. Об A -интеграле Коши // УМН. 1956. Т. 11. № 5. С. 223–229.
- [2] Виноградова И. А. Обобщенный интеграл и сопряженные функции // Матем. сб. 1976. Т. 99 (141). № 1. С. 84–121.
- [3] Виноградова И. А. Об LG^* -интеграле типа Коши // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 5. С. 645–653.
- [4] Riesz M. Sur les fonctions conjuguées // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.
- [5] Ульянов П. Л. A -интеграл и сопряженные функции // Ученые зап. Моск. ун-та. 1956. Т. 181. С. 139–157.
- [6] Hruscev S. V., Vinogradov S. A. Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series // Lect. Notes in Math. 1981. V. 864. P. 171–213.
- [7] Салимов Т. С. К теореме Е. Титчмарша о сопряженной функции // Proceedings of A. Razmadze Math. Institute. 1993. V. 102. P. 99–114.
- [8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [9] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.