Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 629–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:36:03

ПРИМЕР НЕПОСТОЯННОЙ БИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, ОБРАЩАЮЩЕЙСЯ В НУЛЬ ВСЮДУ НА НИГДЕ НЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕ

М. Я. Мазалов

Напомним [1], что функция $f(z)$ называется *бианалитической* в некоторой области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если она представима в виде $f(z) = f_1(z) + \bar{z}f_2(z)$, где f_1 и f_2 – аналитические в G функции, называемые *аналитическими компонентами* $f(z)$. Будем называть жорданову кривую Γ *нигде не аналитической*, если эта кривая не содержит никакой аналитической поддуги. Установим следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Существуют область D , ограниченная гладким жордановым контуром Γ , и функция $f(z)$, бианалитическая всюду в D и не равная нулю тождественно, такие, что*

- 1) $f(z)$ принадлежит классу Lip_1 в замкнутой области $\bar{D}$;
- 2) всюду на кривой Γ функция $f(z)$ обращается в нуль;
- 3) Γ нигде не аналитична.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы вытекает, что аналитические компоненты f_1 и f_2 функции f ограничены в D , и при этом почти всюду на кривой Γ угловые граничные значения отношения f_1/f_2 совпадают с функцией $-\bar{z}$. Класс спрямляемых жордановых кривых, обладающих таким свойством (так называемые *неванлинновские кривые* [2]), естественно возникает в задачах равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим последовательности вещественных чисел (d_n) и (ε_n) следующим образом:

$$d_n = 10^{-2n}, \quad \varepsilon_n = 10^{-10^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для каждого фиксированного n рассмотрим набор комплексных чисел $w_{n,s}$, $s = 0, 1, \dots, 10^n - 1$, таких, что

$$|w_{n,s}| = 1 - d_n, \quad \arg w_{n,s} = \frac{2\pi s}{10^n}.$$

Пусть K – круг $\{|w| < 1\}$, ∂K – окружность $\{|w| = 1\}$, $K_{n,s}$ – (открытые) круги с центрами $w_{n,s}$ и радиусами d_n^2 . Очевидно, при различных n и s круги $K_{n,s}$ попарно не пересекаются.

Всюду в дальнейшем через $c, c_1, c_2, \dots$ будем обозначать постоянные, вообще говоря, различные в разных соотношениях.

Пусть

$$M_{n,s}(w) = \frac{\varepsilon_n}{w - w_{n,s}}.$$

Рассмотрим функцию

$$M(w) = \frac{1}{w} + \sum_{(n,s)} M_{n,s}(w).$$

Так как для каждой точки $w \in \mathbb{C}$ найдется не более одной точки $w_{n',s'}$ из множества $\{w_{n,s}\}$ такой, что $|w - w_{n',s'}| < d_n^2$, и при суммировании $\sum'$ по всем парам $(n, s) \neq (n', s')$ выполняется оценка

$$\sum'_{(n,s)} |M_{n,s}(w)| < \sum_{n=1}^{\infty} 10^n d_n^{-2} \varepsilon_n < c, \quad (1)$$

то функция $M(w)$ аналитична в некоторой окрестности любой точки w , $w \neq 0$, не принадлежащей замыканию множества $\{w_{n,s}\}$. В частности, $M(w)$ мероморфна в круге K и голоморфна в области $\{|w| > 1\}$.

Если точка w принадлежит множеству

$$Q = \left\{ |w| \geq \frac{1}{2} \right\} \setminus \bigcup_{(n,s)} K_{n,s},$$

то оценка (1) будет выполнена при суммировании по всем парам (n, s) (без пропусков), и, следовательно, функция $M(w)$ непрерывна на множестве Q .

Рассмотрим функцию $H(w) = \overline{M(1/\overline{w})}$.

Ясно (в силу свойств $M(w)$), что функция $H(w)$ голоморфна в K . Заметим, что при $|w| \leq 1$ выполняется оценка

$$\sum_{(n,s)} \left| \frac{\partial}{\partial w} \overline{M_{n,s} \left(\frac{1}{\overline{w}} \right)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} 10^{5n-10^n} < 10^{-4}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

- а) функция $H(w)$ непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $\overline{K}$;
- б) производная $\partial H / \partial w$ нигде на окружности ∂K не обращается в нуль;
- в) в K выполняется неравенство $\operatorname{Re} H'(w) > 1 - 10^{-4}$.

Напомним (см., например, [3]), что если некоторая функция $F(w)$ голоморфна в выпуклой области G (в частности, в круге K), непрерывна в ее замыкании $\overline{G}$, и если всюду в G выполнено неравенство $\operatorname{Re} F'(w) > 0$, то $F(w)$ однолистка в G , т.е. взаимно однозначно отображает G на некоторую жорданову область. Отсюда из а)–в) следует, что функция $z = H(w)$ конформно и однолистно отображает круг K на некоторую область D , ограниченную гладким контуром $\Gamma = \partial D$. Так как $|H'(w)|$ ограничен в K сверху и снизу положительными константами, то в силу теоремы Кёбе о покрытии [4] найдутся константы c_1 и c_2 , $0 < c_1 < c_2$, такие, что

$$c_1(1 - |w|) < \operatorname{dist}(z, \Gamma) < c_2(1 - |w|). \quad (3)$$

Заметим, что

$$\sum_{(n,s)} (1 - |w_{n,s}|) = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} < \infty.$$

Отсюда следует (см., например, [5]), что функция $B(w)$ – произведение Бляшке с простыми нулями $w_{n,s}$ и $w = 0$, т.е.

$$B(w) = w \prod_{(n,s)} \frac{-\overline{w_{n,s}}}{|w_{n,s}|} \frac{w - w_{n,s}}{1 - \overline{w_{n,s}}w},$$

представляет собой функцию, ограниченную в K (именно, $|B(w)| < 1$) и тождественно не равную нулю.

Рассмотрим в K функцию

$$\Phi(w) = B(w)(M(w) - \overline{H(w)}).$$

Очевидно, она не есть тождественный нуль: $\Phi(0) = \prod |w_{n,s}| > 0$.

Пусть w – произвольная точка круга K . Если w принадлежит некоторому кругу $K_{n',s'}$ из множества $\{K_{n,s}\}$, то

$$\sum'_{(n,s)} \left| M_{n,s}(w) - M_{n,s}\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) \right| < 4(1 - |w|) \sum_{n=1}^{\infty} 10^n d_n^{-4} \varepsilon_n < c_3(1 - |w|). \quad (4)$$

(Если w не принадлежит ни одному из кругов $K_{n,s}$, то оценка (4) будет выполняться при суммировании по всем парам (n, s) .) Кроме того,

$$\left| B(w) \left(M_{n',s'}(w) - M_{n',s'}\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) \right) \right| < \frac{2\varepsilon_{n'}}{1 - |w_{n',s'}|} < 1 - |w|. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что всюду в круге K выполнено

$$|\Phi(w)| < c(1 - |w|),$$

где c – некоторая константа. Но тогда функция

$$f(z) = \Phi(H^{-1}(z)) = B_1(z)(M_1(z) - \overline{z}),$$

где $B_1(z) = B(H^{-1}(z))$, $M_1(z) = M(H^{-1}(z))$, бианалитична в области D , непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$ и обращается в нуль всюду на граничном контуре Γ . Более того, с учетом (3) получим, что всюду в D

$$|f(z)| < c \operatorname{dist}(z, \Gamma),$$

c – константа. Отсюда и из оценок производных полианалитических функций (так называемых *неравенств Николеску* [1]) вытекает, что частные производные первого порядка функции $f(z)$ равномерно ограничены в D , и, следовательно, так как D – область с гладкой границей, $f(z)$ принадлежит классу $\operatorname{Lip}_1(\overline{D})$. В частности, аналитические компоненты функции $f(z)$ равномерно ограничены в D .

Поэтому $M(w)$ (как функция в K , мероморфная и ограниченной характеристики) имеет почти всюду на окружности ∂K (изнутри K) угловые граничные значения. Напомним также, что $M(w)$ голоморфна при $|w| > 1$, непрерывна при $|w| \geq 1$ и в силу непрерывности $M(w)$ на множестве Q угловые граничные значения $M(w)$ на окружности ∂K изнутри K совпадают в соответствующих точках ∂K (т.е. почти всюду) с непрерывными граничными значениями $M(w)$ извне K .

Так как при этом замыкание множества $\{w_{n,s}\}$ – полюсов $M(w)$ в K – содержит всю окружность ∂K , то в силу граничной теоремы единственности Лузина и Привалова функция $M(w)$ не может быть аналитически продолжена внутрь круга K ни через какую дугу этой окружности. Следовательно, $H(w)$ не продолжается аналитически вовне K ни через какую дугу ∂K и, таким образом, контур Γ не содержит никакой аналитической поддуги.

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность П. В. Парамонову за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балк М. Б. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 85. М.: ВИНТИ, 1990. С. 187–246.
2. Федоровский К. Ю. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
3. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. // УМН. 1975. Т. 30. № 4. С. 3–60.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л., 1950.

Военная академия ПВО СВ РФ, г. Смоленск

Поступило
12.02.96