Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Джамалов, Об асимптотике полиномов Мейкснера,
Матем. заметки, 1997, том 62, выпуск 4, 624–625

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:10:45

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ МЕЙКСНЕРА

М. Ш. Джамалов

Пусть $m_n^\alpha(x, h)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — классические полиномы Мейкснера, ортогональные на сетке $\Omega_h = \{0, h, 2h, \dots\}$ с весом

$$p(x) = (1 - e^{-h})^{\alpha+1} e^{-x} \frac{\Gamma(x/h + \alpha + 1)}{\Gamma(x/h + 1)},$$

т.е.

$$\sum_{x \in \Omega_h} m_n^\alpha(x, h) m_r^\alpha(x, h) p(x) = \delta_{nr},$$

где $\alpha > -1$, $h > 0$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, δ_{nr} — символ Кронекера.

Как известно [1], вопрос об асимптотических свойствах ортогональных полиномов является наиболее трудным в теории этих полиномов. В различных приложениях полиномов $m_n^\alpha(x, h)$ возникает задача об их асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$. В частности, в работе [2] для целых $\alpha > -1$ установлена следующая асимптотическая формула:

$$m_n^\alpha(x, h) = \Lambda_n^\alpha(x) + v_n^\alpha(x, h), \quad (1)$$

где

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \left(\binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1) \right)^{-1/2} L_n^\alpha(x),$$

а $L_n^\alpha(x)$ — классические полиномы Лагерра, в которой при $h \leq a/n$ для остаточного члена $v_n^\alpha(x, h)$ имеет место оценка

$$|v_n^\alpha(x, h)| \leq C(a, \alpha) \left(h \sum_{i=0}^n |\Lambda_i^\alpha(x)|^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Вопрос о справедливости оценки (2) для дробных α оставался открытым. Основным утверждением настоящей заметки является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha > -1$ произвольно. Тогда справедлива асимптотическая формула (1), в которой для остаточного члена $v_n^\alpha(x, h)$ при $nh \leq a$, $n = 1, 2, \dots$, имеет место оценка (2) с константой

$$C(a, \alpha) = \left(\frac{a^3 e^a}{576} + \left(\frac{5}{6}a + \frac{\alpha+1}{2} \right)^2 \frac{a}{\alpha+1} \exp \left(a \left(\frac{5}{3}a + \alpha + 7 \right) \right) \right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы опирается на ряд утверждений. Обозначим через $M_n^\alpha(x, h)$ классические полиномы Мейкснера, ортогональные на сетке Ω_h и нормированные условием

$$M_n(0, h) = \binom{n+\alpha}{n},$$

и положим $b(h) = (e^h - 1)/h$, $b_i(h) = b(ih)$, $i = 1, 2, \dots$, $b_0(h) = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $S(r, i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, r$, $r = 0, 1, 2, \dots$, — числа Стирлинга, $\mu_{in}^\alpha(h)$, $i \leq n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — коэффициенты разложения

$$M_n^\alpha(x, h) = \sum_{i=0}^n \mu_{in}^\alpha(h) L_i^\alpha(x).$$

Тогда при $i \leq n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, справедливы соотношения

$$\mu_{in}^\alpha(h) = b^n(h) \sum_{r=i}^n \sum_{j=i}^r \binom{n+\alpha}{n-r} \binom{j+\alpha}{j-i} \frac{j! S(r, j) (1 - e^h)^r}{r! h^j}.$$

ЛЕММА 2. При $i < n$, $n = 1, 2, \dots$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{in}^\alpha(h) = b^n(h) \sum_{r=i}^{n-1} \int_0^h b^{-n-1}(t) (r b'_{n-r+1}(t) - (r(e^t + 1) + \alpha + 1) b'_{n-r}(t) \\ + (r + \alpha + 1) e^t b'_{n-r-1}(t)) \mu_{ir}^\alpha(t) dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > -1$, $a > 0$, $0 \leq nh \leq a$, $i < n$. Тогда справедливы неравенства

$$|\mu_{in}^\alpha(h)| \leq C(a, \alpha) h,$$

где

$$C(a, \alpha) = \left(\frac{5}{6} a + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \exp \left(a \left(\frac{5}{6} a + \frac{\alpha + 7}{2} \right) \right).$$

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи и полезные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 2. Sharapudinov I. I. // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1991. V. 6. P. 13–21.

Дагестанский государственный педагогический университет,
г. Махачкала

Поступило
04.02.97