Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Об асимптотике и весовых оценках полиномов Мейкснера, ортогональных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 603–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:34:54

УДК 517.587

ОБ АСИМПТОТИКЕ И ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ПОЛИНОМОВ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА СЕТКЕ $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$

И. И. Шарапудинов

Пусть $0 < \delta \leq 1$, $N = 1/\delta$, $0 \leq \alpha$ – целое. Для классических полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)$, ортонормированных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ с весом $\rho(x) = (1 - e^{-\delta})^\alpha \times \Gamma(Nx + \alpha + 1)/\Gamma(Nx + 1)$, получена асимптотическая формула

$$\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z) = \Lambda_n^\alpha(z) + v_{n,N}^\alpha(z).$$

Для остаточного члена $v_{n,N}^\alpha(z)$ при $n \leq \lambda N$ верна оценка

$$|v_{n,N}^\alpha(z)|^2 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{k=0}^n |\Lambda_k^\alpha(z)|^2,$$

где $\Lambda_k^\alpha(x)$ – ортонормированные полиномы Лагерра. Как следствие, получена весовая оценка для полинома Мейкснера $\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)$ на полуоси $[0, \infty)$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Полиномы Мейкснера [1] относятся к одному из четырех типов классических полиномов, ортогональных на равномерных сетках на действительной оси, которые могут быть представлены с помощью разностного аналога формулы Родрига, хорошо известной в теории полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита. Разностные свойства полиномов Мейкснера аналогичны дифференциальным свойствам полиномов Лагерра. В этом смысле полиномы Мейкснера представляют собой дискретный аналог полиномов Лагерра. Следует отметить, что разностные свойства полиномов Мейкснера, равно как и свойства, вытекающие из их ортогональности на равномерной сетке, достаточно подробно исследованы, что собственно и составляет классическую теорию этих полиномов. Асимптотическая теория полиномов Мейкснера, несмотря на многочисленные приложения, в которых требуется знание асимптотических свойств этих полиномов, до недавнего времени оставалась неисследованной.

Целенаправленное исследование асимптотических свойств многочленов Мейкснера начато в работах автора [2]–[5], в которых по ряду вопросов удалось получить результаты, близкие к окончательным. В настоящей работе мы продолжаем исследование асимптотических свойств полиномов Мейкснера на комплексной плоскости и на полуоси $[0, \infty)$. Как следствие полученных асимптотических формул, устанавливаем весовую оценку для полиномов Мейкснера на полуоси $[0, \infty)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01526.

2. Некоторые формулы для полиномов Мейкснера. Пусть $0 < q < 1, \alpha > -1$,

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x + \alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)} (1 - q)^{\alpha+1}. \quad (1)$$

Через $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q)$ обозначим классические полиномы Мейкснера, нормированные условием

$$M_n^\alpha(0) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Нам понадобятся в дальнейшем следующие формулы [1]: соотношение ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x) M_n^\alpha(x) M_m^\alpha(x) = \delta_{nm} h_{n,q}^\alpha, \quad (2)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$h_{n,q}^\alpha = q^{-n} \binom{n + \alpha}{n} \Gamma(\alpha + 1); \quad (3)$$

явный вид полиномов Мейкснера

$$M_n^\alpha(x, q) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha + 1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k, \quad (4)$$

где $a^{[0]} = (a)_0 = 1$, $a^{[k]} = a \cdots (a - k + 1)$, $(a)_k = a \cdots (a + k - 1)$.

Кроме того, будем использовать следующие обозначения:

$$N = \frac{1}{\delta}, \quad \Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\},$$

$$\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x, q) = (h_{n,q}^\alpha)^{-1/2} M_n^\alpha(Nx, q), \quad \mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x) = \mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x, e^{-1/N}).$$

3. Некоторые сведения о полиномах Лагерра. Полиномы Лагерра определим с помощью следующего равенства:

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]} (-x)^k}{(\alpha + 1)_k k!}. \quad (5)$$

Хорошо известно [1], что

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = h_n^\alpha \delta_{nm}, \quad (6)$$

где

$$h_n^\alpha = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}. \quad (7)$$

Далее, имеют место следующие равенства:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}), \quad (8)$$

$$L_{n+1}^\alpha(x) = L_{n+1}^{\alpha-1}(x) + L_n^\alpha(x), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_n^\alpha(x, y) &= \sum_{\nu=0}^n \binom{\nu+\alpha}{\nu}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) \\ &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_n^\alpha(y) L_{n+1}^\alpha(x)}{x-y}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$L_n^{-k}(x) = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^k(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (12)$$

k – целое. Пусть $a_n = 4n + 2\alpha + 2$,

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2} a_n^\alpha, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/a_n, \\ e^{x/2} a_n^{\alpha/2-1/4} x^{-\alpha/2-1/4}, & \text{если } 1/a_n < x \leq a_n/2, \\ e^{x/2} (a_n(a_n^{1/3} + |x - a_n|))^{-1/4}, & \text{если } a_n/2 < x \leq 3a_n/2, \\ e^{x/4}, & \text{если } 3a_n/2 < x. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда справедлива [6], [7] оценка

$$|L_n^\alpha(x)| \leq c(\alpha) A_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad \alpha > -1 \quad (14)$$

(здесь и далее, $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, $c_k(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ есть положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах, например, допускаются записи вида $c(\alpha) < c(\alpha)$).

Пусть $\alpha > -1$, $\sigma_n(x)$ – произвольный полином, подчиненный условию

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha |\sigma_n(x)|^2 dx \leq \theta. \quad (15)$$

Тогда для любого комплексного числа z имеет место неравенство (см. [8, с. 189])

$$|\sigma_n(z)|^2 \leq \theta \sum_{\nu=0}^n |\Lambda_\nu^\alpha(z)|^2, \quad (16)$$

где

$$\Lambda_n^\alpha(z) = (h_n^\alpha)^{-1/2} L_n^\alpha(x). \quad (17)$$

4. О числах Стирлинга и Бернулли. Формула суммирования Эйлера. Положим

$$x^{[n]} = x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k. \quad (18)$$

Числа $s(n, k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) в правой части равенства (18) называются *числами Стирлинга первого рода*. В работе автора [9] установлена оценка

$$|s(n, k)| \leq \binom{n}{k} n^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (19)$$

Числа Бернулли B_ν ($\nu = 0, 1, \dots$) определяются с помощью следующего равенства:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} t^\nu, \quad |t| < 2\pi.$$

В частности, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_{2k+1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Имеет место оценка

$$|B_{2k}| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}(1 - 2^{1-2k})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Пусть $F(x)$ имеет $2n$ непрерывных производных на сегменте $[a, b]$. Разделим этот сегмент на m равных частей, и пусть $h = (b - a)/m$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= h \sum_{k=0}^m F(a + kh) - \frac{h}{2} (F(b) + F(a)) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} (F^{(2k-1)}(a) - F^{(2k-1)}(b)) \\ &- \frac{h^{n+1}}{(2n)!} B_{2n} \sum_{k=0}^{m-1} F^{(2n)}(a + kh + \theta h), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned} \quad (21)$$

называемое *формулой суммирования Эйлера*.

Пусть $f_r(x)$ — алгебраический полином степени r , $F(x) = e^{-x} f_r(x)$, $0 < h \leq 1$. Тогда из (21) вытекает равенство

$$\int_0^\infty F(x) dx = h \sum_{j=0}^\infty F(jh) - \frac{h}{2} F(0) + \sum_{k=1}^\infty \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} F^{(2k-1)}(0), \quad (22)$$

которое без доказательства приводилось в работе [5]. Дадим подробное доказательство равенства (22). Пусть

$$f_r(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r, \quad \|f_r\| = |\alpha_0| + \cdots + |\alpha_r|.$$

Тогда

$$f_r^{(k)}(x) = \alpha_k k! + \alpha_{k+1} (k+1)^{[k]} x + \cdots + \alpha_r r^{[k]} x^{r-k},$$

и, стало быть, при $k \leq r$

$$|f_r^{(k)}(x)| \leq \|f_r\|(|x| + 1)^{r-k} r^{[k]}. \quad (23)$$

С другой стороны, в силу формулы Лейбница

$$F^{(l)}(x) = (e^{-x} f_r(x))^{(l)} = e^{-x} \sum_{\nu=0}^r (-1)^{l-\nu} \binom{l}{\nu} f_r^{(\nu)}(x) \quad (24)$$

(напомним, что $\binom{l}{\nu} = 0$, если $\nu > l$). Из (23) и (24) находим для $l \geq 1$

$$\begin{aligned} |F^{(l)}(x)| &\leq e^{-x} \|f_r\| \sum_{\nu=0}^r \frac{l^{[\nu]}}{\nu!} r^{[\nu]} (|x| + 1)^{r-\nu} \leq r! l^{[r]} \|f_r\| (|x| + 1)^r e^{-x} \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} \\ &\leq r! e^{-x+1} l^r \|f_r\| (|x| + 1)^r. \end{aligned} \quad (25)$$

Неравенство (25) в сочетании с (20) для $0 < h \leq 1$ дает

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^{n+1} B_{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{m-1} F^{(2n)}(kh + \theta h) \right| &\leq \frac{r! (2n)^r \|f_r\|}{(2\pi)^{2n}} \frac{2e}{1 - 2^{1-2n}} \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)h + 1)^r e^{-kh} \\ &\leq c(r) \|f_r\| \frac{(2n)^r}{(2\pi)^{2n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Полагая $a = 0$, $b = Qh$, из (21) и (26) выводим

$$\begin{aligned} \int_0^{Qh} F(x) dx &= h \sum_{k=0}^Q F(kh) - \frac{h}{2} (F(Qh) + F(0)) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^{2\nu} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} (F^{(2\nu-1)}(0) - F^{(2\nu-1)}(Qh)). \end{aligned} \quad (27)$$

(Здесь мы вновь воспользовались оценками (20) и (25), из которых вытекает, что ряд в правой части равенства (27) абсолютно сходится при $0 < h \leq 1$). Далее, из (20) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} h^{2\nu} \left| \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} F^{(2\nu-1)}(Qh) \right| &\leq r! \|f_r\| (Qh + 1)^r e^{-Qh+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-1)^r h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} \\ &\leq c(r) \|f_r\| (Qh + 1)^r e^{-Qh} \rightarrow 0, \quad Q \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому, переходя к пределу при $Q \rightarrow \infty$, из (27) получаем (22).

5. Об оценке производных полинома Мейкснера $M_n^\alpha(x, e^{-\delta})$. Здесь мы установим одно вспомогательное неравенство для производной порядка $r \leq n$ полинома Мейкснера $M_n^\alpha(x, q)$ при $x = 0$, $\alpha \geq 0$, $q = e^{-\delta}$ и получим некоторые следствия из него. Полагая $p = q^{-1} - 1$, из (4) имеем

$$\begin{aligned} (M_n^\alpha(0, q))^{(r)} &= \binom{n+\alpha}{n} \left(\sum_{\nu=0}^n \frac{n^{[\nu]} x^{[\nu]}}{(\alpha+1)_\nu \nu!} (-p)^\nu \right)_{x=0}^{(r)} \\ &= \binom{n+\alpha}{n} \sum_{\nu=r}^n \frac{n^{[\nu]} (x^{[\nu]})_{x=0}^{(r)}}{(\alpha+1)_\nu \nu!} (-p)^\nu. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как в силу (18)

$$(x^{[\nu]})^{(r)} = \sum_{j=r}^{\nu} j^{[r]} s(\nu, j) x^{j-r},$$

то

$$(x^{[\nu]})_{x=0}^{(r)} = s(\nu, r) r!. \quad (29)$$

Сопоставляя (28) и (29), находим ($r \leq n$)

$$(M_n^\alpha(0, q))^{(r)} = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{\nu=r}^n \frac{n^{[\nu]} s(\nu, r) r!}{(\alpha+1)_\nu \nu!} (-p)^\nu. \quad (30)$$

Воспользуемся оценкой (19). Тогда из (30), воспользовавшись формулой Стирлинга, имеем

$$\begin{aligned} |(M_n^\alpha(0, q))^{(r)}| &\leq \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} (np)^r \sum_{\nu=r}^n \frac{\nu^{\nu-r} (np)^{\nu-r}}{\Gamma(\nu+\alpha+1)(\nu-r)!} \\ &\leq (np)^r \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(2\pi)^{1/2} n!} \sum_{\nu=r}^n \frac{\nu^{\nu-r} (np)^{\nu-r} e^{\nu+\alpha+1}}{(\nu+\alpha+1)^{\nu+\alpha} (\nu-r)!} \\ &\leq (np)^r \frac{\Gamma(n+\alpha+1) e^{r+\alpha+1}}{(2\pi)^{1/2} n! (r+\alpha+1)^{r+\alpha}} \sum_{\nu=r}^n \frac{(enp)^{\nu-r}}{(\nu-r)!}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда мы заключаем, что справедлива следующая

ЛЕММА 5.1. Пусть $\alpha \geq 0$, $p = q^{-1} - 1$, $0 \leq r$ — произвольное целое число. Тогда

$$|(M_n^\alpha(0, q))^{(r)}| \leq \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(np)^r}{(2\pi)^{1/2} n! (r+\alpha+1)^{r+\alpha}} e^{r+\alpha+pn+1}.$$

В самом деле, справедливость леммы 5.1 при $0 \leq r \leq n$ следует из (31), а при $r > n$ очевидна.

Ниже потребуются оценки для производных полиномов $(M_n^\alpha(x, q))^2$ при $x = 0$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\alpha \geq 0$, $p = q^{-1} - 1$, $0 \leq m$ — произвольное целое число. Тогда

$$\left| (M_n^\alpha(x, q))^2 \right|_{x=0}^{(m)} \leq \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \right)^2 \frac{4^\alpha}{2\pi} \frac{e^{m+2(1+\alpha)+2enp}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}} (4np)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой Лейбница, имеем

$$\left((M_n^\alpha(x, q))^2 \right)_{x=0}^{(m)} = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (M_n^\alpha(x, q))_{x=0}^{(l)} (M_n^\alpha(x, q))_{x=0}^{(m-l)}.$$

Отсюда и из леммы 5.1 следует, что

$$\begin{aligned} \left| \left(M_n^\alpha(x, q) \right)^2 \right|_{x=0}^{(m)} &\leq \frac{1}{2\pi} e^{m+2(1+\alpha)+2enp} (np)^m \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \right)^2 \\ &\quad \times \sum_{l=0}^m \frac{\binom{m}{l}}{(l+\alpha+1)^{l+\alpha} (m-l+\alpha+1)^{m-l+\alpha}} \\ &\leq \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \right)^2 \frac{4^\alpha}{2\pi} \frac{e^{m+2(1+\alpha)+2enp}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}} (2np)^m \sum_{l=0}^m \binom{m}{l}, \end{aligned} \quad (32)$$

так как минимум функции $\varphi(l) = (l+\alpha+1)^{l+\alpha} (m-l+\alpha+1)^{m-l+\alpha}$ ($0 \leq l \leq m$) равен $\varphi(m/2)$. Поскольку

$$\sum_{l=0}^m \binom{m}{l} = 2^m,$$

то утверждение леммы 5.2 непосредственно вытекает из (32).

Пусть $\delta > 0$, $N = 1/\delta$, $q = e^{-\delta}$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$,

$$\rho(x) = \rho(x, \alpha, \delta) = \mu\left(\frac{x}{\delta}, \alpha, q\right), \quad (33)$$

$$\mathfrak{M}_n^\alpha(x) = \mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x, q) = (h_{n,q})^{-1/2} M_n^\alpha\left(\frac{x}{\delta}, q\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (34)$$

Тогда из (2) имеем

$$\sum_{x \in \Omega_\delta} \mathfrak{M}_n^\alpha(x) \mathfrak{M}_k^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk}, \quad (35)$$

другими словами, полиномы $\mathfrak{M}_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортонормированную систему на множестве Ω_δ с весом $\rho(x)$.

ЛЕММА 5.3. В условиях леммы 5.2 имеет место оценка

$$\left| \left((\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x, q))^2 \right)_{x=0}^{(m)} \right| \leq \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} q^n \frac{4^\alpha}{2\pi} \frac{e^{m+2(1+\alpha)+2enp}}{(m+2\alpha+2)^{m+2\alpha}} \left(\frac{4pn}{\delta} \right)^m.$$

Утверждение леммы 5.3 непосредственно вытекает из равенства (34) и леммы 5.2.

Положим $\varkappa(x) = x^\alpha e^{-x}$,

$$d_k = \left(\varkappa(x) (\mathfrak{M}_n^\alpha(x))^2 \right)_{x=0}^{(2k-1)}. \quad (36)$$

Величина d_k играет ключевую роль при оценке остаточного члена асимптотической формулы для полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_n^\alpha(x)$. Нам понадобится

ЛЕММА 5.4. Пусть $0 \leq \alpha$ — целое. Тогда

$$|d_k| \leq \frac{1}{8\pi} \exp((1+\alpha)(1-\delta) - n\delta + 2enp) \frac{(n+\alpha)!}{n!n^{\alpha+1}} (2k-1)^\alpha A,$$

где

$$A = \frac{(16e^{1+\delta}n)^k}{4(2+2\alpha)^{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha!} \exp\left(\frac{2k-1}{4n \exp(1+\delta)}\right) \left(\frac{16e^{2(1+\delta)}n^2}{k+2+\alpha}\right)^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \leq \alpha$ — целое, то из (36) имеем

$$d_k = \sum_{j=\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \varkappa^{(j)}(0) \left((\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(0))^2 \right)^{(2k-1-j)}.$$

Отсюда и из леммы 5.3 находим ($q = e^{-\delta}$)

$$|d_k| \leq \frac{(n+\alpha)!}{2\pi n!} 4^\alpha e^{2(1+\alpha) - n\delta + 2enp} B, \quad (37)$$

где

$$B = \sum_{j=\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \left(\frac{4enp}{\delta}\right)^{2k-1-j} \frac{|\varkappa^{(j)}(0)|}{(2k+1+2\alpha-j)^{2k+2\alpha-1-j}}.$$

Далее, из (8), (12) и (5) имеем

$$\begin{aligned} \varkappa^{(j)}(0) &= \frac{d^j}{dx^j} (x^\alpha e^{-x})|_{x=0} = \frac{d^j}{dx^j} (x^{j+\alpha-j} e^{-x})|_{x=0} = x^{-j+\alpha} e^x j! L_j^{\alpha-j}(x)|_{x=0} \\ &= (-1)^{j-\alpha} e^x j! \frac{\alpha!}{j!} L_\alpha^{j-\alpha}(x)|_{x=0} = (-1)^{j-\alpha} j^{[\alpha]}, \quad j \geq \alpha, \end{aligned}$$

и $p/\delta < e^\delta$, поэтому из (37) находим

$$|d_k| \leq \frac{(n+\alpha)!}{2\pi n!} 4^\alpha e^{2(1+\alpha) - n\delta + 2enp} (4ne^{1+\delta})^{2k-1-\alpha} S, \quad (38)$$

где

$$S = \sum_{j=\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \frac{j^{[\alpha]} (4ne^{1+\delta})^{\alpha-j}}{(2k+1+2\alpha-j)^{2k-1+2\alpha-j}}. \quad (39)$$

Разобьем сумму (39) по схеме

$$S = \sum_{j=\alpha}^{k+\alpha-1} + \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} = S_1 + S_2. \quad (40)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 S_1 &\leq \sum_{j=\alpha}^{k+\alpha+1} \frac{(2k-1)^{[j]}}{j!(4ne^{1+\delta})^{j-\alpha}} \left(\frac{k+\alpha}{k+2+\alpha} \right)^\alpha \frac{1}{(k+2+\alpha)^k} \\
 &< \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\alpha!(k+2+\alpha)^k} \exp\left(\frac{2k-1}{4n \exp(1+\delta)} \right), \\
 S_2 &= \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \frac{j^{[\alpha]} (4e^{1+\delta}n)^{\alpha-j}}{(2k+1+2\alpha-j)^{2k-1-j+2\alpha}} \\
 &\leq \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{(4e^{1+\delta}n)^k} \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \frac{1}{(2k+1+2\alpha-j)^{2\alpha}} \\
 &\leq \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{(4e^{1+\delta}n)^k (2\alpha+2)^{2\alpha}} \sum_{j=k+\alpha}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \\
 &\leq \frac{(2k-1)^\alpha 2^{2k-2}}{(2\alpha+2)^{2\alpha} (4e^{1+\delta}n)^k} = \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} (e^{1+\delta}n)^{-k}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Сопоставляя (38)–(41), находим

$$\begin{aligned}
 |d_k| &\leq \frac{(n+\alpha)! 4^\alpha}{2\pi n!} e^{2(1+\alpha)-n\delta+2enp} (4ne^{1+\delta})^{-1-\delta} (4ne^{1+\delta})^{2k} \\
 &\quad \times \left(\frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} (e^{1+\delta}n)^{-k} + \frac{(2k-1)^{[\alpha]}}{\alpha!(k+2+\alpha)^k} \exp\left(\frac{2k-1}{4ne^{1+\delta}} \right) \right) \\
 &\leq \frac{1}{8\pi} e^{(1+\alpha)(1-\delta)-n\delta+2enp} \frac{(n+\alpha)!(2k-1)^\alpha}{n^{1+\alpha}n!} \\
 &\quad \times \left(\frac{(16e^{1+\delta}n)^k}{4(2\alpha+2)^{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{16e^{2(1+\delta)}n^2}{k+2+\alpha} \right)^k \exp\left(\frac{2k-1}{4ne^{1+\delta}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Лемма 5.4 доказана.

6. Асимптотика полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)$ при целых α . В случае целого $\alpha \geq 0$ установим асимптотическую формулу для полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z)$ на всей комплексной плоскости при условии $n = O(N)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $0 \leq \alpha$ – целое, $\lambda, \delta > 0$, $N = 1/\delta$, z – произвольное комплексное число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z) = \Lambda_n^\alpha(z) + v_{n,N}^\alpha(z),$$

в которой для остаточного члена $v_{n,N}^\alpha(z)$ при $0 < \delta \leq 1$, $0 \leq n \leq \lambda N$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^\alpha(z)| \leq c \left(\delta \sum_{k=0}^n |\Lambda_k^\alpha(z)|^2 \right)^{1/2}, \tag{42}$$

где $c = c(\alpha, \lambda)$, $\Lambda_k^\alpha(z)$ – ортонормированные полиномы Лагерра, определенные равенством (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $v_{0,n}^\alpha(z) = 0$ для произвольного комплексного z , поэтому мы можем считать, что $n \geq 1$. Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \kappa(x) (v_{n,N}^\alpha(x))^2 dx \\ &= \int_0^\infty \kappa(x) (\Lambda_n^\alpha(x))^2 dx + \int_0^\infty \kappa(x) (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x))^2 dx - 2 \int_0^\infty \kappa(x) \Lambda_n^\alpha(x) \mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x) dx \\ &= J_1 + J_2 - J_3. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (6) и (17) следует, что $J_1 = 1$. Далее, $J_3 = 2k_{n,N}/k_n$, где $k_{n,N}$ и k_n – старшие коэффициенты полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z)$ и Лагерра $\Lambda_n^\alpha(z)$ соответственно. Сопоставляя (5), (7), (17) с (3), (4), (34), находим ($q = e^{-\delta}$, $p = e^\delta - 1$)

$$\frac{k_{n,N}}{k_n} = \left(\frac{h_n^\alpha}{h_{n,q}^\alpha} \right)^{1/2} (\delta^{-1}p)^n = (\delta^{-1}(e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}))^n. \quad (44)$$

Так как

$$\frac{1}{\delta}(e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}) = 1 + \frac{(\delta/2)^2}{3!} + \frac{(\delta/2)^4}{5!} + \dots > 1,$$

то из (44) имеем

$$J_3 = 2 \frac{k_{n,N}}{k_n} > 2. \quad (45)$$

Рассмотрим интеграл J_2 . Чтобы его оценить, воспользуемся равенством (22). Это дает

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^\infty \kappa(x) (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x))^2 dx \\ &= \delta \sum_{j=0}^\infty \kappa(j\delta) (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(j\delta))^2 - \frac{\delta}{2} (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(0))^2 \kappa(0) + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} \delta^{2k} d_k, \end{aligned} \quad (46)$$

где d_k – число, определенное равенством (36).

Пусть $0 < \delta \leq 1$, $0 \leq x < \infty$. Из (1), (33) при $q = e^{-\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa(x)}{\rho(x)} &= \frac{\delta x^\alpha e^{-x}}{\rho(x)} = \left(\frac{\delta}{1 - e^{-\delta}} \right)^{\alpha+1} \frac{x^\alpha}{(x + \delta) \cdots (x + \alpha\delta)} \\ &< \left(\frac{\delta}{1 - e^{-\delta}} \right)^{\alpha+1} < e^{\delta(\alpha+1)} < 1 + \delta(\alpha+1)e^{\delta(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Из (35) и (46) выводим

$$\delta \sum_{j=0}^\infty \kappa(j\delta) (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(j\delta))^2 < 1 + \delta(1 + \alpha)e^{\delta(1+\alpha)},$$

отсюда и из (46), в свою очередь, имеем

$$J_2 < 1 + \delta(1 + \alpha)e^{\delta(1+\alpha)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} \delta^{2k} d_k. \quad (47)$$

Сопоставляя (43), (45) и (47), получаем

$$\int_0^\infty \varkappa(x) (v_{n,N}^\alpha(x))^2 dx < \delta(1+\alpha)e^{\delta(1+\alpha)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} \delta^{2k} d_k. \quad (48)$$

Если теперь $0 < \delta \leq 1$ и $n \leq \lambda N$, то из леммы 5.4 и оценки (20) выводим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} \delta^{2k} |d_k| &\leq c(\alpha, \lambda) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty k^\alpha \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^{2k} \left((16e^{1+\delta} n)^k + \left(\frac{16e^{2(1+\delta)} n^2 e}{k+2+\alpha} \right)^k \right) \\ &= c(\alpha, \lambda) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty \delta^k \left(\frac{16e^{1+\delta}}{4\pi^2} n \delta \right)^k k^\alpha + c(\alpha, \lambda) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{16e^{2(1+\delta)+1} n^2 \delta^2}{4\pi^2(k+2+\alpha)} \right)^k k^\alpha \\ &\leq c_1(\alpha, \lambda) \frac{n\delta^2}{n} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{16e^{1+\delta} \lambda \delta}{4\pi^2} \right)^{k-1} k^\alpha + c_2(\alpha, \lambda) \frac{(n\delta)^2}{n} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{16e^{2(1+\delta)+1} \lambda^2}{4\pi^2(k+2+\alpha)} \right)^{k-1} k^\alpha. \end{aligned} \quad (49)$$

Последний ряд в (49) сходится, а что касается предпоследнего ряда, то он также сходится, если δ выбрать настолько малым, что

$$\frac{16e^2 \lambda \delta}{4\pi^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (50)$$

Тогда из (48) и (49) заключаем, что

$$\int_0^\infty \varkappa(x) (v_{n,N}^\alpha(x))^2 dx \leq c(\alpha, \lambda) \delta,$$

если только δ удовлетворяет неравенству (50). Тем самым, мы доказали, что для полинома $\sigma_n(x) = v_{n,N}^\alpha(x)$ имеет место оценка (15), в которой $\theta = c(\alpha, \lambda)\delta$, стало быть, справедливо неравенство (16), т.е.

$$|v_{n,N}^\alpha(z)|^2 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{\nu=0}^n |\Lambda_\nu^\alpha(z)|^2.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы 6.1, соответствующее случаю (50).

Рассмотрим случай, когда $0 < \delta_0 \leq \delta \leq 1$, где δ_0 фиксировано. Положим $n_0 = [\lambda/\delta_0]$, $n_\delta = [\lambda/\delta]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Ясно, что если $n \leq \lambda N$, то $n \leq n_\delta \leq n_0$, поэтому достаточно установить оценку (42) при $n \leq n_0$. Сопоставляя (34) с (4), нетрудно убедиться в том, что

$$(\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x))^2 = a_{0,n}(\delta) + a_{1,n}(\delta)x + \cdots + a_{2n,n}(\delta)x^{2k},$$

где $a_{k,n}(\delta)$ – непрерывные функции параметра δ на отрезке $[\delta_0, 1]$. Положим

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}(\delta_0) = \max_{\delta_0 \leq \delta \leq 1} \max_{0 \leq n \leq n_0} \max_{0 \leq k \leq 2n} |a_{k,n}(\delta)|, \\ \bar{b} &= \bar{b}(\delta_0) = \max_{0 \leq k \leq 2n_0} \int_0^\infty x^{k+\alpha} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} (\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x))^2 dx \leq (2n_0 + 1) \bar{a} \bar{b}.$$

Обратимся теперь к неравенству (16). Полагая $\sigma_n(x) = \mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)$, $\theta = (2n_0 + 1) \bar{a} \bar{b}$, имеем

$$|\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)| \leq \left((2n_0 + 1) \bar{a} \bar{b} \sum_{\nu=0}^n |\Lambda_\nu^\alpha(z)|^2 \right)^{1/2}. \quad (51)$$

Так как $(2n_0 + 1) \bar{a} \bar{b}$ зависит только от α , λ и δ_0 , то из (51) находим

$$|\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z)| \leq c(\alpha, \lambda, \delta_0) \left(\sum_{\nu=0}^n |\Lambda_\nu^\alpha(z)|^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда для $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} |v_{n,N}^\alpha(z)| &= |\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z) - \Lambda_n^\alpha(z)| \leq |\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(z)| + |\Lambda_n^\alpha(z)| \\ &\leq c_1(\alpha, \lambda, \delta_0) \left(\delta \sum_{\nu=0}^n |\Lambda_\nu^\alpha(z)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Положим $\delta_0 = \pi^2/(8e^2\lambda)$. Тогда для $0 < \delta \leq \delta_0$ выполнено неравенство (50), и, стало быть, для таких δ справедливо утверждение теоремы 6.1. Если же $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, то верна оценка (52), которая приводит к утверждению теоремы 6.1 для оставшихся δ . Теорема полностью доказана.

7. Весовые оценки полиномов Мейкснера. Перейдем к исследованию поведения полиномов Мейкснера на полуоси $[0, \infty)$. Здесь мы получим весовую оценку для этих полиномов.

Пусть, по-прежнему, $\delta > 0$, $q = e^{-\delta}$, $N = 1/\delta$. Основным результатом этого пункта является

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $0 \leq \alpha$ — целое, $0 < \delta \leq 1$, $\lambda > 0$. Тогда имеет место оценка

$$|\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)| \leq c n^{-\alpha/2} A_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad n \leq \lambda N,$$

в которой $c = c(\alpha, \lambda)$, $A_n^\alpha(x)$ — функция, определенная формулой (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к формуле Кристоффеля–Дарбу (11). В силу (9) ее можно переписать в виде

$$\begin{aligned} K_n^\alpha(t, x) &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-t)} (L_{n+1}^\alpha(x) L_{n+1}^{\alpha-1}(t) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x) L_{n+1}^\alpha(t)) \\ &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left(L_{n+1}^\alpha(x) \frac{L_{n+1}^{\alpha-1}(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(t)}{t-x} - L_{n+1}^{\alpha-1}(x) \frac{L_{n+1}^\alpha(x) - L_{n+1}^\alpha(t)}{t-x} \right). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow x$ и пользуясь равенством (10), имеем

$$\begin{aligned} K_n^\alpha(x, x) &= \sum_{\nu=0}^n (\Lambda_\nu^\alpha(x))^2 = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left(-L_{n+1}^\alpha(x) (L_{n+1}^{\alpha-1}(x))' + L_{n+1}^{\alpha-1}(x) (L_{n+1}^\alpha(x))' \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} (L_{n+1}^\alpha(x) L_n^\alpha(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x) L_n^{\alpha+1}(x)). \end{aligned} \quad (53)$$

Воспользуемся теоремой 6.1. Пусть $n \leq \lambda N$, $0 \leq x < \infty$, $\delta = 1/N$. Тогда из оценки (42) и равенства (53) находим

$$|v_{n,N}^\alpha(x)| \leq c(\alpha, \lambda) \left(\frac{n}{N}\right)^{1/2} \binom{n+\alpha}{n}^{-1/2} (|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)| + |L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2}.$$

Кроме того,

$$\binom{n+\alpha}{n}^{-1/2} \leq c(\alpha)n^{-\alpha/2},$$

поэтому с учетом (17) получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_{n,N}^\alpha(x)| &\leq |\Lambda_n^\alpha(x)| + |v_{n,N}^\alpha(x)| = \binom{n+\alpha}{n}^{-1/2} (|L_n^\alpha(x)| + |v_{n,N}^\alpha(x)|) \\ &\leq c(\alpha)n^{-\alpha/2} |L_n^\alpha(x)| + c(\alpha, \lambda)n^{-\alpha/2} \\ &\quad \times (|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)| + |L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2} \\ &\leq c(\alpha, \lambda)n^{-\alpha/2} \left(|L_n^\alpha(x)| + (|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)| + |L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Чтобы оценить полиномы Лагерра, фигурирующие в (54), обратимся к неравенству (14). Из равенства (13) следует, что равномерно относительно $x \in [0, \infty)$

$$A_n^\alpha(x) \asymp A_{n+1}^\alpha(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

(запись $a_n \asymp b_n$ означает, что $|a_n| \leq c_1|b_n|$, $|b_n| \leq c_2|a_n|$, $n = 1, 2, \dots$). Поэтому из (14) имеем

$$(|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)|)^{1/2} \leq c(\alpha)A_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (55)$$

Из (13) нетрудно также заметить, что если $\alpha > 0$, то

$$A_n^{\alpha+1}(x)A_{n+1}^{\alpha-1}(x) \leq c(\alpha)(A_n^\alpha(x))^2, \quad x \geq 0,$$

поэтому в этом случае

$$(|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2} \leq c(\alpha)A_n^\alpha(x), \quad x \geq 0. \quad (56)$$

Если $\alpha = 0$, то в силу (12)

$$L_{n+1}^{\alpha-1}(x) = L_{n+1}^{-1}(x) = -\frac{x}{n+1}L_n^1(x),$$

и, стало быть,

$$(|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)|. \quad (57)$$

Если $0 \leq x \leq 12n \ln 7$, то из (13) непосредственно вытекает оценка

$$A_n^1(x) \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} \leq c(\alpha)A_n^0(x),$$

поэтому в силу (57) и (14)

$$(|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|)^{1/2} \leq c(\alpha) \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} A_n^1(x) \leq c(\alpha) A_n^0(x). \quad (58)$$

Покажем, что оценка (58) остается в силе также для $x \geq (12 \ln 7)n$. Воспользуемся формулой (8) и интегральной формулой Коши. Тогда при $x > 0$ имеем

$$|L_n^1(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{e^{x-t} t^{n+1}}{x(x-t)^{n+1}} dt \right|, \quad (59)$$

где γ – замкнутый контур, охватывающий точку $t = x$. Составим контур γ из отрезка $t = 5x/6 + i\tau$ ($\tau_{-1} \leq \tau \leq \tau_1$) и дуги окружности $|t| = 7x/6$, где τ_{-1} и τ_1 – точки пересечения прямой $t = 5x/6 + i\tau$ и окружности $|t| = 7x/6$. Тогда из (59) имеем

$$|L_n^1(x)| \leq \frac{7}{12\pi} \int_{\gamma} \left| e^{x-t} \left(\frac{t}{x-t}\right)^n \right| \frac{|dt|}{|x-t|} \leq \frac{7^{n+2}}{6} e^{x/6} = \frac{49}{6} 7^n e^{-x/12} e^{x/4}. \quad (60)$$

Пусть $x \geq (12 \ln 7)n$, тогда

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} 7^n e^{-x/12} = \exp\left(\frac{(12 \ln 7)n - x}{12} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{n+1}\right) \leq c. \quad (61)$$

Из (60) и (61) находим

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)| \leq c e^{x/4} = c A_n^0(x), \quad x \geq (12 \ln 7)n. \quad (62)$$

Сопоставляя (57) и (62), убеждаемся в справедливости оценки (58). Другими словами, оценка (56) верна также при $\alpha = 0$.

Утверждение теоремы 7.1 вытекает из (54)–(56).

В заключение автор выражает признательность Б. С. Кашину за обсуждение результатов и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [2] Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства многочленов Мейкснера и их приложения // Деп. ВИНТИ. № 1433-83.
- [3] Шарапудинов И. И. Некоторые свойства ортогональных многочленов Мейкснера // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 135–137.
- [4] Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории ортогональных систем. Дисс. ... д. ф.-м. н. М.: МИАН, 1991.
- [5] Sharapudinov I. I. Asymptotics of Meixner's polynomials // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1991. V. 6. P. 13–21.
- [6] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 695–708.
- [7] Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 147. P. 433–460.
- [8] Серё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [9] Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 9. С. 1259–1277.

Дагестанский государственный педагогический университет,
г. Махачкала

Поступило
28.03.96
Исправленный вариант
15.11.96