Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Б. С. Стечкин, И. В. Шарков, К проблеме Фробениуса трех аргументов, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 626–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:19:03

К ПРОБЛЕМЕ ФРОБЕНИУСА ТРЕХ АРГУМЕНТОВ

И. Д. Кан, Б. С. Стечкин, И. В. Шарков

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_t$ – взаимно простые натуральные числа и пусть $g = g(a_1, a_2, \dots, a_t)$ – наибольшее целое g , не представимое в виде

$$g = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_tx_t, \quad x_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Для $t = 2$ имеется классический результат Сильвестра [1]: $g(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1 - a_2$.

При $t \geq 3$ вопрос существенно усложняется и носит название проблемы Фробениуса. Так при $t = 3$ известны алгоритмы, дающие точное решение за $O(\ln a_1)$ арифметических операций (см., например, [2]), но мало что известно о существовании (или отсутствии) формулы, решающей ту же проблему за заранее ограниченное количество действий. Между тем, со времени работы Джонсона (1960) регулярно появляются работы, авторы которых предлагают свои алгоритмы для вычисления g . Появление таких работ оправдано по двум причинам. Во-первых, новые алгоритмы появляются, как правило, из новых методов, которые могут, в конечном итоге, привести к новым результатам. Во-вторых, есть надежда, что из какого-нибудь алгоритма удастся вывести точную формулу функции Фробениуса. Новому методу вычисления $g(a, b, c)$ посвящена данная заметка.

Интересно, что этот метод возник с “компьютерной подсказки”. Так именно пакетный диалог с компьютером подсказал в 1992 году следующие частные и достаточно общие формулы:

$$g(n, n+1, n+2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor n - 1$$

(см. [3, с. 49–50]),

$$\begin{aligned} g(n, n+1, n+3) &= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor (n+1) + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 1, \\ g(n, n+1, n+4) &= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor (n+1) + 3 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + n - 1, \end{aligned}$$

исходя из которых общий вид правых частей просматривается в виде функции

$$\Phi(n, p) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor (n+1) + (p-1) \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor + (p-3)n - 1,$$

(см. [3, с. 99]), однако уже при $p = 5$ имеем $g(n, n+1, n+5) = \Phi(n, 5) - n\delta(n, 6)$, где δ – дельта Кронекера.

Вычисление $g(a, b, c)$ можно свести к нахождению $g(n, n+1, n+p)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00492.

ТЕОРЕМА 1. Пусть d – наибольший общий делитель a и b , $a < b < c$, тогда

$$g(a, b, c) = \frac{ab(g(n, n+1, n+p) + 2n+1)}{dn(n+1)} + (d-1)c - (a+b), \quad (1)$$

где $n = \frac{b}{d}v - 1$, $p = n(\frac{cdv}{a} - 1)$, $a, v \in \mathbb{N}$ таково, что $bv \equiv d \pmod{a}$, $vd < a$.

Данное утверждение получается путем трехкратного использования формулы Джонсона $g(x, y, z) = lg(x/l, y/l, z) + (l-1)z$ [2].

Требует отдельного обоснования вычислительная целесообразность формулы (1). Предположим, что мы составили таблицу значений $g(n, n+1, n+p)$ для многих (грубо говоря, для всех) n и p . В этом случае можно показать, что вычисление $g(a, b, c)$ по формуле (1) проводится асимптотически быстрее, чем по алгоритму Джонсона. Это связано с тем, что алгоритм Джонсона требует $O(\ln a)$ умножений и делений и, следовательно, $O(\ln^3 a)$ единиц времени. Вычисление параметров d и v , которыми определяется сложность формулы (1), можно осуществить за $O(\ln a)$ простейших арифметических действий (таких как сложение, вычитание, деление на 2, умножение на 2). Полезно заметить, что в рамках [4] отношение трудоемкости умножения k -значных чисел к трудоемкости их сложения равно величине $C_k \log_2 k$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C$, где C – абсолютная константа). Следовательно, вычисления, проводимые по формуле (1), асимптотически в $C \log_2 \log_2 a$ раз быстрее алгоритма Джонсона (за счет априорного знания $g(n, n+1, n+p)$). По поводу общей алгоритмической сложности проблемы Фробениуса см. [5, с. 106–108].

Регулярную область точных решений дает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n, p \in \mathbb{N}$, $\Psi(n, p) = \min\{\Phi(n, 1), \Phi(n, p)\}$, тогда

$$g(n, n+1, n+p) \leq \Psi(n, p), \quad (2)$$

причем в (2) равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{n+1}{p-1} \geq \min\left\{\left[\frac{n-1}{p}\right] + 1, \frac{1}{[p/n]}\right\}. \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $n \geq p(p-4) + 2$, то $g(n, n+1, n+p) = \Phi(n, p)$.

Ясно, что если $c \geq g(a, b) + 1$, то $g(a, b, c) = g(a, b)$, а это влечет

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n \leq 1 + \sqrt{p+1}$, то $g(n, n+1, n+p) = n^2 - n - 1$.

Суть доказательства составляет не более чем одношаговое применение алгоритма Джонсона. Нерегулярность в классе точных решений проявляется при невыполнении (3). Эта область характеризуется тем, что в ней всегда

$$g(n, n+1, n+p) = \Psi(n, p) - (\alpha n + \beta(n+1)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0,$$

однако эту двумерную (от α и β) таблицу разностей $\Psi - g$ удастся выразить однопараметрически.

ТЕОРЕМА 3. Для любых $n, p \in \mathbb{N}$ существует натуральное k ($1 \leq k \leq n(n-1)/2$) такое, что

$$g(n, n+1, n+p) = \Psi(n, p) - M_n(k),$$

где $M_n(k) = [\sqrt{2k} - 0.5]n + k - 1 - 0.5[\sqrt{2k} - 0.5][\sqrt{2k} + 0.5]$.

Это дает точное решение в части нерегулярной области.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $n \geq p - 2$ и

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2n-1}{p} + 1 \right] \leq \frac{n+1}{p-1} < \left[\frac{n-1}{p} + 1 \right],$$

то

$$g(n, n+1, n+p) = \Phi(n, p) - \min \left\{ \left(p - 2 - \left[\frac{n}{p} \right] - p \left\{ \frac{n}{p} \right\} \right) n, p \left\{ \frac{n}{p} \right\} (n+1) \right\}.$$

Стало быть, если

$$n \geq \left[p \left(\frac{p-6}{2} \right) + 2 \right]$$

то теорема 2 со следствием 3 дают для $g(n, n+1, n+p)$ точные формулы.

Для малых $n \leq p - 3$ одношаговое применение алгоритма Джонсона дает

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $n \leq p - 3$ и

$$0 < \left[\frac{n-1}{n\{p/n\}} + 1 \right] \left(n \left\{ \frac{p}{n} \right\} - \left[\frac{n+p}{n} \right] \right) \leq n+1,$$

то

$$\begin{aligned} g(n, n+1, n+p) &= (n+1) \left(n \left\{ \frac{p}{n} \right\} - 1 \right) - n + \left[\frac{n-1}{n\{p/n\}} \right] (n+p) \\ &\quad - \min \left\{ (n+1) \left(\left[\frac{n-1}{n\{p/n\}} + 1 \right] n \left\{ \frac{p}{n} \right\} - n \right), n+p \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, комбинирование полученных точных решений с алгоритмом Джонсона и $M_n(k)$, дает новый общий алгоритм.

ТЕОРЕМА-АЛГОРИТМ (Кан). Уравнение $U = \alpha n + \beta(n+1) + \gamma(n+p)$ разрешимо в целых неотрицательных α, β, γ тогда и только тогда, когда

$$\Theta(U - L(U)) \leq 0. \quad (4)$$

Здесь $q_0 = n, q_1 = n\{p/n\}, r_0 = 0, r_1 = n+p,$

$$q_{j+1} = \left(\left[\frac{q_{j-1}-1}{q_j} \right] + 1 \right) q_j - q_{j-1}, \quad q_j \neq 0,$$

$$r_{j+1} = \left(\left[\frac{q_{j-1}-1}{q_j} \right] + 1 \right) r_j - r_{j-1}, \quad v = \min \{ j \in \mathbb{N} \mid r_j \geq (n+1)q_j \},$$

$$K(U) = q_{m-1} \left[\frac{n}{q_{m-1}} \left\{ \frac{U}{n} \right\} \right], \quad q_m = 0, \quad m \neq 1,$$

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{K(U)}{q_1} \right], \quad \varepsilon_{j+1} = \left[\frac{1}{q_{j+1}} \left(K(U) - \sum_{i=1}^j \varepsilon_i q_i \right) \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots, m-2,$$

$$L(U) = \sum_{i=1}^{v-1} \varepsilon_i r_i, \quad L(U) = 0, \quad m = 1, \quad \Theta(U) = n \left\{ \frac{U}{n} \right\} - \left[\frac{U}{n} \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 5. При выполнении (4) одним из решений будет следующее:

$$\alpha = -\Theta(U - L(U)), \quad \beta = n \left\{ \frac{U - L(U)}{n} \right\}, \quad \gamma = \frac{L(U)}{n + p}.$$

Результаты работы докладывались на семинаре “Дискретная математика” в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН 7 апреля 1997 года, а также на семинаре по теории чисел профессора А. Шинцеля в Институте математики Польской АН в августе 1997 года.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sylvester J. J. Mathematical questions, with their solutions // Educational Times. 1884. V. 41. P. 21.
2. Johnson S. M. // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 390–398.
3. Stechkin B. S., Baranov V. I. Extremal Combinatorial Problems and Their Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Press, 1995.
4. Карацуба А. А., Офман Ю. П. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 293–294.
5. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: boris@mi.ras.ru

Поступило
20.05.97
Исправленный вариант
15.08.97