Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, О спектре одного класса одномерных операторов типа Шредингера с обобщенным потенциалом, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 617–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:39:50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ОДНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШРЁДИНГЕРА С ОБОБЩЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. А. Айгунов

1. Пусть ε – произвольное вещественное число. Определим функцию

$$Q(x) = \begin{cases} p(x), & x \leq 0, \\ q(x), & x > 0. \end{cases}$$

Предполагается, что $p(x)$ – непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^0 |p(x)| dx < \infty,$$

а $q(x)$ – вещественная, непрерывная на полуоси функция, периодическая с периодом, равным 1.

В $L_2(-\infty, \infty)$ рассмотрим множество функций ($n \in \mathbb{N}$)

$$D(H) = \{g(x) : g(x) \in W_2^2(\mathbb{R}|\mathbb{N}) \cap W_2^1(\mathbb{R}), g'(n+0) - g'(n-0) = \varepsilon g(n)\}$$

и на этом множестве определим оператор

$$Hf = -f''(x) + Q(x)f(x), \quad f(x) \in D(H).$$

Известно [1], что оператор H самосопряжен в $L_2(-\infty, \infty)$. Обозначим через $Q(x, \varepsilon)$ потенциал

$$Q(x, \varepsilon) = \begin{cases} p(x), & x \leq 0, \\ q(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n), & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

В физических работах [2] на эвристическом уровне строгости принято оператор H записывать формулой

$$Hf = -f''(x) + Q(x, \varepsilon)f.$$

В формуле (1) $\delta(x)$ – функция Дирака.

Цель настоящей заметки – изучение природы спектра оператора H . Заметим, что в случае $p(x) = \text{const}$ спектральные характеристики оператора H были изучены в работе М. М. Гехтмана и И. В. Станкевича [1].

2. Рассмотрим уравнение

$$-f''(x) + Q(x, \varepsilon)f(x) = \lambda f(x). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением уравнения (2) назовем функцию $y_0(x)$, непрерывную на всей оси, при $x \neq n$ ($n \in \mathbb{N}$) удовлетворяющую уравнению

$$-y_0''(x) + Q(x, 0)y_0(x) = \lambda y_0(x),$$

а при $x = n$ ($n \in \mathbb{N}$) условию $y_0'(n+0) - y_0'(n-0) = \varepsilon y_0(n)$.

Обозначим через $\hat{\Theta}(x, \lambda)$ и $\hat{\Phi}(x, \lambda)$ решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям Коши $\hat{\Phi}(0, \lambda) = \hat{\Theta}'(0, \lambda) = 0$, $\hat{\Phi}'(0, \lambda) = \hat{\Theta}(0, \lambda) = 1$ соответственно.

ЛЕММА 1. Пусть $\text{Im } \lambda \neq 0$, тогда существует такая функция $m_1(\lambda)$, что функция

$$\hat{\Psi}_1(x, \lambda) = \hat{\Theta}(x, \lambda) + m_1(\lambda)\hat{\Phi}(x, \lambda)$$

является решением уравнения (2) и $\hat{\Psi}_1(x, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\text{Im } \lambda \neq 0$, тогда существует такая функция $m_2(\lambda)$, что функция

$$\hat{\Psi}_2(x, \lambda) = \hat{\Theta}(x, \lambda) + m_2(\lambda)\hat{\Phi}(x, \lambda)$$

является решением уравнения (2) и $\hat{\Psi}_2(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$.

Введем функцию комплексного переменного λ

$$F(\lambda) = \hat{\Theta}(1, \lambda) + \hat{\Phi}'(1, \lambda) + \varepsilon \hat{\Phi}(1, \lambda).$$

В работе [1] показано, что уравнения $F(\lambda) = \pm 2$ имеют только вещественные корни. Обозначим через λ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) нули функции $F(\lambda) - 2$, а через μ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) — нули функции $F(\lambda) + 2$. Числа λ_j и μ_j удовлетворяют [3] неравенствам

$$-\infty < \lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots < \mu_{2j} \leq \mu_{2j+1} < \lambda_{2j+1} \leq \dots$$

Числа λ_j и μ_j разбивают вещественную ось на сегменты Λ_j и интервалы T_j :

$$\Lambda_j = \begin{cases} [\lambda_j, \mu_j], & j = 2k, \\ [\mu_j, \lambda_j], & j = 2k+1, \end{cases} \quad T_j = \begin{cases} (-\infty, \lambda_0), \\ (\mu_{j-1}, \mu_j), & j = 2k+1, \\ (\lambda_{j-1}, \lambda_j), & j = 2k+2, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Введем обозначения

$$\Lambda = \bigcup_j \Lambda_j, \quad T = \bigcup_j T_j. \quad (3)$$

3. ТЕОРЕМА 1. Собственные числа оператора H совпадают с нулями функции $W(\lambda) = m_1(\lambda) - m_2(\lambda)$, принадлежащими множеству $(-\infty, 0) \cap T$. Множество T определено формулой (3), а функции $m_i(\lambda)$ ($i = 1, 2$) леммами 1, 2.

ТЕОРЕМА 2. Непрерывная часть спектра оператора H состоит из абсолютно непрерывной компоненты, совпадающей с множеством $S_a = ((-\infty, 0) \cap \Lambda) \cup [0, \infty)$.

Причем на множестве $(0, \infty) \cap \Lambda$ (множество Λ определено формулой (3)) кратность спектра равна 2, а на множестве $((-\infty, 0) \cap \Lambda) \cup ((0, \infty) \cap T)$ кратность спектра равна 1.

ТЕОРЕМА 3. Спектр оператора H полуограничен снизу.

Результаты настоящей работы существенно обобщают результаты работы [3], в которой рассматривался случай финитного потенциала $p(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гехтман М. М., Станкевич И. В. Спектральная теория некоторых неклассических дифференциальных операторов. Учебное пособие. Махачкала: ДагГУ, 1985. 2. Альбеверио С., Гестези Ф. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 3. Айгунов Г. А., Джабраилова Л. М. // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 1997. № 1. С. 3–9.

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Поступило

11.03.97

Исправленный вариант

09.06.97