Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, Вполне интегрируемые нелинейные динамические системы типа цепочек Ленгмюра, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 588–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:22:31

УДК 517.53

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТИПА ЦЕПОЧЕК ЛЕНГМЮРА

В. Н. Сорокин

Решение задачи Коши для полубесконечной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений, впервые рассмотренной в 1987 году О. И. Богоявленским, получено в терминах разложения вектора марковских функций – резольвентных функций, – связанного с цепочкой несимметричного оператора, в многомерную непрерывную дробь по алгоритму Эйлера–Якоби–Перрона. Применяется метод обратной спектральной задачи, основанный на паре Лакса, теория совместных аппроксимаций Эрмита–Паде и метод Штурма–Лиувилля для разностных уравнений.

Библиография: 13 названий.

1. В этой работе мы проинтегрируем цепочку дифференциальных уравнений

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n+1} \cdots c_{n+r} - c_{n-1} \cdots c_{n-r}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$c_{-r} = 0, \quad \dots, \quad c_{-1} = 0 \quad (2)$$

и с начальными условиями $c_n(0) > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Здесь r – фиксированное натуральное число. Решение цепочки ищется при $t \geq 0$.

При $r = 1$ система дифференциальных уравнений (1) – это хорошо известная цепочка Ленгмюра [1]. При $r > 1$ цепочки (1) впервые ввел в рассмотрение и изучал О. И. Богоявленский в 1987 году [2], [3]. Была установлена связь этих цепочек с уравнением Кортевега–де Фриза, найдены соответствующие им пары Лакса, указан набор первых интегралов и предложена схема решения цепочек методом обратной спектральной задачи. Реализация этой схемы наталкивается на существенные трудности, связанные с изучением спектральных характеристик возникающих при этом несимметричных операторов. В последующих работах этот метод развивался в направлении, использующем матрицы Вейля. Укажем лишь две из последних таких работ [4], [5], где, в частности, интегрируются цепочки типа Тоды.

Мы проинтегрируем систему (1), (2), также используя метод обратной спектральной задачи для некоторого несимметричного разностного оператора, причем представим

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда и Правительства России, грант N7N300, фонда INTAS, грант № 93-219ext, фонда Deutsche Forschungsgemeinschaft, грант AZ: 436 RUS 17/42/95, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00730.

ответ в виде, вполне аналогичном классическому самосопряженному случаю. Необходимо отметить, что недавно А. И. Аптекаревым и В. А. Калягиным независимо также были получены новые результаты о цепочках, отличных от (1), но имеющих аналогичную структуру. Их методы исследования отличаются от наших (эти результаты еще не опубликованы).

Будем считать, что $r = 2$. Переход к произвольному r тривиален. Определим операцию деления вектора $g = (g^{(1)}, g^{(0)})$ на вектор $d = (d^{(1)}, d^{(0)})$ следующей формулой:

$$\frac{g}{d} = \left(\frac{g^{(1)}d^{(0)}}{d^{(1)}}, \frac{g^{(0)}}{d^{(1)}} \right), \quad (3)$$

если только $d^{(1)} \neq 0$. Обозначим через Δ множество в комплексной плоскости, состоящее из трех лучей, выходящих из нуля и проходящих через корни третьей степени из единицы.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Задача Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n+1}c_{n+2} - c_{n-1}c_{n-2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$c_{-2} = 0, \quad c_{-1} = 0, \quad (5)$$

начальные условия которой $c_n(0)$ образуют ограниченную последовательность положительных чисел, имеет единственное решение на промежутке $t \in [0, +\infty)$. Решением является ограниченная (при каждом t) последовательность положительных функций $c_n(t)$, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{\int_{\Delta} \frac{e^{x^3 t} d\mu^{(1)}(x)}{\lambda - x}}{\lambda \int_{\Delta} e^{x^3 t} d\mu^{(0)}(x)}, \frac{\int_{\Delta} \frac{e^{x^3 t} d\mu^{(0)}(x)}{\lambda - x}}{\int_{\Delta} e^{x^3 t} d\mu^{(0)}(x)} \right) = \frac{(1, 1)}{(\lambda, 0) + \frac{(c_0(t), c_0(t))}{(\lambda, 0) + \frac{(c_1(t), -c_1(t))}{(\lambda, 0) + \frac{(c_2(t), -c_2(t))}{(\lambda, 0) + \dots}}}}, \quad (6)$$

где конечные положительные борелевские меры $d\mu^{(0)}(x)$ и $d\mu^{(1)}(x)$ с общим компактным носителем на Δ единственным образом (с точностью до нормировки) определяются той же формулой (6) при $t = 0$.

Таким образом, для того чтобы решить цепочку (4), (5), мы, используя известные начальные условия $c_n(0)$, суммируем непрерывную дробь в (6) и, например по формуле Стильтеса–Перрона, находим меры $d\mu^{(0)}$, $d\mu^{(1)}$. После чего, раскладывая левую часть (6) в непрерывную дробь, получаем решение $c_n(t)$.

Доказательство теоремы завершается в п. 8 применением лемм, доказанных в п. 2–7. В п. 9 рассмотрен один конкретный пример.

2. Обозначим через S множество всех последовательностей действительных чисел

$$s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$$

таких, что $s_{3n+2} = 0, n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\overset{\circ}{S}$ множество всех последовательностей из S , нормированных условием $s_0 = 1$. Рассмотрим бесконечную матрицу

$$\mathcal{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} s_0 & s_3 & s_6 & \dots \\ s_1 & s_4 & s_7 & \dots \\ s_3 & s_6 & s_9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а также матрицы $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$, которые получаются из $\mathcal{H}^{(0)}$ вычеркиванием первой строки и первых двух строк соответственно.

Обобщенными определителями Ганкеля $\mathcal{H}_n^{(j)}$ будем называть главные миноры порядка n матриц $\mathcal{H}^{(j)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и по определению $\mathcal{H}_0^{(j)} = 1$, где $j = 0, 1, 2$.

Последовательность $s \in S$ назовем *несингулярной*, если все ее обобщенные определители отличны от 0. Последовательность $s \in S$ назовем *позитивной*, если все ее обобщенные определители Ганкеля положительны:

$$\mathcal{H}_n^{(j)} > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 0, 1, 2.$$

Множество всех позитивных последовательностей обозначим через S_+ . Множество всех позитивных последовательностей из $\overset{\circ}{S}$ обозначим через $\overset{\circ}{S}_+$.

Пусть $\mathbb{R}[\lambda]$ – линейное пространство всех многочленов с вещественными коэффициентами. Каждая последовательность $s \in S$ порождает линейный функционал $\mathfrak{S}: \mathbb{R}[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}$, ставящий в соответствие многочлену

$$P(\lambda) = p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_0$$

число

$$\mathfrak{S}\{P(\lambda)\} = s_n p_n + s_{n-1} p_{n-1} + \dots + s_0 p_0.$$

Функционал $\mathfrak{S}$ назовем *позитивным* (*несингулярным*), если позитивна (несингулярна) порождающая этот функционал последовательность.

Будем обозначать через $\varepsilon = \exp\{2\pi i/3\}$ кубический корень из единицы и через $\mathbb{Z}_3$ – циклическую группу 3-го порядка, состоящую из следующих преобразований комплексной плоскости: $z \mapsto \varepsilon^l z, l = 0, 1, 2$.

Зафиксируем некоторый несингулярный функционал $\mathfrak{S}$ и поставим следующую задачу.

ЗАДАЧА (Н). Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ требуется найти многочлен $H_n(\lambda)$ такой, что

- 1) $\deg H_n(\lambda) \leq n$;
- 2) $H_n(\lambda) \not\equiv 0$;
- 3) $H_n(\lambda)$ инвариантен относительно группы $\mathbb{Z}_3$, т.е. $H_n(\varepsilon \lambda) = \varepsilon^n H_n(\lambda)$;
- 4) $H_n(\lambda)$ удовлетворяет соотношениям ортогональности $\mathfrak{S}\{H_n(\lambda) \lambda^k\} = 0$, когда $k = 0, \dots, [n/2] - 1$ и $n + k + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

ЛЕММА 1. Если $\mathfrak{S}$ – несингулярный функционал, то для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует и притом только один (с точностью до нормировки) многочлен $H_n(\lambda)$ степени в точности n , удовлетворяющий условиям задачи (Н).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из того, что условия задачи (Н) сводятся к системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $H_n(\lambda)$. При этом, приравнивая к 0 старшие коэффициенты многочлена $H_n(\lambda)$, мы будем получать системы, определителями которых служат обобщенные определители Ганкеля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 1 вытекают детерминантные формулы для многочленов $H_n(\lambda)$. Например,

$$H_{6n}(\lambda) = \frac{h_{6n}}{\mathcal{H}_{2n}^{(0)}} \begin{vmatrix} s_0 & s_3 & \dots & s_{6n} \\ s_1 & s_4 & \dots & s_{6n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{3n-2} & s_{3n+1} & \dots & s_{9n-2} \\ 1 & \lambda^3 & \dots & \lambda^{6n} \end{vmatrix},$$

где h_{6n} – старший коэффициент многочлена $H_{6n}(\lambda)$. Аналогичные формулы имеют место и для других индексов.

Назовем многочлены $H_n(\lambda)$ *инвариантными* (относительно группы $\mathbb{Z}_3$) *многочленами совместной ортогональности*. Они служат естественным обобщением многочленов, ортогональных на всей вещественной оси с симметричной мерой.

До сих пор мы никак не фиксировали нормировку многочленов $H_n(\lambda)$. Будем обозначать через $\mathring{H}_n(\lambda)$ многочлены с единичным старшим коэффициентом. Существенную роль в дальнейшем будет играть некоторая специальная нормировка. Введем нормировочные постоянные

$$m_n = \mathfrak{S}\{\mathring{H}_n(\lambda)\lambda^{[n/2]}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа. Из замечания к лемме 1 следует, что

$$m_{3n+j} = \frac{\mathcal{H}_{n+1}^{(j)}}{\mathcal{H}_n^{(j)}}, \quad j = 0, 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом, функционал $\mathfrak{S}$ позитивный тогда и только тогда, когда все $m_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\mathfrak{S}$ – позитивный функционал. Многочлены $H_n(\lambda)$ будем называть *нормированными*, если их старшие коэффициенты вычисляются по формулам $h_n = m_n^{-2/3}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 2. Если последовательность $s \in \mathring{S}_+$, то соответствующая ей последовательность нормированных инвариантных многочленов совместной ортогональности $\{H_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ является единственным решением рекуррентного соотношения

$$a_n H_{n+1}(\lambda) + b_{n-2} H_{n-2}(\lambda) = \lambda H_n(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

с начальными условиями

$$H_{-2}(\lambda) = 0, \quad H_{-1}(\lambda) = 0, \quad H_0(\lambda) = 1.$$

Коэффициенты рекуррентного соотношения определяются по формулам

$$a_n = \frac{h_n}{h_{n+1}}, \quad b_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен вида

$$H(\lambda) = \lambda H_n(\lambda) - b H_{n-2}(\lambda).$$

При любом выборе параметра b этот многочлен удовлетворяет условиям 1)–3) задачи (Н) для индекса $n+1$, а также всем соотношениям ортогональности условия 4) за исключением, быть может, последнего:

$$\mathfrak{S}\{H(\lambda)\lambda^{[n/2]-1}\} = 0. \quad (9)$$

Параметр b найдем из условия (9), равносильного уравнению

$$b \mathfrak{S}\{H_{n-2}(\lambda)\lambda^{[n/2]-1}\} = \mathfrak{S}\{H_n(\lambda)\lambda^{[n/2]}\}.$$

Отсюда находим

$$b = \frac{h_n m_n}{h_{n-2} m_{n-2}} = \left(\frac{h_{n-2}}{h_n} \right)^{1/2}.$$

Тогда $H(\lambda) = a H_{n+1}(\lambda)$, где постоянную a находим из сравнения старших коэффициентов, а именно: $a = h_n / h_{n+1}$.

Построим из коэффициентов рекуррентного соотношения (7) бесконечную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & & & \\ 0 & 0 & a_1 & & \mathbf{0} \\ b_0 & 0 & 0 & a_2 & \\ & b_1 & 0 & 0 & a_3 \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Если $H = (H_0, H_1, \dots)^T$ – бесконечный столбец многочленов $H_n(\lambda)$, то соотношение (7) запишется в матричном виде $AH = \lambda H$.

Обобщенной матрицей Якоби назовем любую матрицу вида (10) с положительными элементами, связанными условием (8). Обозначим через $\mathbf{J}$ множество всех таких матриц. В лемме 2 мы построили некоторое отображение

$$\mathring{S}_+ \rightarrow \mathbf{J}. \quad (11)$$

Очевидно, имеет место аналог теоремы Шохата–Фавара, утверждающий, что это отображение взаимно однозначно.

3. По-прежнему считаем фиксированными некоторую последовательность $s \in \overset{\circ}{S}_+$ и порожденный ею функционал $\mathfrak{S}$. Представим $\mathfrak{S}$ в виде суммы $\mathfrak{S}^{(0)} + \mathfrak{S}^{(1)}$, где функционалы $\mathfrak{S}^{(0)}$ и $\mathfrak{S}^{(1)}$ соответствуют последовательностям

$$(s_0, 0, 0, s_3, 0, 0, s_6, \dots) \quad \text{и} \quad (0, s_1, 0, 0, s_4, 0, 0, \dots).$$

Наряду с многочленами $H_n(\lambda)$ будем изучать *многочлены второго рода*

$$K_n^{(j)}(\lambda) = \mathfrak{S}_x^{(j)} \left\{ \frac{H_n(\lambda) - H_n(x)}{\lambda - x} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 0, 1.$$

Рассмотрим также формальные степенные ряды

$$f^{(j)}(\lambda) = \mathfrak{S}_x^{(j)} \left\{ \frac{1}{\lambda - x} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{3n+j}}{\lambda^{3n+j+1}}, \quad j = 0, 1. \quad (12)$$

ЛЕММА 3. *Степенной ряд $J_n^{(j)}(\lambda) = H_n(\lambda)f^{(j)}(\lambda) - K_n^{(j)}(\lambda)$ имеет вид*

$$J_n^{(j)}(\lambda) = \frac{\nu_n^{(j)}}{\lambda^{[n/2]+1}} + \dots,$$

где $\nu_n^{(0)} \neq 0$ для четных n , и $\nu_n^{(1)} \neq 0$ для нечетных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим степенной ряд

$$J_n(\lambda) = J_n^{(0)}(\lambda) + J_n^{(1)}(\lambda).$$

Тогда

$$J_n(\lambda) = H_n(\lambda)\mathfrak{S}_x \left\{ \frac{1}{\lambda - x} \right\} - \mathfrak{S}_x \left\{ \frac{H_n(\lambda) - H_n(x)}{\lambda - x} \right\} = \mathfrak{S}_x \left\{ \frac{H_n(x)}{\lambda - x} \right\}.$$

Следовательно,

$$J_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{\lambda^{k+1}},$$

где

$$\nu_k = \mathfrak{S}\{H_n(x)x^k\} = \begin{cases} 0, & \text{если } k < [n/2], \\ h_n m_n, & \text{если } k = [n/2]. \end{cases}$$

Остается воспользоваться инвариантностью рядов $J_n^{(j)}$ относительно группы $\mathbb{Z}_3$.

Доказанная лемма означает, что рациональные функции

$$\pi_n^{(j)} = \frac{K_n^{(j)}}{H_n} \quad (13)$$

суть *совместные аппроксимации Эрмита–Паде* [6] рядов (12). В частности, имеет место сходимость $\pi_n^{(j)} \rightarrow f^{(j)}$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 0, 1$, по неархимедовой норме поля формальных степенных рядов.

Очевидно, что многочлены второго рода удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и многочлены $H_n(\lambda)$, а именно:

$$a_n K_{n+1}^{(j)}(\lambda) + b_{n-2} K_{n-2}^{(j)}(\lambda) = \lambda K_n^{(j)}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (14)$$

но с другими начальными условиями:

$$K_{-2}^{(0)} = 1, \quad K_{-1}^{(0)} = 0, \quad K_0^{(0)} = 0, \quad K_{-2}^{(1)} = 0, \quad K_{-1}^{(1)} = 1, \quad K_0^{(1)} = 0, \quad (15)$$

если положить $b_{-2} = -1$, $b_{-1} = -\sqrt{a_0}$.

4. Установим связь совместных аппроксимаций Эрмита–Паде (13) с двумерными непрерывными дробями. Исследование проведем по схеме, предложенной в [7].

Обозначим через M линейное пространство размерности 2 над полем комплексных чисел, а именно: $M = \{(z^{(1)}, z^{(0)}) : z^{(j)} \in \mathbb{C}\}$. Напомним, что операцию деления вектора на вектор мы определили формулой (3). Будем изучать бесконечную непрерывную дробь

$$\frac{g_1}{d_1 + \frac{g_2}{d_2 + \ddots}}$$

где $g_n, d_n \in M$ (или более общо, это векторы формальных алгебраических переменных). Обозначим через

$$\Pi_n = \frac{g_1}{d_1 + \ddots + \frac{g_n}{d_n}} \quad (16)$$

n -ю подходящую дробь. Тогда

$$\Pi_n = \left(\frac{\varkappa_n^{(1)}}{\eta_n}, \frac{\varkappa_n^{(0)}}{\eta_n} \right),$$

где $\eta_n, \varkappa_n^{(1)}, \varkappa_n^{(0)}$ – многочлены от переменных $g_k^{(j)}$ и $d_k^{(j)}$, $k = 1, \dots, n$, $j = 0, 1$. Обозначим через $w_n(z)$ следующее дробно-линейное преобразование пространства M :

$$w_n(z) = \frac{g_n}{d_n + z} = \left(\frac{g_n^{(1)}(d_n^{(0)} + z^{(0)})}{d_n^{(1)} + z^{(1)}}, \frac{g_n^{(0)}}{d_n^{(1)} + z^{(1)}} \right).$$

Тогда подходящую дробь (16) можно рассматривать как композицию дробно-линейных преобразований

$$\Pi_n = w_1 \circ \dots \circ w_n(0). \quad (17)$$

Удобно вложить линейное пространство M в проективное пространство

$$\mathbb{G} = M^* \setminus \{0\} / \sim, \quad (18)$$

где $M^* = \{(z^{(1)}, z^{(0)}, z^{(*)}) : z^{(j)} \in \mathbb{C}\}$ – трехмерное линейное пространство над $\mathbb{C}$, и факторизация в (18) производится по отношению пропорциональности векторов. Обозначим через $\pi : M^* \rightarrow \mathbb{G}$ каноническую проекцию

$$\pi : (z^{(1)}, z^{(0)}, z^{(*)}) \mapsto \left(\frac{z^{(1)}}{z^{(*)}}, \frac{z^{(0)}}{z^{(*)}} \right).$$

Тогда каждому дробно-линейному преобразованию w проективного пространства $\mathbb{G}$ соответствует линейное преобразование W линейного пространства M^* такое, что следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{W} & M^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{G} & \xrightarrow{w} & \mathbb{G} \end{array}$$

коммутативна. В частности, преобразованию w_n соответствует линейное преобразование с матрицей

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & g_n^{(1)} & g_n^{(1)} d_n^{(0)} \\ 0 & 0 & g_n^{(0)} \\ 1 & 0 & d_n^{(1)} \end{pmatrix},$$

а композиции $\sigma_n = w_1 \circ \dots \circ w_n$ соответствует произведение матриц $\Sigma_n = W_1 \cdots W_n$.

ЛЕММА 4. Если положить $g_0^{(1)} = 1$, то числители и знаменатели подходящих дробей Π_n будут решениями рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = d_{n+1}^{(1)} x_n + d_{n+1}^{(0)} g_{n+1}^{(1)} x_{n-1} + g_{n+1}^{(0)} g_n^{(1)} x_{n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (19)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \kappa_{-2}^{(0)} &= 1, & \kappa_{-2}^{(1)} &= 0, & \eta_{-2} &= 0, \\ \kappa_{-1}^{(0)} &= 0, & \kappa_{-1}^{(1)} &= 1, & \eta_{-1} &= 0, \\ \kappa_0^{(0)} &= 0, & \kappa_0^{(1)} &= 0, & \eta_0 &= 1. \end{aligned} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбор начальных условий (20) проверяется прямым вычислением. Далее имеем

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n W_{n+1}. \quad (21)$$

Обозначим через $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$, $y_n^{(3)}$ столбцы матрицы Σ_n . Тогда (21) равносильно соотношениям

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(3)}, \quad y_{n+1}^{(2)} = g_{n+1}^{(1)} y_n^{(1)}, \quad y_{n+1}^{(3)} = d_{n+1}^{(0)} g_{n+1}^{(1)} y_n^{(1)} + g_{n+1}^{(0)} y_n^{(2)} + d_{n+1}^{(1)} y_n^{(3)}. \quad (22)$$

В силу (17) $x_n = (\kappa_n^{(1)}, \kappa_n^{(0)}, \eta_n)^T$ – третий столбец матрицы Σ_n , т.е. $x_n = y_n^{(3)}$. Исключая из системы (22) первый и второй столбцы, приходим к (19).

Как следствие получим следующее разложение в непрерывную дробь:

$$(f^{(1)}(\lambda), f^{(0)}(\lambda)) = \frac{(1, -b_{-2}/a_0)}{(\lambda/a_0, 0) + \frac{(1, -b_{-1}/a_1)}{(\lambda/a_1, 0) + \frac{(1, -b_0/a_2)}{(\lambda/a_2, 0) + \dots}}}. \quad (23)$$

Действительно, для дроби (23)

$$g_{n+1}^{(1)} = 1, \quad g_{n+1}^{(0)} = -\frac{b_{n-2}}{a_n}, \quad d_{n+1}^{(1)} = \frac{\lambda}{a_n}, \quad d_{n+1}^{(0)} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, соотношение (19) примет вид

$$x_{n+1} = \frac{\lambda}{a_n} x_n - \frac{b_{n-2}}{a_n} x_{n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

что совпадает с (7) и (14). Начальные условия (20) также совпадают с начальными условиями для многочленов H_n и многочленов второго рода (15). Таким образом, n -й подходящей дробью для дроби (23) будут аппроксимации $(\pi_n^{(1)}, \pi_n^{(0)})$. По лемме 3 они сходятся к $(f^{(1)}(\lambda), f^{(0)}(\lambda))$.

Переходя от дроби (23) к эквивалентной дроби и обозначая $c_n = a_n^{3/2}$, получим разложение

$$(f^{(1)}(\lambda), f^{(0)}(\lambda)) = \frac{(1, 1)}{(\lambda, 0) + \frac{(c_0, c_0)}{(\lambda, 0) + \frac{(c_1, -c_1)}{(\lambda, 0) + \frac{(c_2, -c_2)}{(\lambda, 0) + \dots}}}}. \quad (24)$$

Дробь (24) можно рассматривать как двумерный аналог непрерывной дроби Чебышева. Она представляет собой конструктивный алгоритм вычисления отображения, обратного к отображению (11). Вычисление самого отображения (11) также сводится к разложению пары степенных рядов $(f^{(1)}(\lambda), f^{(0)}(\lambda))$ в непрерывную дробь (24) с помощью алгоритма Эйлера–Якоби–Перрона [7] (многомерного аналога алгоритма Евклида).

5. Рассмотрим обобщенную матрицу Якоби (10), в которой

$$a_n = c_n^{2/3}, \quad b_n = (c_n c_{n+1})^{1/3}.$$

Построим также бесконечную матрицу B , все элементы которой равны 0, кроме элементов, стоящих на трех диагоналях:

$$(B)_{n,n+3} = \alpha_n, \quad (B)_{n+3,n} = \beta_n, \quad (B)_{n+6,n} = \gamma_n,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$ и $(B)_{n,m}$ есть элемент матрицы B , стоящий в n -й строке и в m -м столбце. При этом полагаем

$$\alpha_n = -\frac{2}{3}(c_n c_{n+1} c_{n+2})^{2/3}, \quad \beta_n = \frac{1}{3}(c_n c_{n+1} c_{n+2})^{1/3}(c_{n-1} + c_{n+1} + c_{n+3}),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{3}(c_n c_{n+1} c_{n+2} c_{n+3} c_{n+4} c_{n+5})^{1/3},$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $[A, B] = AB - BA$ коммутатор двух матриц. Прямым вычислением проверяется

ЛЕММА 5. *Последовательность положительных функций $c_n = c_n(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (4) с граничными условиями (5) тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы A и B образуют пару Лакса, т.е. удовлетворяют уравнению $\dot{A} = [A, B]$.*

Пусть последовательность c_n ограничена, тогда A и B – матрицы ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$, записанные в стандартном базисе $e_0, e_1, e_2, \dots$. В работах [8], [9] изучались спектральные свойства несимметричных операторов, заданных обобщенными матрицами Якоби. В частности, было показано как вычисляется резольвента $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ в терминах аппроксимаций Эрмита–Паде. В

дальнейшем нам понадобится знать лишь нулевой и первый столбцы, а также нулевую строку матрицы R_λ . Для столбцов имеем формулы

$$R_\lambda e_0 = J^{(0)}, \quad R_\lambda e_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} J^{(1)},$$

где $J^{(j)}$ – столбцы из функций второго рода $J_n^{(j)}$ (см. лемму 3). Для того чтобы найти нулевую строку матрицы R_λ , необходимо рассмотреть задачу, двойственную по отношению к задаче о совместных аппроксимациях Эрмита–Паде. А именно, будем изучать рекуррентное соотношение $A^*x = \lambda x$, где A^* – сопряженный оператор, или в явном виде

$$\lambda x_0 = b_0 x_2, \quad \lambda x_1 = a_0 x_0 + b_1 x_3, \quad \lambda x_2 = a_1 x_1 + b_2 x_4, \quad \dots$$

Полагая $x_n = F_n^{(j)}(\lambda)$ и выбирая начальные условия

$$F_0^{(0)} = 1, \quad F_1^{(0)} = 0, \quad F_0^{(1)} = 0, \quad F_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{a_0}},$$

получим две последовательности многочленов $F_n^{(0)}(\lambda)$ и $F_n^{(1)}(\lambda)$ соответственно. Заметим, что последовательность многочленов $\{H_n\}$ и последовательность пар многочленов $\{(F_n^{(0)}, F_n^{(1)})\}$ образуют биортонормированную систему относительно пары функционалов $(\mathfrak{S}^{(0)}, \mathfrak{S}^{(1)})$, а именно:

$$\mathfrak{S}^{(0)}\{H_n(\lambda)F_m^{(0)}(\lambda)\} + \mathfrak{S}^{(1)}\{H_n(\lambda)F_m^{(1)}(\lambda)\} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Определим многочлены второго рода формулой

$$L_n(\lambda) = \mathfrak{S}_x^{(0)}\left\{\frac{F_n^{(0)}(\lambda) - F_n^{(0)}(x)}{\lambda - x}\right\} + \mathfrak{S}_x^{(1)}\left\{\frac{F_n^{(1)}(\lambda) - F_n^{(1)}(x)}{\lambda - x}\right\}$$

и рассмотрим аппроксимации

$$G_n(\lambda) = F_n^{(0)}(\lambda)f^{(0)}(\lambda) + F_n^{(1)}(\lambda)f^{(1)}(\lambda) - L_n(\lambda).$$

Тогда нулевой строкой матрицы R_λ будет $e_0 R_\lambda = G$ – строка из аппроксимаций G_n .

Выясним как преобразуется система уравнений (4), (5) при отображении (11).

ЛЕММА 6. *Ограниченная последовательность положительных функций $c_n = c_n(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (4) с граничными условиями (5) тогда и только тогда, когда соответствующая ей последовательность моментов $s_n = s_n(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\dot{s}_n = s_{n+3} - s_n s_3, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (25) в виде

$$\dot{s}_{3n} = s_{3n+3} - s_{3n}s_3, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (26)$$

$$\dot{s}_{3n+1} = s_{3n+4} - s_{3n+1}s_3, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (27)$$

Уравнения (26) равносильны следующему уравнению для производящей функции:

$$\dot{f}^{(0)}(\lambda) = (\lambda^3 - c_0c_1)f^{(0)}(\lambda) - \lambda^2, \quad (28)$$

а уравнения (27) равносильны уравнению

$$\dot{f}^{(1)}(\lambda) = (\lambda^3 - c_0c_1)f^{(1)}(\lambda) - c_0\lambda. \quad (29)$$

Зависимость всех величин от параметра t явно не указывается, но подразумевается. Из леммы 5 по индукции получим

$$\frac{d}{dt}A^n = [A^n, B]$$

и, следовательно, $\dot{R}_\lambda = [R_\lambda, B]$. Поскольку $f^{(0)}(\lambda) = (R_\lambda)_{0,0}$, то

$$\dot{f}^{(0)} = \beta_0G_3 + \gamma_0G_6 - \alpha_0J_3^{(0)}. \quad (30)$$

Проведем вычисления аппроксимаций:

$$\begin{aligned} G_3(\lambda) &= (c_0c_1c_2)^{-1/3}(-c_0f^{(0)}(\lambda) + \lambda f^{(1)}(\lambda)), \\ G_6(\lambda) &= (c_0c_1c_2c_3c_4c_5)^{-1/3}((\lambda^3 + c_0c_3)f^{(0)}(\lambda) - (c_1 + c_3)\lambda f^{(1)}(\lambda) - \lambda^2), \\ J_3^{(0)}(\lambda) &= (c_0c_1c_2)^{-2/3}((\lambda^3 - c_0c_1)f^{(0)}(\lambda) - \lambda^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30) и приводя подобные члены, получим (28). Аналогично доказывается равенство (29).

6. Докажем, что последовательность многочленов $H_n(\lambda)$ образует систему Штурма.

ЛЕММА 7. *Многочлен $H_{3n+j}(\lambda)$ имеет ровно n простых нулей на интервале $(0, +\infty)$ и нуль порядка j в точке $\lambda = 0$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, $j = 0, 1, 2$. Положительные нули многочленов $H_n(\lambda)$ и $H_{n+1}(\lambda)$ перемежаются, т.е. между двумя последовательными нулями одного из этих многочленов лежит ровно один нуль другого многочлена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанное поведение многочленов в точке $\lambda = 0$ непосредственно вытекает из рекуррентного соотношения (7).

Рассмотрим многочлены

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} H_n(\lambda) & K_n^{(0)}(\lambda) \\ H_{n+1}(\lambda) & K_{n+1}^{(0)}(\lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^*(\lambda) = \begin{vmatrix} H_n(\lambda) & K_n^{(0)}(\lambda) \\ H_{n+2}(\lambda) & K_{n+2}^{(0)}(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Используя рекуррентные формулы (7), (14), находим, что

$$a_n\Delta_n(\lambda) = b_{n-2}\Delta_{n-2}^*(\lambda), \quad n \geq 2, \quad (32)$$

$$a_{n+1}\Delta_n^*(\lambda) = \lambda\Delta_n(\lambda) + b_{n-1}\Delta_{n-1}(\lambda), \quad n \geq 1. \quad (33)$$

Из (32), (33) и начальных условий

$$\Delta_0 = \frac{1}{a_0}, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_0^* = \frac{\lambda}{a_0 a_1}$$

вытекает, что $\Delta_n(\lambda)$ – ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами при $n \geq 2$. Следовательно, $\Delta_n(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$.

Для доказательства леммы применим индукцию. База индукции очевидна. Проведем шаг индукции. Предположим, что многочлен H_{3n-1} имеет $n - 1$ простых положительных нулей $\lambda_{3n-1,j}$, а многочлен H_{3n} имеет n простых положительных нулей $\lambda_{3n,j}$, причем эти нули перемежаются, т.е.

$$0 < \lambda_{3n,1} < \lambda_{3n-1,1} < \lambda_{3n,2} < \dots < \lambda_{3n-1,n-1} < \lambda_{3n,n}. \quad (34)$$

Поскольку

$$\Delta_{3n-1}(\lambda_{3n,j}) = H_{3n-1}(\lambda_{3n,j}) K_{3n}^{(0)}(\lambda_{3n,j}) > 0$$

и

$$\Delta_{3n}(\lambda_{3n,j}) = -H_{3n+1}(\lambda_{3n,j}) K_{3n}^{(0)}(\lambda_{3n,j}) > 0,$$

то числа $H_{3n-1}(\lambda_{3n,j})$ и $H_{3n+1}(\lambda_{3n,j})$ имеют разные знаки. В силу (34)

$$H_{3n+1}(\lambda_{3n,n}) < 0, \quad H_{3n+1}(\lambda_{3n,n-1}) > 0, \quad \dots,$$

знаки чередуются. Следовательно, многочлен $H_{3n+1}(\lambda)$ имеет n положительных нулей вида

$$\lambda_{3n,1} < \lambda_{3n+1,1} < \lambda_{3n,2} < \dots < \lambda_{3n,n} < \lambda_{3n+1,n}.$$

Но в силу инвариантности он не может иметь более чем n положительных нулей. Аналогичным образом происходит переход к многочлену $H_{3n+2}(\lambda)$, а затем – к многочлену $H_{3n+3}(\lambda)$. В последнем случае необходимо также определить знак $\operatorname{sgn} H_{3n+3}(0) = (-1)^{n+1}$, что сразу следует из рекуррентной формулы (7).

Рациональные функции

$$\lambda^m \pi_n^{(m)}(\lambda) = \frac{\lambda^m K_n^{(m)}(\lambda)}{H_n(\lambda)}, \quad m = 0, 1,$$

в силу леммы 7 имеют следующие разложения в сумму простейших дробей:

$$\lambda^m \pi_{3n+k}^{(m)}(\lambda) = \mu_{3n+k,0}^{(m)} \cdot \frac{1}{\lambda} + \sum_{j=1}^n \mu_{3n+k,j}^{(m)} \cdot \frac{3\lambda^2}{\lambda^3 - \lambda_{3n+k,j}^3}. \quad (35)$$

Коэффициенты $\mu_{n,j}^{(m)}$ разложения (35) будем называть *коэффициентами Кристоффеля*.

ЛЕММА 8. Все коэффициенты Кристоффеля строго положительны, за исключением $\mu_{3n,0}^{(0)} = 0$, $\mu_{3n,0}^{(1)} = 0$, $\mu_{3n+1,0}^{(1)} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь коэффициенты $\mu_{3n,j}^{(0)}$, где $j = 1, \dots, n$. Для остальных коэффициентов доказательство аналогично. Согласно лемме 7

$$H'_{3n}(\lambda_{3n,n}) > 0, \quad H'_{3n}(\lambda_{3n,n-1}) < 0, \quad \dots, \quad (36)$$

знаки чередуются. Из доказательства леммы 7 следует, что

$$K_{3n}^{(0)}(\lambda_{3n,n}) > 0, \quad K_{3n}^{(0)}(\lambda_{3n,n-1}) < 0, \quad \dots,$$

знаки чередуются, причем чередование знаков то же, что в (36). Вычисляя коэффициенты Кристоффеля как вычеты в простых полюсах, находим

$$\mu_{3n,j}^{(0)} = \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_{3n,j}} \pi_{3n}^{(0)}(\lambda) = \frac{K_{3n}^{(0)}(\lambda_{3n,j})}{H'_{3n}(\lambda_{3n,j})} > 0.$$

7. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех конечных положительных борелевских мер на Δ , имеющих конечные степенные моменты любого порядка. Построим дискретные меры $d\mu_{3n+k}^{(m)} \in \mathfrak{M}$, сосредоточив в каждой из точек $\lambda_{3n+k,j}\varepsilon^l$, $l = 0, 1, 2$, массу $\mu_{3n+k,j}^{(m)}$, где $j = 1, \dots, n$, и массу $\mu_{3n+k,0}^{(m)}$ в точке $\lambda = 0$. По построению эти меры инвариантны относительно группы $\mathbb{Z}_3$. Разложение (35) можно переписать в виде

$$\lambda^m \pi_n^{(m)}(\lambda) = \int_{\Delta} \frac{d\mu_n^{(m)}(x)}{\lambda - x}.$$

В силу леммы 3 меры $d\mu_n^{(m)}$ решают следующую усеченную проблему моментов:

$$\int_{\Delta} x^{3k} d\mu_n^{(m)}(x) = s_{3k+m}, \quad k = 0, \dots, n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \quad m = 0, 1.$$

В частности, все меры $d\mu_n^{(0)}$, $n \geq 1$, вероятностные, а все меры $d\mu_n^{(1)}$, $n \geq 2$, имеют полную вариацию s_1 . По теореме Хелли из последовательностей мер $\{d\mu_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательности, сходящиеся в *-слабой топологии к некоторым мерам $d\mu^{(m)} \in \mathfrak{M}$, которые решают следующую проблему моментов:

$$\int_{\Delta} x^{3k} d\mu^{(m)}(x) = s_{3k+m}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad m = 0, 1. \quad (37)$$

Тем самым, степенные ряды

$$\lambda^m f^{(m)}(\lambda), \quad m = 0, 1, \quad (38)$$

будут асимптотическими разложениями функций

$$\int_{\Delta} \frac{d\mu^{(m)}(x)}{\lambda - x}, \quad m = 0, 1, \quad (39)$$

голоморфных на открытом множестве $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

В случае неограниченного оператора A встает задача об описании всех решений проблемы моментов (37) в терминах расширений этого оператора. В настоящей работе мы

рассматриваем лишь случай ограниченных операторов. В этом случае из определенности проблемы моментов Хаусдорфа [10] вытекает единственность решения задачи (37), причем последовательности мер $d\mu_n^{(m)}$ слабо сходятся к этому решению. Обозначим через ρ наименьший радиус круга $|\lambda| \leq \rho$, содержащего общий носитель мер $d\mu^{(m)}$, и через Δ_ρ – пересечение этого круга с Δ . Тогда степенные ряды (38) будут рядами Лорана функций (39), голоморфных в области $\mathbb{C} \setminus \Delta_\rho$, сходящимися при $|\lambda| > \rho$. Из слабой сходимости мер вытекает аналог теоремы Маркова, а именно: при $n \rightarrow \infty$ совместные аппроксимации Эрмита–Паде $\lambda^m \pi_n^{(m)}(\lambda)$ сходятся к функциям (39) равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus \Delta_\rho$. Меры $d\mu^{(m)}$ естественно называть *спектральными мерами оператора A*.

Следует подчеркнуть, что в отличие от случая самосопряженных операторов носитель спектральных мер не совпадает со спектром оператора. В [9] был рассмотрен пример оператора A с элементами $a_n = 1$, $b_n = 1$, носителем спектральных мер которого является множество Δ_ρ , где $\rho = 3 \cdot 2^{-2/3}$, а спектром служит часть комплексной плоскости, ограниченная трехлепестковой розой $r = 2 \cos 3\varphi$.

Другая интересная на наш взгляд задача состоит в описании множества U всех производных Радона–Никодима $u = d\mu^{(1)}/d\mu^{(0)}$. Здесь мы можем привести лишь одно простое достаточное условие принадлежности функции u классу U , которое легко доказывается методами работы [11]. А именно, если

- i) $(1, u)$ и (u, x^3) являются АТ-системами на промежутке $[0, +\infty)$;
- ii) для некоторого $0 < \alpha < 3$ имеем

$$0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)x^{-\alpha} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} u(x)x^{-\alpha} < +\infty,$$

то для любой меры $d\mu \in \mathfrak{M}$, имеющей бесконечный носитель, последовательность моментов

$$s_{3n} = \int_{\Delta} x^{3n} d\mu(x), \quad s_{3n+1} = \int_{\Delta} x^{3n} u(x) d\mu(x), \quad s_{3n+2} = 0 \quad (40)$$

будет положительной, т.е. $u \in U$. Заметим, что из одного лишь условия i) следует несингулярность последовательности (40), но не следует, вообще говоря, ее позитивность. Этот факт вытекает из рассмотренного нами в работе [12] примера мер

$$d\mu^{(0)}(x) = e^{-x} dx, \quad d\mu^{(1)}(x) = xe^{-2x} dx.$$

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу (24) непрерывная дробь в (6) сходится к вектору $(f^{(1)}, f^{(0)})$, а из п. 7 вытекает, что соответствующие функции имеют интегральное представление (39). По лемме 6 система (4) равносильна системе (25), которую можно переписать в виде $\dot{s}_n^* = s_{n+3}^*$, где $s_n^* = s_n s_0^*$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно,

$$s_{3n+m}^* = \int_{\Delta} x^{3n} d\mu^{*(m)}(x, t), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad m = 0, 1,$$

где меры $d\mu^{*(m)}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu^{*(m)} = x^3 d\mu^{*(m)},$$

которые при заданных начальных условиях имеют единственное решение

$$d\mu^{*(m)}(x, t) = e^{x^3 t} d\mu^{*(m)}(x, 0).$$

Теорема доказана.

9. Приведем пример решения цепочки (4) с неограниченными начальными данными. Пусть

$$d\mu^{(0)}(x, t) = \frac{1}{x} d\mu^{(1)}(x, t) = d(t)e^{-x^3 t} dx, \quad x > 0,$$

где $d(t)$ – нормировочный множитель. Тогда многочленами H_n будут *обобщенные многочлены Эрмита*, которые изучались нами в [13] в связи с физическими приложениями. Эти многочлены могут быть определены *формулами Родрига*

$$e^{-\lambda^3 t} H_{2n+m}(\lambda) = d_{2n+m}(t) \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n (\lambda^m e^{-\lambda^3 t}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad m = 0, 1, \quad (41)$$

которые легко доказываются интегрированием по частям. При этом $d_n(t)$ – нормировочные постоянные. Из (41) находим

$$c_{2n}(t) = \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} t^{-1/3}, \quad c_{2n+1}(t) = \frac{n+1}{3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} t^{-2/3}.$$

Следовательно, $\dot{c}_n = -c_n(c_{n+1}c_{n+2} - c_{n-1}c_{n-2})$. Таким образом, $c_n(t_0 - t)$ – решение цепочки на промежутке $0 \leq t < t_0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Moser J. K. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197–220.
- [2] Богоявленский О. И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 4. С. 737–766.
- [3] Богоявленский О. И. Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением КдФ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1123–1141.
- [4] Осипов А. С. Дискретный аналог уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ): интегрирование методом обратной задачи // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 141–144.
- [5] Юрко В. А. Об интегрировании нелинейных динамических систем методом обратной спектральной задачи // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 6. С. 945–949.
- [6] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
- [7] Парусников В. И. Алгоритм Якоби–Перрона и совместные приближения функций // Матем. сб. 1981. Т. 114. № 2. С. 322–333.
- [8] Калягин В. А. Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральная теория несимметричных операторов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6. С. 79–100.
- [9] Sorokin V. N. Connection between matrix Hermite–Padé approximation and matrix continued fraction in the example of a particular Toeplitz matrix. Reprint № ANO-346. Lille: Universite des Sciences et Technologies de Lille, 1995.
- [10] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.
- [11] Никишин Е. М. О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 4. С. 499–519.
- [12] Сорокин В. Н. Сходимость совместных аппроксимаций Паде к функциям стилтьесовского типа // Изв. вузов. Матем. 1987. № 7. С. 48–56.
- [13] Вшивцев А. С., Сорокин В. Н. Теория возмущений для уравнения Шрёдингера с полиномиальным потенциалом // Изв. вузов. Физика. 1994. № 1. С. 95–101.