Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шапиро, О числе компонент пространства тригонометрических многочленов степени n с $2n$ различными критическими значениями, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 4, 635–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:47:47

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНИ n С $2n$ РАЗЛИЧНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Б. Шапиро

1. Введение. В работе [1, с. 38] В. И. Арнольд сформулировал следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА АРНОЛЬДА. Число компонент связности пространства $\widetilde{Tg}_n$ тригонометрических многочленов степени n , имеющих $2n$ различных вещественных критических значений, совпадает с числом компонент связности пространства $\mathcal{P}_{2n}$ всех гладких функций на окружности с тем же свойством (т.е. имеющих ровно $2n$ различных критических значений).

Согласно [1] последовательность $\text{card } \pi_0(\mathcal{P}_{2n})$ совпадает с последовательностью чисел Эйлера E_n . (Например, $E_1 = 1$, $E_2 = 2$, $E_3 = 16$. Заметим, что при указании E_i для малых i в [1, с. 38] допущена описка и приведены значения их антипериодических аналогов.) В этой заметке мы докажем сформулированную выше гипотезу.

Пусть X_{2n} (соответственно $\overline{X}_{2n}$) обозначает пространство циклически упорядоченных наборов из $2n$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию: каждое число строго (соответственно нестрого) больше или строго (соответственно нестрого) меньше двух своих соседей. Через $\widetilde{X}_{2n}$ обозначим подмножество наборов из попарно различных чисел. Введем пространство $Tg_n \supset \widetilde{Tg}_n$, состоящее из тригонометрических полиномов с $2n$ различными критическими точками (но необязательно различными значениями) и пространство $\overline{Tg}_n$, состоящее из тригонометрических многочленов с $2n$ критическими точками с учетом кратности. Очевидно, $\overline{Tg}_n \supset Tg_n \supset \widetilde{Tg}_n$, и проективизация (т.е. фактор по умножению на ненулевые скаляры) пространства $\overline{Tg}_n$ компактна. Зададим отображение $\Psi_n: \overline{Tg}_n \rightarrow \overline{X}_{2n}$, сопоставляющее каждому полиному из $\overline{Tg}_n$ циклически упорядоченный набор его критических значений. Если критическое значение кратно, то его надо повторить столько раз, какова кратность. (Ограничение отображения Ψ_n на подпространства в $\overline{Tg}_n$ будем обозначать той же буквой. В этой заметке термин “полином” всегда означает тригонометрический полином.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ — гомеоморфизм пространства $\widetilde{X}_{2n}$ и факторпространства пространства $\widetilde{Tg}_n$ по действию окружности S^1 поворотами.

СЛЕДСТВИЕ. Гипотеза Арнольда верна. Компоненты пространства $\widetilde{Tg}_n$ (или $\widetilde{Tg}_n/S^1$) нумеруются циклическими updown-последовательностями длины $2n$ (ср. [2]).

Доказательству основного предложения посвящен следующий пункт. Две приведенные ниже гипотезы представляются автору естественным развитием тематики.

ГИПОТЕЗА 1. Отображение Ψ_n задает гомеоморфизм пространств Tg_n/S^1 и X_{2n} .

Рассмотрим любую систему Чебышева из $2n+1$ периодических функций $f_1, \dots, f_{2n+1}$ и выделим в линейном пространстве, натянутом на $f_1, \dots, f_{2n+1}$, подмножество Ω , состоящее из всех функций с $2n$ различными критическими значениями.

ГИПОТЕЗА 2. Число компонент связности множества Ω равно числу Эйлера E_n .

После того как настоящая заметка была закончена и отослана в редакцию, автор получил от Арнольда статью [3], в которой доказывается (среди прочего) та же гипотеза, но совершенно иными методами. Возможное преимущество излагаемого ниже подхода состоит в том, что он, по-видимому, позволяет перечислить все компоненты связности пространства тригонометрических многочленов с попарно различными критическими значениями, а также изучить случай произвольных чебышевских систем функций. Автор благодарен своему брату М. Шапиро за обсуждение приведенной выше гипотезы Арнольда и ряд важных наблюдений, существенно улучшивших формулировки и изложение материала.

2. Доказательства. Доказательство основного предложения состоит из следующих трех этапов:

- а) отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ открыто, т.е. является локальным гомеоморфизмом на образ;
- б) отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ – накрытие;
- в) степень этого накрытия равна 1, т.е. Ψ_n – гомеоморфизм.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Рассмотрим произвольный тригонометрический полином $g \in \widetilde{Tg}_n$. Обозначим через $(t_1, \dots, t_{2n})$, $(c_1, \dots, c_{2n})$ циклически упорядоченные критические точки и соответствующие критические значения g . (Иногда мы будем явно указывать зависимость от g .) Пространство T_n всех тригонометрических полиномов степени не выше n есть чебышевская система функций (см., например, [4]). Откуда следует, в частности, что для любого $i = 1, \dots, 2n$ найдется однопараметрическое семейство полиномов $p_{g,i}^\alpha \in T_n$, удовлетворяющих условиям: $p_{g,i}^\alpha(t_j) = 0$ для всех $j \neq i$ и $p_{g,i}^\alpha(t_i) = 1$ (см. [4]). Параметр α пробегает аффинную прямую в пространстве T_n . Очевидно, что каждый $p_{g,i}^\alpha$ принадлежит $\overline{Tg}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО а). Рассмотрим произвольный $g \in \widetilde{Tg}_n$ и выберем некий конкретный $p_{g,i}^\alpha$. Возьмем семейство $g + \lambda p_{g,i}^\alpha$ и вычислим

$$\left. \frac{dc_j(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0},$$

где $c_j(\lambda)$ – критическое значение полинома $g + \lambda p_{g,i}^\alpha$, близкое к c_j . (Оно корректно определено при малых λ .) Легко видеть, что

$$\left. \frac{dc_j(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i, \end{cases}$$

для любого фиксированного значения α . Тем самым, отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ является субмерсией, и прообраз точки из $\widetilde{X}_{2n}$ есть объединение орбит действия S^1 на $\widetilde{Tg}_n$ поворотами.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности, это рассуждение доказывает открытость локально определенного отображения трансверсали к действию поворотов в окрестности любого полинома $g \in Tg_n$ на произвольном образом упорядоченное множество его критических значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО б). Разобьем рассуждение на следующие шаги.

ЛЕММА 1. Любые две L^p -метрики эквивалентны на пространстве T_n всех тригонометрических многочленов степени не выше n . Это означает, что для любых $p, q \in [1, \infty)$ существуют константы $\Gamma_{p,q} > \gamma_{p,q} > 0$, зависящие от p, q, n , такие, что для любого $g \in T_n$, отличного от тождественного нуля, имеет место неравенство

$$0 < \gamma_{p,q} \leq \frac{L^p(g)}{L^q(g)} \leq \Gamma_{p,q} < \infty.$$

(Точные значения $\Gamma_{p,q} > \gamma_{p,q} > 0$ в дальнейшем несущественны.)

ЛЕММА 2. Для любого $g \in \widetilde{Tg}_n$ с циклическим набором критических точек и значений $(t_1, \dots, t_{2n}), (c_1, \dots, c_{2n})$ соответственно, удовлетворяющих условию

$$\min_k |t_k - t_{k-1}| > \varepsilon > 0,$$

и для любого $i = 1, \dots, 2n$ найдется значение α такое, что тригонометрический полином $p_{g,i}^\alpha$ из указанного выше семейства имеет L^1 -норму не больше константы

$$\kappa_n(\varepsilon) = \frac{k_n}{(\varepsilon(24 - \varepsilon^2))^{n(n-1)/2}},$$

где k_n — некая константа, зависящая только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что L^1 -норма полинома

$$p_{g,i}^\alpha = \sum_i a_i \sin ix + b_i \cos ix + c$$

не превышает

$$\sum_i (|a_i| + |b_i|) + |c|.$$

Оценим сверху последнюю величину. Заметим, что полином $p_{g,i}^\alpha$ обязательно имеет $2n$ вещественных корней, $2n - 1$ из которых совпадают с $t_1, \dots, t_i, \dots, t_{2n}$, а последний — любое число, отличное от t_i . Выберем последний корень t_{2n+1} так, чтобы для новой системы из $2n + 1$ корня $t_1, \dots, t_i, \dots, t_{2n}, t_{2n+1}$ выполнялось условие

$$\min_i |t_i - t_{i-1}| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $p_{g,i}^\alpha$ определен однозначно системой из $2n + 1$ условия: $p_{g,i}^\alpha(t_j) = 0, j \neq i$, $p_{g,i}^\alpha(t_i) = 1$. Коэффициент $a_j = \Delta_j^1 / \Delta$ ($b_j = \Delta_j^2 / \Delta$ соответственно), где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin t_1 & \cos t_1 & \sin 2t_1 & \cos 2t_1 & \dots & \sin nt_1 & \cos nt_1 & 1 \\ \sin t_2 & \cos t_2 & \sin 2t_2 & \cos 2t_2 & \dots & \sin nt_2 & \cos nt_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ \sin t_{2n+1} & \cos t_{2n+1} & \sin 2t_{2n+1} & \cos 2t_{2n+1} & \dots & \sin nt_{2n+1} & \cos nt_{2n+1} & 1 \end{vmatrix},$$

а Δ_j^1 (Δ_j^2 соответственно) получается заменой в приведенной выше матрице $(2j - 1)$ -го (соответственно $(2j)$ -го) столбца на $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Заметим, что для Δ имеется явная формула

$$\Delta = l_n \prod_{i < j} \sin \frac{t_i - t_j}{2}, \quad (1)$$

где l_n – некоторая константа. Имеем $\Delta_j^k \leq (\sqrt{n+1})^{2n+1}$, $k = 1, 2$, поскольку длина каждого столбца (строки) приведенной выше матрицы не больше $\sqrt{n+1}$. Из формулы (1) и разложения синуса в ряд получаем для $\varepsilon < 1$ неравенство

$$|\Delta| \geq l_n \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^3}{48} \right)^{n(n-1)/2}.$$

Окончательно получаем, что $|a_i|$ и $|b_i|$ не превышают

$$\theta = \frac{(\sqrt{n+1})^{2n+1}}{l_n(\varepsilon/2 - \varepsilon^3/48)^{n(n-1)/2}}.$$

Аналогично, $|c| \leq \theta$, и L^1 -норма функции $p_{g,i}^\alpha$ не превышает

$$\kappa_n(\varepsilon) = (2n+1)\theta = \frac{k_n}{(\varepsilon(24 - \varepsilon^2))^{n(n-1)/2}}.$$

Рассмотрим L^∞ -норму на пространстве T_n всех тригонометрических полиномов степени не выше n .

ЛЕММА 3. Пусть $g \in \widetilde{T}g_n$ имеет набор критических значений $(c_1, \dots, c_{2n})$, удовлетворяющий условию

$$\min_{i < j} |c_i - c_j| \geq \varepsilon.$$

Тогда пространство $\widetilde{T}g_n$ содержит $\varepsilon/2$ -окрестность полинома g относительно L^∞ -нормы.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 4. Пусть циклический набор $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_{2n}) \in X_{2n}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\max_i |c_i| = \mu$;
- 2) $\min_i |c_i - c_{i-1}| = \nu > 0$;
- 3) $\exists g \in \widetilde{T}g_n$ такое, что $\Psi_n(g) = \mathcal{C}$.

Тогда

$$\min_i |t_i - t_{i-1}| \geq \frac{\nu}{2n\mu\Gamma_{1,\infty}},$$

где $t_1, \dots, t_{2n}$ – критические значения g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$\sum_{i=1}^{2n} |c_i - c_{i-1}| = \int_0^{2\pi} |g'(t)| dt.$$

Следовательно, L^1 -норма функции g' не превышает $2n\mu$. Согласно лемме 1 получаем, что L^∞ -норма функции g' , т.е. $\max |g'|$, не превышает $2n\mu\Gamma_{1,\infty}$. Из условия 2) имеем

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |g'| dt \geq \nu.$$

Таким образом, для всякого i выполняется

$$|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{\nu}{2n\mu\Gamma_{1,\infty}}.$$

ЛЕММА 5. Для любого $g \in \widetilde{Tg}_n$, удовлетворяющего условиям:

- 1) $\min_{i < j} |c_i - c_j| = \varepsilon > 0$;
- 2) $\max_i |c_i| = \mu > 0$,

найдется $\delta(\varepsilon, \mu)$ такое, что отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ покрывает $\delta(\varepsilon, \mu)$ -окрестность образа $\Psi_n(g)$ в пространстве $\widetilde{X}_{2n}$ относительно L^∞ -нормы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3 для любого g , удовлетворяющего условиям 1), 2), его $\varepsilon/2$ -окрестность содержится в $\widetilde{Tg}_n$. Кроме того, согласно лемме 4 для любого g , удовлетворяющего условиям 1), 2), расстояние $\min_i |t_i - t_{i-1}|$ между его критическими значениями не меньше $\varepsilon/(2n\mu\Gamma_{1,\infty})$. Следуя доказательству леммы 1, можно для каждого $i = 1, \dots, 2n$ построить глобальное гладкое векторное поле ξ_i на $\widetilde{Tg}_n$ из “векторов” $p_{g,i}^\alpha$. Для этого достаточно для каждого g выбрать $t_{2n+1} = (t_i + t_{i+1})/2$, что однозначно определит $p_{g,i}^\alpha$, гладко зависящий от полинома g . Имеем

$$\frac{dc_j}{d\xi_i} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

где производная берется вдоль поля ξ_i . Легко видеть, что для любого g , удовлетворяющего условиям 1), 2), длины векторов поля ξ_i в $\varepsilon/4$ -окрестности полинома g ограничены сверху константой, зависящей только от ε и μ . Действительно, для любого g^* из $\varepsilon/4$ -окрестности полинома g выполняются условия:

$$\max_i |c_i(g^*)| \leq \mu + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \min_i |c_i(g^*) - c_{i-1}(g^*)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это позволяет воспользоваться леммой 4 для оценки расстояния между критическими точками g^* и затем леммой 1 для оценки L^1 -нормы “вектора” $p_{g^*,i}^\alpha$. Поскольку векторные поля ξ_i определены для всех i , можно, двигаясь вдоль них, менять независимо в отдаленных от нуля пределах все критические значения c_i . Следовательно, существует $\delta(\varepsilon, \mu)$ такое, что отображение Ψ_n покрывает $\delta(\varepsilon, \mu)$ -окрестность любого полинома g , удовлетворяющего посылкам.

ЛЕММА 6 (накрывающая гомотопия для путей в $\widetilde{X}_{2n}$). Рассмотрим произвольный путь $\mathcal{C}(\tau): [0, 1] \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$, соединяющий два циклических набора $\mathcal{C}(0) \in \widetilde{X}_{2n}$ и $\mathcal{C}(1) \in \widetilde{X}_{2n}$. Пусть существует тригонометрический полином $g(0) \in \widetilde{Tg}_n$ такой, что $\Psi_n(g(0)) = \mathcal{C}(0)$. Тогда найдется путь $g(\tau): [0, 1] \rightarrow \widetilde{Tg}_n$ (а значит, и в $\widetilde{Tg}_n/S^1$), накрывающий $\mathcal{C}(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Анализируя предыдущее доказательство, легко убедиться, что выбор $\delta(\varepsilon, \mu)$ можно сделать непрерывным по (ε, μ) . Тем самым, поскольку путь $\mathcal{C}(\tau)$ компактен в $\widetilde{X}_{2n}$, найдется $\delta_{\min} = \min_\tau \delta(\varepsilon(\tau), \mu(\tau)) > 0$. Разобьем путь $\mathcal{C}(\mu)$ точками $\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1/N), \mathcal{C}(2/N), \dots, \mathcal{C}(1)$ на отрезки длины меньше $\delta_{\min}$. Согласно лемме 5 отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ накрывает первый отрезок пути. Пусть $g(1/N)$ – полином, отображающийся на $\mathcal{C}(1/N)$. Поскольку $\delta(\varepsilon(1/N), \mu(1/N)) > \delta_{\min}$, то опять согласно лемме 5 отображение Ψ_n накрывает $\delta_{\min}$ -окрестность образа $\mathcal{C}(1/n)$ и т.д.

ЛЕММА 7. Отображение $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ – накрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу лемм 1 и 6 это отображение – локальный гомеоморфизм, удовлетворяющий свойству накрывающей гомотопии для путей и, следовательно, накрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в). Согласно доказанному отображение замкнутых множеств $\Psi_n: \overline{Tg}_n/S^1 \rightarrow \overline{X}_{2n}$ корректно определено и является накрытием на открытой части $\widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$. Заметим, что из теории аппроксимации Чебышева, в частности, вытекает, что $\sin nx$ – единственный (с точностью до поворотов) тригонометрический многочлен степени не выше n , имеющий $2n$ критических точек и ровно два критических значения ± 1 (см., например, [5]). Это означает, что класс $\sin nt$ в $\widetilde{Tg}_n$ является единственным прообразом циклического набора $\mathbf{c} = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1) \in X_{2n}$ относительно отображения Ψ_n . Рассмотрим путь $\rho: [0, 1] \rightarrow X_{2n}$ такой, что $\rho(0) = \mathbf{c}$ и $\rho(\tau) \in \widetilde{X}_{2n}$ для всех $\tau \in (0, 1]$. Предположим, что степень накрытия $\Psi_n: \widetilde{Tg}_n/S^1 \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$ больше 1, и рассмотрим два разных прообраза $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho(1))$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho(1))$ набора $\rho(1)$. В силу накрывающей гомотопии на открытой части и компактности проективизации пространства $\overline{Tg}_n/S^1$, мы можем однозначно поднять путь ρ до двух путей $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ в $\overline{Tg}_n/S^1$. (В действительности, оба этих пути попадут только в Tg_n/S^1 , и $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho(0))$ совпадает с $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho(0))$ и равно $\sin nx$ или, точнее говоря, классу $\sin nx$ в $\widetilde{Tg}_n/S^1$.) Выберем теперь произвольную локальную трансверсаль Sec к S^1 -действию на $\widetilde{Tg}_n$ в окрестности полинома $\sin nx$. Пути $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ однозначно поднимаются в окрестности $\tau = 0$ на трансверсаль Sec до путей $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$, где $\tau \in [0, t \ll 1]$, причем $\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \sin nx$. С другой стороны, рассмотрим отображение $\widetilde{\mathbb{R}}^{2n} \rightarrow \widetilde{X}_{2n}$, где $\widetilde{\mathbb{R}}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$ – полный прообраз $\widetilde{X}_{2n}$ в пространстве упорядоченных наборов n чисел $(c_1, \dots, c_{2n})$ относительно взятия циклического упорядочивания. (Заметим, что раньше выражение $(c_1, \dots, c_{2n})$ обозначало циклически упорядоченный набор.) Для любого $\tau \in (0, 1]$ выберем в циклически упорядоченном наборе $\rho(\tau)$ полное упорядочивание, положив его первый элемент равным минимуму из всех. Поскольку $\rho(\tau)$ лежит в $\widetilde{X}_{2n}$, этот выбор определен однозначно. После такого выбора путь ρ однозначно поднимется до пути $\tilde{\rho} \subset \widetilde{\mathbb{R}}^{2n}$. Локально определенное отображение $\tilde{\Psi}_n: \text{Sec} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^{2n}$, ставящее в соответствие полиному упорядочивание его критических значений, переводит Φ_1 и Φ_2 в $\tilde{\rho}$. Однако, в силу замечания $\tilde{\Psi}_n$ отображает трансверсаль Sec локально гомеоморфно на окрестность набора $\mathbf{c}$ в $\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}$. Следовательно, $\Phi_1 = \Phi_2$. Тем самым, $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ совпадают в окрестности нуля, а значит, и глобально. Это противоречитсылке и доказывает лемму.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 1–49.
2. Arnold V. I. // Duke Math. J. 1991. V. 63. № 2. P. 537–555.
3. Arnold V. I. Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents polyhedron // Arnold–Gelfand Math. Sem. Basel: Birkhäuser, 1997. P. 101–106.
4. Coppel W. A. Disconjugacy. Lecture Notes in Math. V. 220. New York: Springer Verlag, 1971.
5. Rivlin T. J. Chebyshev Polynomials. 2nd ed. Chichester: Wiley, 1990.