Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Горейнов, Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников,
Псевдоскелетные аппроксимации при помощи подматриц
наибольшего объема, *Матем. заметки*, 1997, том 62, вы-
пуск 4, 619–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:03:10

ПСЕВДОСКЕЛЕТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ПОДМАТРИЦ НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

С. А. Горейнов, Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников

1. Введение. Один из подходов для быстрого умножения на плотные неструктурированные матрицы, развитый в [1], состоит в следующем. Предположим, что матрицы A_n порождаются формулой $A_n = [f(x_i, y_j)]_{i,j=1}^n$, где x_i, y_j – узлы некоторой (квазиравномерной) сетки на ограниченной области евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда для класса так называемых асимптотически гладких функций f (определение и соответствующие теоремы см. в работе [1]) оказывается возможным указать способ разбиения точек x_i и y_j на группы, приводящие к разбиению матрицы на блоки малого ε -ранга. При этом сложность умножения на возникающий таким образом аппроксимант всей матрицы A_n составит $O(n \log n \log^d \varepsilon^{-1})$.

Хотя практическая реализация такой идеи (связанная, например, с алгоритмами частичного сингулярного разложения) может иметь успех [2], она априори предполагает вычисление всех элементов блоков, а значит, и $O(n^2)$ операций. Совсем неочевидно, можно ли построить “хорошую” малоранговую аппроксимацию для блока, зная лишь небольшую часть его элементов. То, что это действительно возможно, впервые показано в [3]. Развитие соответствующей теории проведено в [4] (здесь приводится, в частности, и экспериментальное подтверждение теории для матриц, возникающих при численном решении интегрального уравнения электрического поля). Более подробно, если ε -ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ не превосходит k , то в A существуют k столбцов $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ и k строк $R \in \mathbb{R}^{k \times n}$ таких, что

$$\|A - CGR\|_2 \leq \varphi(k, n)\varepsilon, \quad (1)$$

где $G \in \mathbb{R}^{k \times k}$ определяется по C и R , а функция φ ограничена сверху полиномом малой степени.

Однако, выбор подходящих C и R без вычисления всех элементов A представляется нам нетривиальной задачей. Теория, изложенная в [4], эту проблему не решает. Прежде всего, у нас не было до сих пор какой-либо удобной характеристики блока в пересечении нужных нам C и R . Кажется, нам удалось, наконец, получить такую характеристику.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00155, и фонда Volkswagen-Stiftung, грант VW I/71493.

В настоящей работе мы доказываем оценки типа (1) для строк и столбцов, дающих в пересечении подматрицу со следующим экстремальным свойством: среди всех подматриц матрицы A размера $k \times k$ она имеет максимальный по модулю детерминант. Другими словами, чтобы получить “хорошие” строки и столбцы, достаточно выбрать подматрицу наибольшего “объема” (или отличающуюся от таковой не очень сильно). Заметим, что подматрицы наибольшего объема возникают и оказываются весьма полезными в некоторых классических задачах теории аппроксимации функций (см., например, [5]).

Успех практической реализации нашего подхода определяется тем, насколько эффективно мы умеем находить подматрицы наибольшего объема. Очевидно, чтобы сделать это, не имея всех элементов матрицы, необходима некоторая априорная информация о ее происхождении. Если матрица является дискретным аналогом некоторого (интегрального) оператора, то такая информация обычно имеется.

2. Обозначения, определения и предварительные замечания. Для любой квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ введем ее τ -псевдообратную $A_\tau^\dagger$ в соответствии с сингулярным разложением A :

$$A = U_A \Sigma_A V_A, \quad \Sigma_A = \text{diag}(\sigma_{A1}, \dots, \sigma_{An}), \quad U_A^T U_A = V_A V_A^T = I,$$

по следующей формуле:

$$A_\tau^\dagger = V_A^T \Sigma_A^\dagger U_A^T, \quad \text{где } \Sigma_A^\dagger = \text{diag}(\sigma_{A1}^\dagger, \dots, \sigma_{An}^\dagger), \quad \sigma_{Ai}^\dagger = \begin{cases} \sigma_{Ai}^{-1}, & \sigma_{Ai} \geq \tau, \\ 0, & \sigma_{Ai} < \tau. \end{cases}$$

Объемом $v(A)$ квадратной матрицы A будем называть модуль ее детерминанта. Сингулярные числа всякой матрицы A будем упорядочивать по убыванию так, что $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$. Малоранговую аппроксимацию матрицы A вида CGR , где R и C – некоторые строки и столбцы A , которые в пересечении дают *опорную* подматрицу матрицы A , будем называть *псевдоскелетной компонентой* A (см. [4]). Если M – невырожденная опорная подматрица, то, как будет показано ниже, оценки типа (1) получаются при выборе $G = M^{-1}$. С практической точки зрения важно то, что в случае вырожденной или плохо обусловленной опорной подматрицы можно взять $G = M_\tau^\dagger$ при некотором $\tau > 0$. При этом погрешность аппроксимации изменится таким образом, как будто ε увеличилось на δ .

Нас будет интересовать погрешность псевдоскелетной аппроксимации, опирающейся на $k \times k$ -подматрицу максимального объема в матрице A такой, что

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad Z = A - F, \quad \text{rank } Z = k, \quad \|F\|_2 \leq \varepsilon.$$

Пусть $v_{\max}^{(k)}(X)$ обозначает максимально возможный объем подматрицы порядка k в матрице X . Символом c будем обозначать любую положительную константу (возможно, каждый раз разную).

Нам понадобятся классические неравенства разделения в следующей форме.

ЛЕММА. Пусть $B = [B_1 \quad b_2] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b_2 \in \mathbb{C}^{m \times 1}$. Тогда $\sigma_1(B) \geq \sigma_1(B_1) \geq \sigma_2(B_2) \geq \dots \geq \sigma_{p-1}(B_1) \geq \sigma_p(B)$, где $p = \min(m, n)$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица A , рассматриваемая в блочном разбиении

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad a_{22} \in \mathbb{C}^{k \times k}, \quad (2)$$

такова, что $\sigma_{k+1}(A) \leq \varepsilon$ и, кроме того, a_{22} невырождена. Тогда

$$\left\| A - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^{-1} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq c\varepsilon (1 + \|a_{12}a_{22}^{-1}\|_2^2)^{1/2}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Если, дополнительно, $v(a_{22}) \geq \gamma v_{\max}^{(k)}(A)$, то

$$\left\| A - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^{-1} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq c\varepsilon \sqrt{1 + k(n-k)\gamma^{-2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет опираться на невырожденность A , что мы можем без ограничения общности потребовать, поскольку иначе матрица

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} + \delta I & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- 1) невырождена для всех достаточно малых δ ;
- 2) близка к A : при $\delta \leq \varepsilon \|\tilde{A} - A\|_2 \leq \varepsilon \implies \sigma_{k+1}(\tilde{A}) \leq 2\varepsilon$;
- 3) совпадает с A во втором блочном столбце, а значит, блок $(2, 2)$ обеспечивает ту же оценку в правой части (3).

Поэтому мы будем строить псевдоскелетные аппроксимации для $\tilde{A}$; поскольку в получаемой оценке константа c обозначает некоторое положительное число, такая же оценка будет справедлива и для A .

Пусть теперь A невырождена. Запишем A^{-1} в блочном разбиении, совпадающем с указанным в (2):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

В силу формул Фробениуса $b_{11} = (a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}$; таким образом, блок b_{11} напрямую связан с погрешностью аппроксимации

$$\sigma_1(b_{11}^{-1}) = \left\| A - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^{-1} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|_2. \quad (4)$$

Поэтому запишем еще одну формулу, содержащую b_{11} :

$$b_{11}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -a_{12}a_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Она легко следует из тождества $A^{-1}A = I$, или точнее $b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0$.

Понятно, что $\sigma_{n-k}([b_{11} \ b_{12}]) > 0$. Верно даже большее:

$$\sigma_{k+1}(A) \leq \varepsilon \iff \sigma_{n-k}(A^{-1}) \geq \varepsilon^{-1} \implies \sigma_{n-k}([b_{11} \ b_{12}]) \geq \varepsilon^{-1},$$

где последний переход осуществляется k -кратным применением леммы. Но тогда справедливо следующее неравенство, легко вытекающее из вариационных формул для сингулярных чисел:

$$\sigma_1(b_{11}^{-1}[b_{11} \ b_{12}]) \geq \sigma_1(b_{11}^{-1})\sigma_{n-k}([b_{11} \ b_{12}]) \geq \sigma_1(b_{11}^{-1})\varepsilon^{-1}. \quad (6)$$

Собирая вместе (4)–(6), получаем

$$\left\| A - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^{-1} [a_{21} \ a_{22}] \right\|_2 \leq \varepsilon (1 + \|a_{12} a_{22}^{-1}\|_2^2)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 2 есть вариация основной леммы из работы [4], и, тем не менее, мы его приведем.

Рассмотрим тождество

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{12} a_{22}^{-1} \\ I \end{bmatrix}.$$

Для удобства обозначим матрицы в квадратных скобках символами A_2 и C_2 , так что $A_2 a_{22}^{-1} = C_2$. Подматрица наибольшего объема сосредоточена в одних и тех же строках A_2 и C_2 в силу невырожденности a_{22} . Более того, если

$$v(a) \geq \gamma v_{\max}(A_2), \quad (7)$$

где a – некоторая подматрица A_2 , то

$$v(c) = v(a)v^{-1}(a_{22}) \geq \gamma v_{\max}(A_2)v^{-1}(a_{22}) = \gamma v_{\max}(C_2), \quad (8)$$

где c – такая же подматрица C_2 .

Предположим теперь, что какой-то элемент матрицы $a_{12} a_{22}^{-1}$ по модулю превышает γ^{-1} . Переставив две строки в C_2 , мы можем добиться того, что этот элемент займет место одной из единиц в нижнем блоке C_2 . Это всего лишь означает, что мы увеличили объем нижнего блока более чем в γ^{-1} раз, или в силу (7), (8) что для какой-то a будет $v(a) > \gamma^{-1}v(a_{22})$, что невозможно: $v(a_{22}) \geq \gamma v_{\max}(A_2)$.

Таким образом, все элементы $a_{12} a_{22}^{-1} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ ограничены по модулю, откуда $\|a_{12} a_{22}^{-1}\|_2^2 \leq k(n-k)\gamma^{-2}$.

3. Оценка в случае τ -псевдообращения опорной подматрицы. Как видно из формулировки теоремы 1, аппроксимация на подматрице a_{22} не зависит от того, насколько близко младшее сингулярное число a_{22} к ε . Однако, матрица a_{22}^{-1} , на самом деле, зависит от этого довольно сильно, особенно если ε мало. Актуальность ситуации связана с тем, что мы, как правило, располагаем лишь *оценкой сверху* на нужный нам ε -ранг.

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 1 имеем оценку

$$\left\| A - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} a_{22}^\dagger \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq c(\varepsilon + \tau)(1 + s^2)^{1/2},$$

где $s = \max\{\|a_{22}^{-1}a_{21}\|_2, \|a_{12}a_{22}^{-1}\|_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и прежде, оценим нормы блоков матрицы погрешности, которая на этот раз имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{12}a_{22}^\dagger a_{21} & a_{12} - a_{12}a_{22}^\dagger a_{22} \\ a_{21} - a_{22}a_{22}^\dagger a_{21} & a_{22} - a_{22}a_{22}^\dagger a_{22} \end{bmatrix}.$$

Проще всего это сделать для блока (2, 2); очевидно, $\|(I - a_{22}a_{22}^\dagger)a_{22}\|_2 \leq \tau$. Далее,

$$\|a_{21} - a_{22}a_{22}^\dagger a_{21}\|_2 \leq \|(I - a_{22}a_{22}^\dagger)a_{22}^{-1}a_{22}a_{21}\|_2 \leq \tau\|a_{22}^{-1}a_{21}\|_2,$$

и аналогично для блока (1, 2); отметим, что мы используем невырожденность a_{22} . Чтобы получить оценку для блока (1, 1), рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22}a_{22}^\dagger a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{для которой} \quad \left\| \tilde{A} - \begin{bmatrix} I & \\ & a_{22}a_{22}^\dagger \end{bmatrix} A \right\|_2 \leq \tau,$$

откуда в силу оценок типа $\sigma_i(A + E) \leq \sigma_i(A) + \sigma_i(E)$ и $\sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\sigma_i(B)$

$$\sigma_{k+1}(\tilde{A}) \leq \tau + \sigma_{k+1}\left(\begin{bmatrix} I & \\ & a_{22}a_{22}^\dagger \end{bmatrix} A\right) \leq \tau + \sigma_{k+1}(A) \leq \tau + \varepsilon.$$

Применяя теорему 1 к матрице $\tilde{A}$, получаем

$$\|a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{22}a_{22}^\dagger a_{21}\|_2 \leq c(\tau + \varepsilon)(1 + \|a_{12}a_{22}^{-1}\|_2^2)^{1/2}.$$

Осталось воспользоваться соотношением

$$\|A\|_2^2 \leq \sum_{i,j} \|A_{ij}\|_2^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tyrtysnikov E. E. // Numerical Analysis and Its Applications. Proceedings of WNAA-96. Lecture Notes in Comput. Sci. V. 1196. New York: Springer Verlag, 1996. P. 505–516.
2. Goreinov S. A., Tyrtysnikov E. E., Yeremin A. Yu. Matrix-free iterative solution strategies for large dense linear systems // Numer. Linear Algebra Appl. (to appear).
3. Горейнов С. А., Замарашкин Н. Л., Тыртышников Е. Е. // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 2. С. 151–152.
4. Goreinov S. A., Tyrtysnikov E. E., Zamarashkin N. L. A theory of pseudo-skeleton approximations // Linear Algebra Appl. (to appear).
5. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной плоскости. М.: Мир, 1986.

Институт вычислительной математики РАН
E-mail: tee@inm.ras.ru, serge@bach.inm.ras.ru

Поступило
29.04.97
Исправленный вариант
10.06.97