Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сенашов, Характеризация обобщенно черниковских групп в группах с инволюциями, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 577–587

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:21:47

УДК 512.54

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННО ЧЕРНИКОВСКИХ ГРУПП В ГРУППАХ С ИНВОЛЮЦИЯМИ

В. И. Сенашов

Характеризуется класс обобщенно черниковских групп, т.е. периодических почти локально разрешимых групп с условием примарной минимальности. Класс получил название из-за строения, близкого к структуре черниковских групп. Так черниковская группа определяется как конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп, а обобщенно черниковская группа – это слойно конечное расширение прямого произведения A квазициклических p -групп с конечным числом множителей для каждого простого p , причем каждый ее элемент поэлементно непременовочен лишь с конечным числом силовских подгрупп из A .

Доказывается теорема, характеризующая обобщенно черниковские группы в классе групп с инволюциями.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Одним из перспективных в теории групп является развиваемое с 60-х годов направление характеристик некоторых известных классов групп в других классах групп, т.е. наложение наиболее слабых достаточных условий, при которых группы широкого класса попадают в более узкие классы групп. Ранее с этой точки зрения автором были рассмотрены класс слойно конечных групп, т.е. групп, у которых множество элементов любого данного порядка конечно, и класс конечных расширений слойно конечных групп. Следующий естественный шаг в этом направлении – описание обобщенно черниковских групп, которые являются расширением слойно конечной группы при помощи слойно конечной группы. Именно этот класс групп и рассматривается в данной статье. В работе [1] обобщенно черниковские группы охарактеризованы в классе периодических групп без элементов второго порядка. Здесь доказывается результат, позволяющий обобщить теорему из [1] на случай произвольных периодических групп. В доказательстве используется метод В.П. Шункова из [2], а основной результат данной работы является обобщением теоремы 3.1 из [2]. В теореме нельзя отбросить условие 1), так как при этом теорема теряет силу ввиду примеров групп Новикова–Адяна [3] и Ольшанского [4].

Основные понятия, используемые в работе, можно найти в монографии С.Н. Черникова [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00400.

2. Известные результаты, определения и вспомогательные утверждения.

В этом пункте мы приводим известные результаты и доказываем вспомогательные утверждения. Здесь же мы напомним необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Периодическая почти локально разрешимая группа с условием примарной минимальности называется *обобщенно черниковской группой*.

Термин “обобщенно черниковская группа” впервые появился в [6]. Его использование можно обосновать тем, что по теореме Я. Д. Половицкого (см. предложение 1) обобщенно черниковская группа G является расширением прямого произведения A квазициклических p -групп с конечным числом множителей для каждого простого числа p при помощи локально нормальной группы B , причем каждый элемент из G поэлементно непериодичен лишь с конечным числом силовских примарных подгрупп из A . Для сравнения черниковская группа является конечным расширением прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – группа с инволюциями. Каждой инволюции $i \in G$ поставим в соответствие множество подгрупп W_i , определяемое следующим образом. Если силовские 2-подгруппы из G – группы диэдра 8-го порядка и i содержится в четверной подгруппе Клейна R_i такой, что $C_G(i) < N_G(R_i)$, то полагаем $V_i = N_G(R_i)$, и такую подгруппу V_i включаем в множество W_i .

Если множество W_i все еще осталось пустым, то пополним его группой $C_G(i)$.

Группа G с инволюциями называется *T -группой*, если она удовлетворяет условиям:

- 1) любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;
- 2) нормализатор любой нетривиальной локально конечной подгруппы из G , содержащий инволюции, обладает локально конечной периодической частью.

Далее, для любой инволюции i и для любой подгруппы V_i из W_i

- 3) множество $G \setminus V_i$ обладает инволюцией;
- 4) для всякого элемента $c \in G \setminus V_i$, строго вещественного относительно i , т.е. $c^i = c^{-1}$, существует в $C_G(i)$ элемент s_c такой, что подгруппа $\text{gr}(c, c^{s_c})$ бесконечна.

В частности, T -группа G называется *T_0 -группой*, если в ней силовские 2-подгруппы – циклические или обобщенные группы кватернионов, а централизатор любой инволюции обладает конечной периодической частью.

Классы T -групп и T_0 -групп введены Шунковым.

Напомним, что элемент a группы G называется *строго вещественным относительно инволюции* $i \in G$, если $iai = a^{-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7]. *Периодическая почти локально разрешимая группа G с условием примарной минимальности имеет полную часть A , причем G/A локально нормальна и любой элемент из G поэлементно непериодичен лишь с конечным числом силовских p -подгрупп из A .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [5, теорема 3.7]. *Локально нормальная группа с черниковскими примарными подгруппами слойно конечна.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [8, теорема 5.1]. *Бесконечная слойно конечная p -группа имеет подгруппу конечного индекса, которая содержится в ее центре и разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [9]. *Локально разрешимая группа с условием минимальности для подгрупп – черниковская группа.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В обобщенно черниковской группе примарные подгруппы черниковские.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения примарной минимальности и предложения 4 вытекает, что примарная группа является конечным расширением черниковской группы, что и доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если обобщенно черниковская группа G не обладает полными подгруппами, то она тонкая слойно конечная группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 группа G является локально нормальной. Так как ее силовские подгруппы по предложению 5 удовлетворяют условию минимальности, то согласно предложению 2 она слойно конечна. Наконец, воспользовавшись предложением 3, получаем конечность ее силовских подгрупп. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [10]. *Пусть группа с инволюциями G и некоторая ее инволюция i удовлетворяют следующим условиям:*

- 1) *все подгруппы вида $\text{gr}(i, i^g)$, $g \in G$, конечны;*
- 2) *$C_G(i)$ обладает конечной периодической частью;*
- 3) *нормализатор любой нетривиальной (i) -инвариантной локально конечной подгруппы из G обладает периодической частью.*

Тогда либо в G множество всех элементов конечного порядка порождает периодическую почти нильпотентную подгруппу, либо G является T_0 -группой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 [11]. *Пусть для группы G и некоторой ее инволюции i выполняются условия:*

- 1) *$\text{gr}(i, i^g)$ конечна для любого элемента $g \in G$;*
- 2) *нормализатор любой конечной нетривиальной (i) -инвариантной подгруппы, содержащий инволюции, обладает слойно конечной периодической частью.*

Тогда либо G обладает слойно конечной периодической частью, либо G – Φ -группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть группа G и некоторая ее инволюция i удовлетворяют следующим условиям:

- 1) *все подгруппы вида $\text{gr}(i, i^g)$, $g \in G$, конечны;*
- 2) *$C_G(i)$ бесконечен и обладает слойно конечной периодической частью;*
- 3) *$C_G(i) \neq G$ и $C_G(i)$ не содержится в других подгруппах из G , обладающих периодической частью;*
- 4) *если K – конечная подгруппа из G , не лежащая в $C_G(i)$, и $V = K \cap C_G(i) \neq 1$, то K – группа Фробениуса с дополнением V .*

Тогда группа G называется Φ -группой.

Класс Φ -групп введен Шунковым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *В нечерниковской обобщенно черниковской группе любой элемент обладает бесконечным централизатором.*

Предложение вытекает из определения обобщенно черниковской группы и предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 [2, теорема 1.39]. *Пусть группа G , ее сильно вложенная подгруппа H и некоторая инволюция i из H удовлетворяют условию:*

подгруппа $\text{gr}(i, i^g)$ конечна для $g \in G \setminus H$.

Тогда все инволюции в G сопряжены, и для любой инволюции $j \in G \setminus H$ множество элементов из H , строго вещественных относительно j , имеет ту же мощность, что и множество инволюций из H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, содержащая инволюции. Подгруппа H называется *сильно вложенной* в G , если $H \cap H^g$ не содержит инволюций для любого $g \in G \setminus H$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11 [2, теорема 3.1]. *Пусть G – группа с инволюциями, удовлетворяющая условиям:*

- 1) *любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;*
- 2) *нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы, содержащий инволюции, обладает черниковской периодической частью.*

Тогда либо G обладает черниковской периодической частью, либо G – T -группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12 [12, теорема 60.20.1]. *Группа внешних автоморфизмов черниковской группы почти вся не имеет кручения.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 [13], [14]. *2-группа с единственной инволюцией является циклической или обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14 [15]. *Пусть G – периодическая почти локально разрешимая группа. Если для некоторой конечной подгруппы F нормализатор любой F -инвариантной конечной элементарной абелевой подгруппы удовлетворяет условию примарной минимальности, то и сама группа G удовлетворяет этому условию.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15 [2, теорема 1.48]. *Пусть G – периодическая группа вида $G = B\lambda(i)$, где i – инволюция, B – группа без инволюций. Тогда $G = \mathfrak{M}C_G(i)$, где $\mathfrak{M}$ – множество элементов из B , имеющих конечный нечетный порядок и строго вещественных относительно i .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16 [16], [17]. *Пусть G – локально конечная группа, i – некоторая ее инволюция и силовские 2-подгруппы из G – циклические или обобщенные группы кватернионов. Тогда $G = O_{2'}(G) \cdot C_G(i)$.*

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА. *Пусть G – группа с инволюциями, удовлетворяющая условиям:*

- 1) *любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;*
- 2) *нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы, содержащий инволюции, обладает обобщенно черниковской периодической частью.*

Тогда либо G обладает обобщенно черниковской периодической частью, либо G – T -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G – группа, удовлетворяющая условиям 1), 2) теоремы и G не обладает обобщенно черниковской периодической частью. Доказательству теоремы предпослём несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Для подгрупп A, B, C , содержащих инволюции, с бесконечными обобщенно черниковскими периодическими частями справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если $D = A \cap B$ имеет бесконечную периодическую часть и $N_G(D)$ содержит инволюции, то $\text{gr}(A, B)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью;*
- 2) *группа C вкладывается в максимальную подгруппу из G с обобщенно черниковской периодической частью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем поэтапно. Сначала предположим, что полная часть группы C нетривиальна. Рассмотрим подгруппу $H = N_G(\tilde{C})$. Так как $C \leq H$, то H содержит инволюции, а поскольку C удовлетворяет условию примарной минимальности, то в $\tilde{C}$ найдется конечная нетривиальная характеристическая подгруппа. Отсюда вытекает, что H обладает обобщенно черниковской периодической частью. Нормализатор V ее полной части является максимальной подгруппой с обобщенно черниковской периодической частью в G . Действительно, как и выше, периодическая часть V обобщенно черниковская и ее полная часть содержит $\tilde{C}$. Тогда $\tilde{V} \leq N_G(\tilde{C}) = H$, и полные части подгрупп V и H совпадают. Если найдется большая подгруппа B из G с обобщенно черниковской периодической частью, то, как и ранее, докажем $\tilde{B} \leq \tilde{V} = \tilde{H}$, что влечет совпадение полных частей групп B и H . Отсюда включение $B \leq N_G(\tilde{H}) = V$ противоречит предположению, и в этом случае максимальность V доказана и, тем самым, доказано утверждение 2) для C с нетривиальной полной частью.

Утверждение 1) устанавливается для нетривиальной полной части группы D аналогично доказательству леммы 3.5 из [2]. Поэтому предположим, что хотя бы одна из подгрупп A, B , например A , обладает нетривиальной полной частью, а D не содержит неединичных полных подгрупп.

Если в B имеется нетривиальная полная подгруппа, то в полной части группы B возьмем силовскую примарную подгруппу P . Ввиду строения обобщенно черниковской группы P нормальна в B . А так как в B выполняется условие примарной минимальности, то P – черниковская группа, и по предложению 12 P централизует подгруппу с обобщенно черниковской периодической частью, пересекающуюся по подгруппе конечного индекса с периодической частью группы D . Аналогично, в полной части группы A возьмем примарную силовскую подгруппу Q и точно так же докажем, что Q централизует подгруппу с обобщенно черниковской периодической частью, пересекающуюся по подгруппе конечного индекса с периодической частью группы D . Обозначив через M пересечение $(C_D(P) \cap C_D(Q)) \cap (C_D(P) \cap C_D(Q))^i$ (здесь i – инволюция, нормализующая D), заметим, что в нормализаторе $N = N_G(M)$ содержатся подгруппы Q, P и инволюция i . Поскольку A и B обладают нетривиальными полными частями по доказанному выше, включим их в максимальные подгруппы A_1 и B_1 соответственно с обобщенно черниковскими периодическими частями. Пересечение $A_1 \cap N$ содержит полную подгруппу Q , инвариантную относительно некоторой инволюции из A . Как и выше, в такой ситуации докажем, что $N \leq A_1$. Аналогично, $N \leq B_1$. Но тогда пересечение $A_1 \cap B_1$ содержит полную инволютивно допустимую подгруппу и $A_1 = B_1$. Отсюда

$\text{gr}(A, B)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Пусть теперь B полными подгруппами не обладает. Включим A в максимальную подгруппу A_1 в G с обобщенно черниковской периодической частью. Если A_1 уже содержит B , то утверждение 1) выполняется. Предположим, что нашелся элемент b конечного порядка из разности $B \setminus A_1$. По предложению 6 B обладает слойно конечной периодической частью, а по свойствам таких групп централизатор элемента b в B имеет конечный индекс. Значит, индекс $|D_1 : C_D(b) \cap D_1|$ для пересечения $D_1 = A_1 \cap B$ конечен. Как и раньше, рассмотрев вспомогательную подгруппу N , содержащую силовскую примарную подгруппу Q из полной части A_1 , элемент b и инволюцию i , получим включение $b \in A_1$ и противоречие с максимальнойностью A_1 .

Если элемента b конечного порядка из разности $B \setminus A$ не нашлось, то значит, периодическая часть группы B полностью входит в A_1 . В этом случае полная подгруппа Q централизует подгруппу конечного индекса M из периодической части группы B . Очевидно, в M найдется подгруппа M_1 конечного индекса, нормальная в периодической части группы B . Далее рассматриваем сопряженные с M_1 подгруппы при помощи элементов из B . Все они нормальны в периодической части группы B и имеют в ней такие же индексы, как и M_1 . Так как периодическая часть группы B слойно конечна, таких подгрупп в ней найдется лишь конечное число. Тогда пересечение M_2 этих подгрупп является нормальной подгруппой в B и имеет конечный индекс в ее периодической части.

Рассмотрим нормализатор $N_G(M_2)$. По условию 2) теоремы и свойствам обобщенно черниковских групп он обладает обобщенно черниковской периодической частью, и по построению M_2 пересекается с A_1 по полной подгруппе Q . Как доказано выше, в этом случае нормализатор группы M_2 попадает в A_1 вместе с содержащейся в нем группой B .

Таким образом, утверждение 1) доказано в случае, когда одна из подгрупп A, B содержит нетривиальную полную подгруппу.

Завершим доказательство утверждения 2), а затем вернемся к доказательству утверждения 1). Осталось предположить, что C не содержит нетривиальных полных подгрупп. Если в G имеется содержащая C подгруппа с обобщенно черниковской периодической частью и с нетривиальной полной частью, то имеет место рассмотренная выше ситуация. Значит, будем предполагать, что все подгруппы с обобщенно черниковскими периодическими частями, содержащие C из G , не обладают нетривиальными полными подгруппами, по предложению 6 их периодические части слойно конечны.

Рассмотрим цепь, состоящую из таких подгрупп:

$$C < H_1 < \dots < H_n < \dots$$

и V — объединение этой цепи.

Пусть j — инволюция из C , и для некоторой нетривиальной конечной (j) -инвариантной подгруппы K из V полная часть нормализатора $N_V(K)$ оказалась нетривиальной. Очевидно, найдется подгруппа H_m для некоторого m , содержащая K . Так как H_m обладает бесконечной слойно конечной периодической частью, то в пересечении $N_{H_m}(K) \cap C_{H_m}(j)$ бесконечно много элементов конечного порядка. Отсюда и пересечение $N_V(K) \cap C_V(j)$ обладает этим же свойством. Из его (j) -инвариантности и нетривиальности полной части $N_V(K)$ по доказанному выше получаем обобщенную черниковость периодической части группы $M = \text{gr}(N_V(K), C_V(j))$. Ввиду конечности индекса $|C : C_V(j) \cap C|$

в пересечение $M \cap C$ входит бесконечно много элементов конечного порядка и инволюция j . Опять, используя нетривиальность полной части группы M , мы видим, что подгруппа $\text{gr}(M, C)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью, содержит C и некоторую полную подгруппу. Противоречие с предположением означает, что в V нормализатор любой нетривиальной конечной (j)-инвариантной подгруппы обладает слойно конечной периодической частью. Отсюда, используя локальную конечность периодической группы V , по предложению 8 заключаем, что она обладает слойно конечной периодической частью. Таким образом, периодическая часть объединения любой цепи подгрупп с обобщенно черниковскими периодическими частями, содержащих C , также является обобщенно черниковской группой. Отсюда по лемме Цорна получаем существование максимальной подгруппы с обобщенно черниковской периодической частью в G , содержащей C . Утверждение 2) доказано.

Завершим доказательство утверждения 1). Теперь полные части подгрупп A, B тривиальны. Включим A в максимальную подгруппу A_1 из G с обобщенно черниковской периодической частью, а подгруппу B в максимальную подгруппу B_1 из G с обобщенной черниковской периодической частью. Если полная часть одной из групп A_1, B_1 нетривиальна, то этот случай уже рассмотрен. Поэтому будем предполагать тривиальность их полных частей. По предложению 6 периодические части групп A_1 и B_1 – тонкие слойно конечные группы. Обозначим через i какую-нибудь инволюцию из B_1 , через b некоторый элемент конечного порядка из $B_1 \setminus A_1$, если такой найдется. По свойствам слойно конечных групп индексы $|B_1 : C_{B_1}(i)|, |B_1 : C_{B_1}(b)|$ конечны. Значит, конечен индекс $|W : C_W(i, b)|$, и ввиду бесконечности периодической части группы $W = A_1 \cap B_1$ найдется неединичный элемент конечного порядка $d \in C_W(i, b)$. Опять по свойствам слойно конечных групп $E = C_G(d)$ пересекается с A_1 и B_1 по подгруппам конечного индекса в A_1 и B_1 соответственно, содержит i, b и имеет обобщенно черниковскую периодическую часть по условию 2) теоремы. Если полная часть группы E нетривиальна, то, как и выше в подобном случае, придем к противоречию с максимальнойностью A_1 . Следовательно, можем считать, что E не обладает полными подгруппами. По предложению 6 периодическая часть группы E – тонкая слойно конечная группа. Пересечение $W_1 = A_1 \cap E$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и его периодическая часть имеет конечный индекс в периодической части группы A_1 . Теперь периодическая часть группы $C_{W_1}(b)$ имеет конечный индекс в периодической части группы A_1 . Повторяя рассуждения, используемые при построении подгруппы M_2 , найдем подгруппу из периодической части $C_{W_1}(b)$, нормальную в A_1 . Однако, нормализатор этой подгруппы содержит группу A_1 , элемент b и обладает обобщенно черниковской периодической частью. Противоречие с максимальнойностью A_1 . Таким образом, элемента b конечного порядка из разности $B_1 \setminus A_1$ не найдется.

Это означает, что периодическая часть группы B_1 содержится в A_1 . Аналогично докажем, что периодическая часть группы A_1 содержится в B_1 . Окончательно получаем совпадение периодических частей групп A_1 и B_1 . Тогда нормализатор периодической части группы A_1 , очевидно, является группой с обобщенно черниковской периодической частью и содержит группы A и B . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что централизатор любой инволюции из G обладает бесконечной обобщенно черниковской периодической частью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом условий 1), 2) теоремы утверждение леммы вытекает из предложения 7. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что в группе G нормализатор Y некоторой конечной подгруппы K , содержащий инволюции, не обладает черниковской периодической частью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом условий 1), 2) теоремы утверждение леммы непосредственно следует из предложения 11. Лемма доказана.

Пусть Y – та самая подгруппа, о которой идет речь в лемме 3. По условиям теоремы Y обладает обобщенно черниковской периодической частью. Включим Y в максимальную подгруппу H с обобщенно черниковской периодической частью (мы можем это сделать согласно лемме 1). Обозначим через i некоторую инволюцию из H .

ЛЕММА 4. *Централизатор любой инволюции из H содержится в H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 9 централизатор любой инволюции из H в G содержит бесконечно много элементов конечного порядка из H , а по лемме 2 его периодическая часть является обобщенно черниковской. Следовательно, по лемме 1 он целиком лежит в H ввиду ее максимальной. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Подгруппа H сильно вложена в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $H \cap H^g$ содержит инволюцию t для некоторого элемента $g \in G \setminus H$, то по лемме 4 $C_G(t) \leq H \cap H^g$, и это пересечение по лемме 2 обладает бесконечной периодической частью. Тогда по лемме 1 $H = H^g$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *В группе H множество инволюций конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 H сильно вложена в G . Отсюда все ее инволюции $\mathfrak{N}$ сопряжены в ней. Возьмем произвольный элемент $g \in G \setminus H$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество инволюций из H^g . Если для некоторой инволюции $i \in \mathfrak{N}$ и некоторой инволюции $j \in \mathfrak{M}$ $\text{gr}(i, j)$ не является группой Фробениуса (бесконечной группой она быть не может по условию 1) теоремы), то в ней имеется центральная инволюция t , отличная от i, j . По лемме 4 она принадлежит пересечению $H \cap H^g$, а это противоречит лемме 5. Значит, $\text{gr}(i, j)$ – группы Фробениуса для любой пары инволюций из H, H^g соответственно. Зафиксируем инволюцию $i \in \mathfrak{N}$, а инволюция j пусть пробегает множество $\mathfrak{M}$. По свойствам групп диэдра найдется элемент $c_j \in (ij)$ такой, что $c_j^{-1}jc_j = i$. По построению множества $\mathfrak{M}$ для некоторого $r \in \mathfrak{N}$: $j = g^{-1}rg$. Отсюда $c_j^{-1}g^{-1}rgc_j = i$. Если $h_j = gc_j$, то $i \in H^{h_j}$, и по лемме 5 $h_j \in H$. Представим $g = h_jc_j^{-1}$. Если $s \neq k$ для $s, k \in \mathfrak{M}$, то $c_s \neq c_k$. Действительно, $c_s = c_k$ влечет $c_s^{-1}sc_s = c_k^{-1}kc_k$ и, значит, $s = k$. Получили противоречие. Очевидно, $Hg = Hc_j^{-1}$.

По свойствам групп диэдра ic_j^{-1} – инволюция из Hg . Таких инволюций столько же, сколько и инволюций в $\mathfrak{M}$, т.е. бесконечно много. В качестве представителя смежного класса Hg возьмем инволюцию такого вида t . Тогда инволюцию ic_j^{-1} можно представить в виде $ic_j^{-1} = s_jt$, где $s_j \in H$. Но заметим, что $s_jts_jt = 1$ или $t^{-1}s_jt = s_j^{-1}$. Подгруппа $Z = \text{gr}(s_j \mid j \in \mathfrak{M})$ бесконечна и $Z < H$. Но $t \in N_G(Z) \setminus H$, а Z – обобщенно

черниковская по выбору H . Так как $N_G(Z) \cap H$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка и инволюцию, то по лемме 1 $t \in N_G(Z) \leq H$. Противоречие с выбором t из смежного класса Hg . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *В H имеется единственная инволюция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в H нашлось более одной инволюции. Тогда по предложению 10 в H существует неединичный элемент a , строго вещественный относительно инволюции $t \in G \setminus H$. Группа $X = C_G(a)\lambda(t)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью по условию 2) теоремы. Согласно предложению 9 и выбору H пересечение $D = X \cap H$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Поскольку по лемме 6 в H конечное число инволюций, то $|D : C_D(i)| < \infty$. Теперь, как и в доказательстве леммы 1, придем к противоречию с максимальностью H . Лемма доказана.

Пусть a – элемент нечетного порядка из $G \setminus H$, строго вещественный относительно инволюции i . Предположим, что все подгруппы вида $\text{gr}(a, a^s)$, $s \in C_G(i)$, конечны. Тогда по лемме Измайлова [18] группы вида $L_s = \text{gr}(a, a^s, i)$ конечны при всех $s \in C_G(i)$. Множество этих подгрупп обозначим через $\mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{A}$ бесконечно, так как в противном случае для некоторой бесконечной последовательности различных элементов $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ из H получили бы

$$a^{s_1} = a^{s_2} = \dots = a^{s_n} = \dots$$

Отсюда $s_n s_1^{-1} \in C_G(a)$, $n = 1, 2, \dots$, и пересечение $H \cap C_G(a)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Но тогда по лемме 1 получили бы $a \in H$ вопреки выбору элемента a .

ЛЕММА 8. *В $\mathfrak{A}$ существует лишь конечное число подгрупп, не являющихся полупростыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лемма неверна и $L_1, \dots, L_n, \dots$ – различные подгруппы с нетривиальными нормальными элементарными абелевыми подгруппами $V_1, \dots, V_n, \dots$ соответственно. С помощью предложения 15 представим V_n в виде $V_n = Z_n \times F_n$, где $Z_n = C_G(i) \cap V_n$.

Если среди V_n лишь конечное число различных, то, очевидно, можем предполагать, что все они совпадают и равны V . По условию 2) теоремы и свойствам обобщенно черниковских групп $B = N_G(V)$ имеет обобщенно черниковскую периодическую часть и L_n входят в B вместе с элементами a^{s_n} , $n = 1, 2, \dots$. Тогда полная часть $\tilde{B}$ группы B нетривиальна по предложению 6, и инволюция i действует регулярно на полной части ввиду конечности периодической части централизатора $C_B(i)$ (она конечна ввиду леммы 1). Следовательно, бесконечное множество строго вещественных элементов a^{s_n} поэлементно перестановочно с $\tilde{B}$, что противоречит строению обобщенно черниковской группы.

Значит, можем считать, что $V_1, \dots, V_n, \dots$ – бесконечная последовательность различных подгрупп.

Пусть $Z_n \neq 1$ для любого n . По лемме 4 Z_n лежат в H при любом n . Зафиксируем произвольный номер n и рассмотрим нормализатор $N_G(Z_n)$. По условию 2) теоремы он обладает обобщенно черниковской периодической частью, и по предложению 9 в его пересечении с H содержится бесконечно много элементов конечного порядка (в том числе

инволюция i). Тогда согласно лемме 1 и выбору H подгруппа $N_G(Z_n)$ затягивается в H вместе с F_n , а это противоречит лемме 7.

Противоречие означает тривиальность Z_n при любых n . Если V_n имеют нечетный порядок для всех n , то $F_n\lambda(i)$ – группы Фробениуса. В этом случае по свойствам групп Фробениуса $V_n(a)$ – абелева группа для всех n . Тогда $V_n < N_G((a)) = D$, $n = 1, 2, \dots$, и по условию 2) теоремы D обладает бесконечной обобщенно черниковской периодической частью. Включим D в максимальную подгруппу D_1 с обобщенно черниковской периодической частью. В $C_{D_1}(i)$ периодическая часть конечная, иначе элемент a попал бы в H , чего быть не может согласно выбору a . Если в D_1 периодическая часть черниковская, то опять по предложению 6 заключаем, что полная часть группы D_1 не может быть тривиальной ввиду бесконечности множества $V_1, \dots, V_n, \dots$. Тогда, как и при рассмотрении группы B , ввиду строения обобщенно черниковской группы получим противоречие с бесконечностью числа подгрупп V_n .

Пусть теперь периодическая часть группы D_1 нечерниковская. Тогда $N_{D_1}(V_n)$ содержит бесконечное множество элементов конечного порядка согласно предложению 9 и инволюцию i . По условию 2) теоремы $N_G(V_n)$ имеет обобщенно черниковскую периодическую часть, и по лемме 1 он попадает в D_1 для любого n . Тогда эти нормализаторы вместе с элементами a_{s_n} лежат в D_1 , а это невозможно (как и при рассмотрении группы B).

Остается рассмотреть случай, когда V_n – 2-группа, $n = 1, 2, \dots$. Так как $V_n\lambda(i)$ – конечная 2-группа, то $C_G(i) \cap V_n \neq 1$, $n = 1, 2, \dots$. Но тогда V_n содержится в H , так как i – единственная в H инволюция и справедлива лемма 4. Противоречие с бесконечностью множества $V_1, \dots, V_n, \dots$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Группы H не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как H – сильно вложенная подгруппа в G и $L_1, \dots, L_n, \dots$ – бесконечная последовательность различных подгрупп вида $L_s = \text{gr}(a, a^s, i)$, $s \in H$, то пересечение $V_n = L_n \cap H$ сильно вложено в L_n . По лемме 8 все подгруппы L_n можно считать полупростыми. Так как силовская 2-подгруппа из L_n является циклической или обобщенной группой кватернионов по предложению 13, то согласно предложению 16 L_n не может быть полупростой. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Ввиду леммы 9 не выполняется предположение, сделанное перед леммой 8, о конечности групп вида $\text{gr}(a, a^s)$, $s \in C_G(i)$. Докажем, что G – T -группа. Очевидно, достаточно только показать выполнимость условия 2) из определения T -группы.

Рассмотрим локально конечную подгруппу M из G , нормализатор которой содержит инволюции. Предположим сначала, что M не обладает инволюциями, и обозначим через k некоторую инволюцию из ее нормализатора. По теореме Файта–Томпсона группа $M\lambda(k)$ почти локально разрешима. Тогда по предложению 14 она удовлетворяет условию примарной минимальности, и, следовательно, M является обобщенно черниковской группой. Ввиду строения таких групп по предложению 1 в M найдется конечная характеристическая подгруппа, и по условию 2) теоремы $N_G(M)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью, и в этом случае все доказано. Пусть теперь j – некоторая инволюция из M . Согласно леммам 5, 7 и предложению 10 силовская 2-подгруппа в G обладает единственной инволюцией. Тогда по предложениям 13, 16 $M = O_{2'}(M) \cdot C_M(j)$.

Если $O_{2'}(M) \neq 1$, то $O_{2'}(M)\lambda(j)$ – обобщенно черниковская группа по теореме Файта–Томпсона и предложению 14. Тогда $O_{2'}(M)$ содержит конечную характеристическую подгруппу, которая будет, очевидно, (j) -допустимой, и по условию 2) теоремы ее нормализатор в G обладает обобщенно черниковской периодической частью. Значит, нормализатор M в G также имеет обобщенно черниковскую периодическую часть. Если же $O_{2'}(M) = 1$, то $M = C_M(j)$, и по условию 2) теоремы M будет обобщенно черниковской группой, и опять ее нормализатор имеет обобщенно черниковскую и, значит, локально конечную периодическую часть. То есть условие 2) определения T -группы выполнено. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Senashov V. I. Groups with minimality condition // Proceedings of the International Conference “Infinite Groups” / ed. Francesco de Giovanni, Martin L. Newell. Ravello, Italy, May 23–27, 1994. Berlin–New York: de Gruyter, 1995. P. 229–234.
- [2] Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.
- [3] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [4] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [5] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами для системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [6] Шунков В. П., Шафиро А. А. Об одной характеристизации обобщенно черниковских групп // XV Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докл. Ч. 1. Группы. Красноярск: Изд-во КрасГУ, 1979. С. 185.
- [7] Половицкий Я. Д. Слоино-экстремальные группы // Матем. сб. 1962. Т. 56. № 1. С. 95–106.
- [8] Сенашов В. И. Слоино конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993.
- [9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
- [10] Шунков В. П. Группы с инволюциями. Ч. 5. Препринт. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1992.
- [11] Ivko M. N., Senashov V. I. On a new class of infinite groups // Preprint № 1. Krasnoyarsk: Computing Center of RAN, 1993. P. 30–44.
- [12] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1980.
- [13] Шунков В. П. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 4. С. 484–496.
- [14] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [15] Ивко М. Н. Характеризация групп, обладающих слоино конечной периодической частью. Автореферат дисс. ... к. ф.-м. н. Екатеринбург, 1993.
- [16] Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Locally Finite Groups. Amsterdam–London: North-Holland, 1973.
- [17] Hartley B. Finite groups of automorphisms of locally soluble groups // J. Algebra. 1979. V. 57. № 1. P. 242–257.
- [18] Измайлов А. Н. Характеризация групп $SL(2, P)$ и $Sz(P)$ над локально конечным полем P характеристики 2 // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 2. С. 127–172.